168488

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK YAPILARIN KURULMA YÖNTEMLERİ

Matematikçi Burhan İNEGÖL

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hamit AVCI

prof. Dr. Hamit AVCI

Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu

Doç. Dr. Ayşe Kara

İSTANBUL, 2005

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

τ	Topoloji
(X, τ)	Topolojik uzay
(A, τ_A)	Topolojik alt uzay
κ	Kapalılar aiesi
$\overline{A}$	A nın kapanışı
$\mathring{A}$	A nın içi
A'	A nın yığılma noktaları kümesi
$N(x)$	x noktasının komşuluklar ailesi
β	τ için taban
ς	τ için alt taban
I	Damga kümesi
π	İzdüşüm tasviri

ÖNSÖZ

Tezimi hazırlarken bana yardımcı olan ve yönlendiren hocam, Prof. Dr. Hamit Avcı 'ya teşekkürlerimi sunuyorum.

ÖZET

"Topolojik Yapıların Kurulma Yöntemleri" olarak adlandırılan bu çalışma, genel topolojinin temel konularını içerir ve üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, giriş başlığı altında topolojik yapılar ile ilgili olan bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, hiçbir topolojinin olmadığı durumlarda çeşitli teoremler yardımı ile topoloji elde edilmesinden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, mevcut bir topolojiden, yeni topolojiler elde etmek için kullanacağımız teoremler açıklanmıştır.

Ayrıca her bölümde, konunun kolay anlaşılması için örneklere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Topoloji, taban, alt taban, komşuluk, süreklilik.

ABSTRACT

Study on "Constructing Topological Structures" covers fundamentals of general topology and it consists of 3 main chapters.

First chapter covers fundamental concepts and definitions regarding topological structures under the heading of introduction.

Second chapter explains the methodology of establishing topology under the circumstances where no topology exists by utilizing several different theorems.

Chapter three provides the theorems to establish new topologies by using an existing topology.

Moreover, in the scope of this study, every chapter includes examples to facilitate easy understanding of the concept.

Keywords: Topology, base, sub-base, neighbourhood, continuity.

1. GİRİŞ

Topolojik uzay kavramı, öklid uzayı, reel düzlem ve bu uzaylar üzerindeki sürekli fonksiyonlar ile ilgili çalışmalar sonucu gelişmiştir. Öncelikle; topolojik uzayı, bu uzayda yer alan topolojileri ve topolojik uzay içerisinde bir topolojiyi oluşturmak için uygun yöntemleri araştıracağız. Ama hepsinden önce topolojik uzay tanımı ile birlikte kullanılan temel kavramlara değineceğiz. Açık ve kapalı kümeler, limit noktaları, sürekli fonksiyonlar gibi kavramlar; reel düzlem ve öklid uzaylarının genelleştirmesinde yer alırlar.

Günümüzdeki topolojik uzay tanımının standart hale gelmesi uzun zaman almıştır. Bu yüzyılın (1900'lerin) ilk on yılı içersinde başta Frechet, Hausdorff olmak üzere birçok matematikçi ortaya değişik tanımlar koymuşlardır, fakat matematikçilerin en uygun tanım konusunda uzmanlaşmaları uzunca bir süreç sonunda olmuştur. Tabi ki, hepsi standart hale gelecek tanımın; mümkün olduğu kadar geniş anlam içeren, çeşitli özel (istisnai) durumlar için matematikteki diğer kavramlar (öklid uzayı-sonsuz boyutlu öklid uzayı, fonksiyon uzayları) ile birlikte kullanımına imkan veren örnekler içeren ve bu olumlu yanlarının yanında bu tanımın genelde topolojik uzaylar için öklid ve benzeri uzaylardaki temel teoremleri kavrayabilecek kadar da dar olmasını istiyorlardı. Matematiksel bir ifade için genel tanımın nasıl olacağına karar verebilmek için her zaman bir problem olmuştur. Sonunda genel tanım biraz soyut ifadelerle yapılmıştır. Topolojik yapılar üzerinde çalışmaya devam ederken topolojik uzay kavramını daha iyi bir şekilde anlayabiliriz.

Tanım 1.1: X boş olmayan bir küme ve X in alt kümelerinin bir τ topluluğu verilmiş olsun. Eğer bu topluluk aşağıda verilmiş olan üç aksiyomu sağlıyorsa, τ topluluğuna X kümesi üzerinde bir topolojik yapı yada kısaca τ bir topolojidir diyeceğiz.

[T.1] $\varnothing, X \in \tau$

[T.2] τ nun elemanlarının herhangi bir birleşimi τ ya aittir.

[T.3] τ daki herhangi iki kümenin kesişimi yine τ ya aittir. Bu aksiyomu τ ya ait sonlu sayıda elemanın kesişimi yine τ ya aittir olarak genişletilebilir.

τ kümeler topluluğu X üzerinde bir topoloji ise, (X, τ) sıralı ikilisine bir topolojik uzay denir.

Eğer herhangi bir karışıklığa yol açmayacaksa bu sıralı ikili yerine, X topolojik uzayı terimini kullanılır.

Tanım 1.2: τ topolojisini içeren bir X topolojik uzayında, X in bir U alt kümesi $U \subset \tau$ olacak şekilde τ topluluğuna ait ise; U ya X in açık kümesi denir. Bu terminolojiye dayanarak;

Bir topolojik uzay, X kümesi ve X in açık kümelerinden oluşan ve içinde Ø ve X i içeren bir topluluktan ibarettir.

Ek olarak üstteki tanım sayesinde, açık kümelerin birleşimlerinin ve sonlu sayıda kesişimlerinin de açık olduğunu söylenebilir.

Tanım 1.3: Herhangi bir X kümesi alalım. X in kuvvet kümesi X üzerinde bir topoloji oluşturuyorsa buna Ayrık (Discrete) Topoloji denir. Bu topoloji maksimum sayıda açık küme içeren topolojidir.

Eğer X üzerindeki topoloji sadece Ø ve X den oluşuyorsa, buna Ayırtmaz(Indiscrete) Topoloji denir. Bu topoloji de açıkça görüleceği gibi en az sayıda açık küme içeren topoloji olur.

Tanım 1.4: τ sınıfı boş küme ile tümleyenleri sonlu olan X in tüm alt kümelerinden oluşsun. Yani $\tau = \{A \subset X : A = \varnothing$ ya da $\widetilde{A}$ sonludur$\}$ olsun. Bu τ sınıfı X üzerinde bir topoloji olup, buna sonlu tümleyen topolojisi denir.

τ kümeler ailesinin topoloji aksiyomlarını sağladığını gösterelim;

[T.1] X ve Ø, τ nun elemanlıdır. Çünkü X-X sonludur, X-Ø de X in kendisidir.

[T.2] τ nun boştan farklı kümeleri $\{U_\alpha\}$ sınıfı olmak üzere indekslersek $\bigcup U_\alpha$ şeklindeki birleşim τ içinde kalacaktır. Bu durumda

$$X - \bigcup U_\alpha = \bigcap (X - U_\alpha) \tag{1.1}$$

dır. Burada, $\forall U \in X$ için $X - U$ ların sonlu olduğunu belirttiğimizden dolayı yazabildik. (1.1) denkleminde $X - U_\alpha$ lar $(\alpha = 1,2,3,...)$ için sınırlıdır.

[T.3] Eğer U_α lar $(\alpha = 1,2,3,...)$, τ nun Ø tan farklı alt kümeleri ise bu kümelerin kesişimi de τ nun elemanı olur. Yani;

$$\bigcap U_\alpha \in \tau \tag{1.2}$$

olmaktadır. O halde

$$X - \bigcap U_\alpha = \bigcup (X - U_\alpha) \tag{1.3}$$

dır. Sağ tarafta birleşimde yer alan her $X - U_\alpha$ kümesi sonlu olduğundan bu kümelerin birleşimi de sonludur.

Tanım 1.5: Verilen bir X kümesi üzerinde τ ve τ' şeklinde iki tane topoloji olduğunu varsayalım.

Eğer, τ da açık olan her küme τ' topolojisinde açık ise yani $\tau \subset \tau'$ ise τ topolojisi τ' den daha kabadır ya da τ' topolojisi τ den daha incedir denir.

Eğer, τ topolojisi τ' den hem daha ince hem de daha kaba ise, yani $\tau \subset \tau'$ ve $\tau' \subset \tau$ oluyorsa, o zaman bu iki topoloji eşittir denir ve $\tau = \tau'$ yazılır.

Son olarak, $\tau \subset \tau'$ ve $\tau \neq \tau'$ ise, τ topolojisi τ' den kesinlikle daha kabadır ya da τ' topolojisi τ dan kesinlikle daha incedir denir.

Örnek 1.1: $X = \{a, b\}$ ve $\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$ ile $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ olsun.

τ_1 ve τ_2 aileleri X üzerinde iki topolojidir.

Fakat $\tau_1 \not\subset \tau_2$ ve $\tau_2 \not\subset \tau_1$ durumunda olduklarından τ_1, τ_2 topolojileri '$\subset$' bağıntısına göre karşılaştırılamaz.

Tanım 1.6: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan bir U açık kümesinin her N üst kümesine; A kümesinin komşuluğu denir. Yani,

$$N : A \subset X \text{ in bir komşuluğu} \Leftrightarrow \exists U \subset X \ni A \subset U \subset N \tag{1.4}$$

Eğer $A = \{x\}$ ise, bu durumda

$$N : x \in X \text{ noktasının bir komşuluğu} \Leftrightarrow \exists U \subset X \ni x \in U \subset N \tag{1.5}$$

Herhangi bir $x \in X$ noktasının bütün komşuluklar ailesini N(x) ile gösterelim, yani;

$$N(x) = \{N \in P(X) : N, \text{ x in komşuluğu } \} \tag{1.6}$$

dir.

Benzer şekilde (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$\text{A kümesi açıktır} \Leftrightarrow \forall x \in A \text{ için } \exists N_x \in N(x) \ni x \in N_x \subset A \tag{1.7}$$

Teorem 1.1: (X,τ) bir topolojik uzay ve $N(x)$, $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi olsun. Bu durumda $N(x)$ komşuluk aksiyomları denilen aşağıdaki özellikleri sağlar:

N_1) $N(x)$ ailesine ait her küme x noktasını içerir, yani $\forall N \in N(x)$ için $x \in N$ dır.

N_2) $N(x)$ ailesine ait herhangi bir kümenin her üst kümesi de $N(x)$ e aittir, yani $N \in N(x)$ ve $N \subset M$ ise, $M \in N(x)$ dır.

N_3) $N(x)$ ailesine ait sonlu sayıdaki her elemanın ara kesiti de yine $N(x)$ e ait olur yani; $N_1, N_2, ..., N_n \in N(x)$ için, $\bigcap_{i=1}^{n} N_i \in N(x)$ dır.

N_4) Her $N \in N(x)$ için $U \subset N$ olacak şekilde öyle bir $U \in N(x)$ vardır ki her $y \in U$ için $N \in N(y)$ dır. Yani N, x noktasına yeteri kadar yakın noktalarında komşuluğudur.

İspat: Önce ilk aksiyom ile başlayalım

N_1) $\forall N \in N(x) \Rightarrow \exists U_x \in \tau \ni x \in U_x \subset N \Rightarrow x \in N$. Ayrıca $N \neq \varnothing$ dır.

N_2) $N \in N(x)$ herhangi bir küme ve $N \subset M$ olsun.

$$N \in N(x) \Leftrightarrow \exists U_x \in \tau \ni x \in U_x \subset N \tag{1.8}$$

dır. $N \subset M$ olduğundan $x \in U_x \subset M$ dır. O halde

$$M \in N(x) \tag{1.9}$$

dır.

N_3) $N_1, N_2, ..., N_n \in N(x)$ olsun. Bu durumda

$N_1 \in N(x) \Rightarrow \exists U_1 \in \tau \ni x \in U_1 \subset N_1$

$N_2 \in N(x) \Rightarrow \exists U_2 \in \tau \ni x \in U_2 \subset N_2$

....

$N_n \in N(x) \Rightarrow \exists U_n \in \tau \ni x \in U_n \subset N_n$

yazılır. $i = 1,2,....,n$ için $x \in U_i \subset N_i$ olduğundan

$$x \in U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} N_i = N \tag{1.10}$$

olur. Topolojinin [T.2] özelliğinden $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$ olduğundan

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i \in N(x) \tag{1.11}$$

dır.

N_4) $\forall N \in N(x)$ komşuluğu için $x \in U \subset N$ olacak şekilde X in bir U açık kümesi vardır. Tanım 1.6'daki komşuluk tanımından U, x noktasının açık bir komşuluğudur. O halde $U \in N(x)$ dır. Yine Tanım 1.6'dan, N nin U içindeki her noktanın komşuluğu olduğu ifade edilmişti. O halde $\forall y \in U$ için

$$N \in N(y) \tag{1.12}$$

dır. Böylece N(x) komşuluklar ailesinin belirtilen dört aksiyomu da sağladığını gösterdik

Örnek 1.2: $\tau = \{\varnothing, X\}$ ailesi X üzerinde ayırtmaz topoloji olsun. Her $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi

$$N(x) = \{X\} \tag{1.13}$$

dır.

Örnek 1.3: Seçilen bir $X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde tanımlanmış τ topolojisini ele alalım. $\tau=\{\varnothing,X,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$. Bu topoloji üzerindeki "e" ve "c" noktalarının komşuluklarını bulalım.

"e" noktasını içinde bulunduran açık komşuluklar X ve {a,b,e} dir. Ayrıca "e" noktasını içeren {a,b,e} açık kümesinin üst kümeleri ise {a,b,c,e}, {a,b,d,e} ve X dır. Diğer taraftan "e" yi içeren X açık kümesinin üst kümesi kendisidir.

O halde, "e" nin komşuluklar ailesi

$$N(e)=\{\{a,b,e\},\{a,b,c,e\},\{a,b,d,e),X\} \tag{1.14}$$

dır.

"c" noktasını içinde bulunduran açık komşuluklar X, {a,c,d} ve {a,b,c,d} dır. Ayrıca "c" noktasını içeren {a,c,d} açık kümesini kapsayan üst kümeler X ve {a,b,c,d} nın dışında sadece {a,c,d,e} kümesi olur.

O halde, "c" nin bu topolojideki komşuluklar ailesini aşağıdaki gibi gösteririz;

$$N(c)=\{\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,c,d,e\},X\} \tag{1.15}$$

dır.

Tanım 1.7: (X,τ) bir topolojik uzay ve $E(x)\subset N(x)$ bir alt aile olsun. $N(x)$ in her N elemanı için $E\subset N$ olacak şekilde bir $E\in E(x)$ varsa, $E(x)$ ailesine, X üzerindeki topolojiye göre, x noktasının komşuluklar tabanı (yerel taban) denir.

Tanım 1.8: Bir topolojik uzayda, açık alt kümelerin tümleyen kümelerine kapalı kümeler denir ya da bir topolojik uzayda yer alan bir F alt kümesinin tümleyeni açık ise, F kümesi kapalıdır denir. Topolojik uzaylarda her alt kümenin ya kapalı ya da açık olması gerekmez, açık ya da kapalı olmayan alt kümelerde vardır.

Tıpkı açık kümelerde olduğu gibi, tümleyenleri bir F kapalı kümeler sınıfının elemanı olan X in altkümelerinin sınıfi τ olmak üzere; τ topluluğu X üzerinde bir topoloji tanımlar. Buradan da anladığımız gibi bir topoloji tanımlarken açık kümelerden yararlanabileceğimiz gibi kapalı kümeleri de baz alabiliriz.

Tanım 1.9: X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer, bir $x \in A$ noktası, A tarafından kapsanan açık bir G kümesine ait ise, yani;

$$x \in G \subset A \tag{1.16}$$

ise, x noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

A nın iç noktalarının kümesine A nın içi denir ve $\overset{\circ}{A}$ ile göstereceğiz.

Eğer, A kümesi açık bir küme ise o taktirde;

$$A = \overset{\circ}{A} \tag{1.17}$$

dır.

Tanım 1.10: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\widetilde{A}$ tümleyen kümesinin bir iç noktasına A nın bir dış noktası denir.

A nın bütün dış noktalarının kümesine A nın dışı denir ve $(\widetilde{A})^{\circ}$ veya dış(A) ile göstereceğiz.

Tanım 1.11: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin içine ve dışına ait olmayan noktaların kümesine A nın sınırı denir.

Diğer bir tanımla, $x \in X$ noktasının istenildiği kadar küçük bir komşuluğu alındığında, bu komşuluk içinde hem A nın içine hem de A nın dışına ait noktalar bulunuyorsa, x noktasına A nın bir sınır noktası denir ve bütün sınır noktalarının kümesi

$$\partial A = \{x \in X : x \notin \overset{\circ}{A} \text{ ve } x \notin \widetilde{A}\} \tag{1.18}$$

ile gösterilir.

Örnek 1.4: X={a,b,c,d,e} kümesi üzerindeki topoloji
$\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ ve $A = \{b,c,d\} \subset X$ bir altkümesi olsun. A nın içini, dışını ve sınırlarını bulalım.

Bu topolojiye göre A altkümesinin kapsadığı en geniş açık küme {c,d} olduğundan

$$\overset{\circ}{A} = \{c,d\} \tag{1.19}$$

dır.

$\overset{\circ}{\widetilde{A}} = ?$ bulalım.

$$A = \{b,c,d\} \Rightarrow \widetilde{A} = \{a,e\} \tag{1.20}$$

dır.

Bu topolojiye göre $\widetilde{A}$ nin kapsadığı en geniş açık küme $\{a\}$olduğundan

$$\overset{\circ}{\widetilde{A}} = \{a\} \tag{1.21}$$

dır.

A kümesinin sınırı, A nın içine ve dışına ait olmayan noktaların kümesi olarak tanımlandığından;

$$\partial A = \{x \in X : x \notin \overset{\circ}{A} \text{ ve } x \notin \overset{\circ}{\widetilde{A}}\} = \{b,e\} \tag{1.22}$$

olur.

Tanım 1.12: (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının her komşuluğunda A nın en az bir elemanı varsa, x noktasına A nın bir değme noktası denir. Yani

$$(x \in X, A \text{ nın değme noktası.}) \Leftrightarrow \forall N \in N(x) \text{ için } N \cap A \neq \varnothing. \tag{1.23}$$

Bu tanıma göre A nın bütün elemanları A nın değme noktasıdır.

Tanım 1.13: (X,τ) bir topolojik uzay olarak seçilsin, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının her komşuluğunda A nın x den farklı en az bir noktası varsa, x noktasına A nın bir yığılma (limit) noktası denir.

A nın bütün yığılma noktalarının kümesine A nın türetilmiş kümesi denir ve (A') ile göstereceğiz. Yani;

$$x \in G \in \tau \Rightarrow A \cap (G - \{x\}) \neq \varnothing \text{ ise } x \in A' \tag{1.24}$$

dır.

Önemli bir not, yığılma noktası her zaman A nın bir elemanı olmak zorunda değildir.

Tanım 1.14: (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın tüm kapalı üst kümelerinin, yani A yı kapsayan bütün kapalı kümelerin, kesişimine A nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile göstereceğiz.

Bu tanımdan da anlaşılacağı gibi, A nın kapanışı, A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye eşittir.

Eğer A kümesi kapalı bir küme ise;

$$\overline{A} = A \tag{1.25}$$

olacaktır.

Tanım 1.15: (X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ verilsin. Eğer $A \subset \overline{B}$ ise B kümesi A içinde yoğundur denir. Eğer özel olarak $\overline{B} = X$ ise, B kümesine *X in yoğun bir alt kümesi* denir. B, X içinde her yerde yoğundur.

Tanım 1.16: (X,τ) bir topolojik uzay ve β da X in açık altkümelerinin bir topluluğu olarak alınsın. Yani $\beta \subset \tau$ olsun. Eğer τ sınıfının her elemanı β nın elemanlarının bir birleşimi ise, β ya τ topolojisi için bir tabandır denir. Bu β altkümeler topluluğunun özellikleri aşağıda sunulmuştur;

(1) $\forall x \in X$ için $x \in B \subset \beta$ olur. Yani X in her elemanı en az bir taban elemanına aittir.

(2) Eğer x, B_1 ve B_2 gibi iki temel elemanın kesişimine ait ise, mutlaka x i içeren ve $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ şartını sağlayan $B_3 \in \beta$ vardır.Yani;

$$x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \subset B_1 \cap B_2 \ni x \in B_3 : B_3 \in \beta \tag{1.26}$$

dır. Her topoloji en az bir tabana sahiptir. Yani topolojinin kendisi bir tabandır.

Teorem 1.2: Bir X kümesi alalım ve β, X üzerindeki τ topolojisi için bir taban olacak şekilde seçilsin. Bu durumda τ topolojisi β tabanının bütün elemanlarının bütün birleşimlerinin topluluğuna eşittir.

İspat: β nın elemanlarının herhangi bir topluluğu verildiğinde, taban olma tanımından dolayı bu elemanlar aynı zamanda τ nun da elemanlarıdır. Çünkü τ bir topolojidir ve verilen tabana ait elemanların birleşimi τ nun elemanlarıdır.

Bir $U \in \tau$ kümesi verilsin ve $\forall x \in U$ için $x \in B_x \subset U$ kuralına uygun olarak β nın B_x gibi herhangi bir elemanını seçelim. Bu durumda;

$$U = \bigcup B_x \tag{1.27}$$

olup, β tabanının elemanlarının birleşimine eşittir.

Topolojiler, doğruldukları tabanları ile verildiklerinde, birbirleri arasında yapacağımız karşılaştırmalar için daha kullanışlı ve daha kolay anlaşılır yapıda olurlar. Hangisinin daha ince, hangisinin daha kalın olduğunu anlamamız kolaylaşır.

Tanım 1.17: (X, τ) bir topolojik uzay ve $\varsigma \subset \tau$ olsun. Eğer,

$$\varsigma = \{\beta : \beta, \varsigma \text{ in sonlu sayıdaki elemanının kesişimidir}\} \tag{1.28}$$

şeklinde tanımlı β sınıfı τ için bir taban ise, ς ya τ topolojisi için bir alt-tabandır denir.

2. TOPOLOJİ ELDE ETME METOTLARI

Boştan farklı bir X kümesi üzerinde topolojik yapıların oluşturulması için bir çok metot vardır. Elimizde hiçbir topoloji yokken boştan farklı bir X kümesi üzerine topolojilerin nasıl kurulacağını, tanımlar ve teoremler yardımıyla göstereceğiz. Bunun için bir önceki bölümde verdiğimiz topoloji ve topolojik uzaylar için kullanılan temel kavramlardan faydalanacağız. Bir kümenin açık alt kümelerini bulmak her zaman pek kolay değildir. Herhangi bir kümenin açık kümelerini belirlemek için kullanacağınız herhangi bir kural yoksa, bu kümeleri belirlemeniz imkansızdır.

Burada önceki bölümdeki kavramlardan faydalanarak boştan farklı bir küme üzerine topolojik yapıların nasıl oluşturulabileceğini sırasıyla verelim:

2.1 Komşuluk Özelliklerini Sağlayan Aile ile Topolojik Yapı Oluşturma

Teorem 2.1.1: Boştan farklı bir X kümesinin her $x \in X$ noktası için, komşuluk aksiyomu olarak adlandırılan özellikleri sağlayan $\beta(x)$ ailesi verilmiş olsun. Bu durumda X kümesi üzerinde bir tek τ topolojisi vardır ve bu topolojiye göre $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi $N(x)$, $\beta(x)$ e eşittir.

İspat: $\beta(x)$ den faydalanarak bir τ ailesi tanımlayalım.

$$\tau = \{A \in P(X) : x \in A \text{ ve } A \in \beta(x)\} \tag{2.1}$$

olsun. Bu ailenin topoloji aksiyomlarını sağladığını inceleyelim.

Önce τ ailesinin sonlu kesişim ve keyfi birleşime nazaran kapalı olduğunu gösterelim;

[T.2] Herhangi $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$ oluyor mu?

Birinci komşuluk aksiyomundan dolayı

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing \tag{2.2}$$

olur. Bu kesişime ait bir x elemanı seçelim. Yani

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \tag{2.3}$$

olsun. Kolayca görebiliriz ki her i indisi için

$$x \in A_i \in \beta(x) \tag{2.4}$$

olacaktır.

Üçüncü komşuluk aksiyomundan

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \beta(x) \tag{2.5}$$

bulunur. τ nun tanımından

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau \tag{2.6}$$

dur.

[T.3] $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ $(I \neq \varnothing)$ için $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$?

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \tag{2.7}$$

olarak seçilsin.

Bu seçimize göre x i içeren bir i_0 indisli bir A elemanı mutlaka vardır ve $x \in A_{i_0}$ olur.

$A_{i_0} \in \beta(x)$ ve $A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ olması nedeniyle ve ikinci komşuluk aksiyomundan

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \beta(x) \tag{2.8}$$

bulunur ve τ nun tanımından sonuç olarak

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau \tag{2.9}$$

elde edilir.

[T.1] $\varnothing, X \in \tau$ olduğunu ispatlamalıyız.

Kesişim ve birleşim işlemi tanımlı olduğundan

$$\bigcup_{i\in\varnothing} A_i = \varnothing \tag{2.10}$$

ve

$$\bigcup_{i\in\varnothing} A_i = X \tag{2.11}$$

olur. τ nun tanımından

$$\varnothing, X \in \tau \tag{2.12}$$

bulunur. Böylece τ, X üzerinde bir topolojidir.

Şimdi ise ikinci adıma geçelim.

τ topolojisine göre $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesini N(x) olarak adlandıralım. N(X) = β (x) olduğunu bulmaya çalışacağız. $\forall N \in N(x)$ için

$$\exists U \in \tau \ni x \in U \subset N \tag{2.13}$$

olur $U \in \tau$ ve $x \in U$ olduğundan

$$U \in \beta(x) \tag{2.14}$$

dır. İkinci komşuluk aksiyomundan

$$N \in \beta(x) \tag{2.15}$$

dır.O halde;

$$N(x) \subset \beta(x) \tag{2.16}$$

dir. $\forall A \in \beta(x)$ için

$$W = \{y \in W : A \in \beta(y)\} \tag{2.17}$$

olarak alınsın. W nin tanımından

$$x \in W \tag{2.18}$$

ve

$$W \neq \varnothing \tag{2.19}$$

olur. $\forall y \in W$ için

$$A \in \beta(y) \tag{2.20}$$

olur ve birinci komşuluk aksiyomundan dolayı

$$y \in A \tag{2.21}$$

dır. O halde;

$$W \subset A \tag{2.22}$$

kapsaması bulunur.

Şimdi ise $W \in \tau$ olup olmadığını inceleyelim

W nin açık olduğunu göstermek için W nin her elamanının komşuluğu olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.
Bunu göstermek için aşağıdaki adımları izleyelim;

$A \in \beta(y)$ olduğu için dördüncü komşuluk aksiyomundan $V \subset A$ olacak şekilde $V \in \beta(y)$ bulunabilir.

Öyle ki; $\forall z \in V$ için

$$A \in \beta(z) \tag{2.23}$$

olur. O halde; $z \in A$ olması durumunda W nin tanımından

$$z \in W \tag{2.24}$$

elde edilir. Böylece;

$$V \subset W \tag{2.25}$$

dur.

$$V \in \beta(y) \tag{2.26}$$

olup, ikinci komşuluk aksiyomundan

$$W \in \beta(y) \tag{2.27}$$

dir. Böylece W, içindeki her noktanın komşuluğudur. O halde;

$$W \in \tau \tag{2.28}$$

sonucuna ulaşırız.

Açıklayıcı olarak ifade etmek gerekirse; A, x noktasının komşuluğudur, yani

$$A \in N(x) \tag{2.29}$$

tir. Böylece;

$$N(x) \supset \beta(x) \tag{2.30}$$

tir. Görüldüğü gibi (2.16) ve (2.30) kapsamlarından

$$N(x) = \beta(x) \tag{2.31}$$

olur.

Son olarak τ nin tekliğini gösterelim;

Hipotezde verilen şartları sağlayan bir başka τ' topolojisi var olsun. Tanım 1.6'dan bu iki topolojinin açık kümeleri aynı olduğundan sonuçta bu iki topoloji de aynı çıkar.

Son olarak bu yolla elde edilen topolojinin tek olduğunu da söyleyebiliriz.

Örnek 2.1.1: X≠Ø bir küme ve $\forall x \in X$ için $\beta(x) = \{A \subset X : x \in A\}$ olsun. Kolayca gösterilebilir ki $\beta(x)$ ailesi komşuluk aksiyomlarını sağlar.

O halde Teorem 2.1.1'den dolayı; X üzerinde

$$\tau = \{\, A \in P(X) : \forall x \in A,\ A \in \beta(x) \,\} \tag{2.32}$$

ailesi bir topoloji olup, bu topoloji X üzerindeki ayrık topolojidir. Yani

$$\tau = P(X) \tag{2.33}$$

dir.

Eğer; $\forall x \in X$ için $\beta(x) = \{X\}$ alınırsa bu aile X üzerinde kaba topolojiyi belirtir.Yani

$$\tau = \{\varnothing, X\} \tag{2.34}$$

şeklinde bir topoloji bulunur.

2.2 Kapanış İşlemi ile Topolojik Yapı Oluşturma

Teorem 2.2.1: X≠Ø bir küme ve X in altkümelerinden oluşan ve aşağıda yer alan kapalı kümelerin özelliklerini sağlayan κ ailesi verilmiş olsun. Bu durumda κ ailesini kapalılar ailesi olarak kabul eden X üzerinde bir tek τ topolojisi vardır.

[K.1] $\varnothing, X \in \kappa$ dır.

[K.2] κ nın sonlu sayıdaki elemanının birleşimi yine κ nın elemanıdır.

[K.3] κ nın herhangi sayıdaki elemanın birleşimi yine κ nın elamanıdır.

İspat: $\tau = \{A \subset X : \widetilde{A} \in \kappa\}$ olsun. Bu τ ailesinin bir topoloji olduğunu gösterelim. Bunun için topoloji aksiyomlarını ispatlamalıyız.

[T.1] $\varnothing, X \in \tau$?

Daima $\varnothing \subset X$ olup $\widetilde{\varnothing} = X$ dir. Birinci kapalılık aksiyomuna göre $\widetilde{\varnothing} = X \in \kappa$ olduğundan

$$\varnothing \in \tau \tag{2.35}$$

bulunur.

Diğer taraftan, yine daima $X \subset X$ ve $\widetilde{X} = \varnothing$ dir. Yine birinci kapalılık aksiyomundan dolayı, $\widetilde{X} = \varnothing \in \kappa$ olduğu için

$$X \in \tau \tag{2.36}$$

olur.

[T.2] Herhangi $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$?

$i = 1,2 \ldots n$ ise

$$A_i \in \tau \Leftrightarrow \widetilde{A}_i \in \kappa \tag{2.37}$$

olur. $i = 1,2 \ldots n$ için

$$\widetilde{A}_i \in \kappa \tag{2.38}$$

olduğunu ikinci aksiyomdan elde edebiliriz. Bunlara göre

$$\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{A}_i = (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^C \in \kappa \tag{2.39}$$

olur. τ nun tanımından

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau \tag{2.40}$$

dir.

[T.3] $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$?

$\forall i \in I$ için

$$A_i \in \tau \Leftrightarrow \widetilde{A}_i \in \kappa \tag{2.41}$$

dır. $\forall i \in I$ için

$$\widetilde{A}_i \in \kappa \tag{2.42}$$

olduğundan ve üçüncü aksiyomdan

$$\bigcap_{i\in I} \widetilde{A}_i = (\bigcap_{i\in I} A_i)^c \in \kappa \tag{2.43}$$

olur. τ nun tanımından

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau \tag{2.44}$$

dir.

Böylece bu üç maddenin ispatıyla τ ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğunu ispatlamış olduk.

τ topolojisinin her elemanının açık olması ve kapalı küme tanımından dolayı;

$\forall A \in \tau \Leftrightarrow \forall \widetilde{A}$ kapalıdır.

O halde; τ topolojisine göre κ ailesi kapalıdır.

Şimdi topoloji olduğunu ispat ettiğimiz τ ailesinin tekliğini inceleyelim.

κ ailesini kapalılar ailesi olarak kabul eden X üzerinde başka bir τ' topolojisi olduğunu varsayalım.

Kapalı kümelerin tanımından;

$$\forall A \in \tau \Leftrightarrow \widetilde{A} \in \kappa \tag{2.45}$$

dır. O halde, $A \in \tau'$ olduğu τ' topolojisinin seçiminden dolayı açıkça görülür. Bu durumda;

$$\tau \subset \tau' \tag{2.46}$$

olur.

Ters kapsama için, $\forall B \in \tau'$ için

$$\widetilde{B} \in \kappa \tag{2.47}$$

dır ve

$$B \in \tau$$

bulunur. Bu ise bize

$$\tau' \subset \tau \tag{2.48}$$

olduğunu gösterir.

Sonuç olarak; iki yanlı kapsama bulunduğundan

$$\tau = \tau' \tag{2.49}$$

olur.

Şimdi ise daha önce tanımını verilen sonlu tümleyenler topolojisini kapalı kümeler yardımıyla elde etmeye çalışalım.

Örnek 2.2.1: X≠Ø kümesi, sonsuz çoklukta elemana sahip bir küme ve $\kappa = \{X, K \subset X : K \text{ sonlu}\}$ ailesi verilmiş olsun. Bu durumda κ ailesi kapalı kümelerle ilgili aksiyomları sağlar.

[K.1] $\varnothing \subset X$ ve Ø sonlu olduğundan

$$\varnothing \in \kappa \tag{2.50}$$

dır. κ nın tanımından

$$X \in \kappa \tag{2.51}$$

bulunur.

[K.2] Herhangi $K_1, K_2, ..., K_n \in \kappa$ için $\bigcup_{i=1}^{n} K_i \in \kappa$?

Eğer, $K_1, K_2, ..., K_n$ lerden biri X e eşit ise, diğerleri de X in altkümesi olduğundan

$$\bigcup_{i=1}^{n} K_i = X \tag{2.52}$$

olur. Bu durumda [K.2] den

$$\bigcup_{i=1}^{n} K_i \in \kappa \tag{2.53}$$

dır.

Eğer; X, $(K_1, K_2, ..., K_n)$ lerden hiç birine eşit değil ise,

(i = 1,2,....,n) için K_i sonlu olduğundan $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ de sonlu ve $\bigcup_{i=1}^{n} K_i \subset X$ olduğundan

$$\bigcup_{i=1}^{n} K_i \in \kappa \tag{2.54}$$

bulunur.

[K3.] $\{K_i\}_{i \in I} \subset \kappa$ için $\bigcap_{i \in I} K_i \in \kappa$?

Eğer; $\forall i \in I$ için K_i lerden bir tanesi $\varnothing$ eşit ise,

$$\bigcap_{i \in I} K_i = \varnothing \tag{2.55}$$

olur. Birinci aksiyoma göre

$$\bigcap_{i\in I} K_i \in \kappa \tag{2.56}$$

dir. Ayrıca $\bigcap_{i\in I} K_i = \varnothing$ ise, yine birinci aksiyomdan dolayı

$$\bigcap_{i\in I} K_i \in \kappa \tag{2.57}$$

dır.

Eğer; $\forall i \in I$ için $K_i \neq \varnothing$ ve $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \varnothing$ ise, $\forall i \in I$ için K_i ler sonlu olduğundan kesişimler de sonlu ve X in alt kümesidir. Böylece

$$\bigcap_{i\in I} K_i \in \kappa \tag{2.58}$$

dır.

Sonuç olarak bu kümeler topluluğunun kapalı kümeler ailesi olduğu gösterildi.

Şimdi ise, Teorem 2.2.1'e göre κ ailesini kapalılar ailesi olarak kabul eden topolojiyi yazalım;

$$\tau = \{\varnothing, A \subset X : \widetilde{A} = K \in \kappa, \widetilde{A} \text{ sonlu}\} \tag{2.59}$$

Başta da belirttiğimiz gibi bu topoloji sonlu tümleyenler topolojisidir.

Teorem 2.2.2: Şimdi ise Kuratowski Yöntemi adı verilen bir yöntem sayesinde topolojik yapı belirlemeye çalışalım.

Boş olmayan bir X kümesi verilmiş olsun. X in her A alt kümesine karşılık Kuratowski aksiyomlarını sağlayacak şekilde A nın Kuratowski kapanışı adı verilen bir v(A) altkümesi belirlenmiş olsun. Daha açıkça ifade etmek gerekirse; X kümesinin bütün alt kümelerinin topluluğu P(X) kuvvet kümesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan $v : P(x) \to P(X)$ fonksiyonu verilmiş olsun.

$\forall A, B \in P(x)$ için

[K.1] $v(\varnothing) = \varnothing$,

[K.2] $A \subset v(A)$,

[K.3] $v(A \cup B) = v(A) \cup v(B)$,

[K.4] $v(v(A)) = v(A)$

olsun. O taktirde X kümesi üzerinde

$$\tau' = \{F \subset X \mid v(F) = F\} \tag{2.60}$$

sınıfını ve yalnız bunları kapalı kümeler olarak kbul eden bir tek topolojik yapı vardır. Bu topolojiye göre her A alt kümesinin $\overline{A}$ kapanışı önceden belirlenmiş olan $v(A)$ Kuratowski kapanışına eşittir.

İspat: Öncelikle τ' sınıfının, Teorem 2.2.1 ile tanımlanan kapalı kümeler topluluklarından topoloji oluşturmaya yönelik özellikleri sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

[T.1] Verilen ilk aksiyomdan dolayı $\varnothing \in \tau'$ olduğu görülür. İkinci aksiyomdan yararlanılarak $X \subset v(X)$ çıkar, oysa v nin tanımından dolayı $v(x) \subset X$ olduğu için sonuçta $v(X) = X$ olup $x \in \tau'$ bulunur.

[T.2] $A, B \in \tau'$ ise, üçüncü aksiyomdan dolayı

$$v(A \cup B) = v(A) \cup v(B) = A \cup B \tag{2.61}$$

olur ki bu da

$$A \cup B \in \tau' \tag{2.62}$$

demektir.

[T.3] $\{F_i : i \in I, F_i \in \tau'\}$ sınıfı verilmiş olsun. Bu sınıfın kesişiminin yine τ' ne ait olduğunu göstereceğiz. Bunun için öncelikle aşağıdaki özelliği gösterelim ve bundan yararlanarak aksiyomumuzun ispatını yapalım.

$$L \subset M \Rightarrow V(L) \subset V(M) \tag{2.63}$$

dir. Çünkü $L \subset M \Rightarrow M = L \cup M$ olacağından tanımdaki üçüncü aksiyom gereğince

$$v(M) = v(L \cup M) = v(L) \cup v(M) \tag{2.64}$$

elde edilir. Bu da tanımdan dolayı

$$V(L) \subset V(M) \tag{2.65}$$

demektir.

Şimdi $\forall j \in I$ için $\bigcap_{i \in I} F_i \subset F_j$ olduğu düşünülürse (2.63) ten

$$v(\bigcap_{i \in I} F_i) \subset v(F_j) = F_j \tag{2.66}$$

yazılabilir. $\forall j \in I$ için bu kapsamanın var olması

$$v(\bigcap_{i \in I} F_i) \subset \bigcap_{i \in I} F_i \tag{2.67}$$

olmasını gerektirir. Bu kapsamanın ters yönlüsünü ikinci aksiyomdan yararlanarak görebiliriz. O halde kapsamalar eşitlik haline gelir ve

$$v(\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcap_{i \in I} F_i \tag{2.68}$$

olur. Bu eşitlik (2.60) tanımından dolayı

$$v(\bigcap_{i \in I} F_i) \in \tau' \tag{2.69}$$

olmasını gerektirir. Sonuçta incelediğimiz τ' sınıfı, X kümesi üzerinde bir topolojik yapının kapalı kümeleridir. Bu yapının açık kümeleri ise kapalı kümeler tanımından dolayı $\tau = \{\widetilde{F} : F \in \tau'\}$ olmaktadır.

İspatımızın son bölümünde X in her A alt kümesinin τ topolojisine göre kapanışının verilen v(A) Kuratowski kapanışına eşit olduğunu gösterelim.

tanımda verilen dördüncü aksiyomdan ve (2.60) den her $A \subset X$ için

$$v(A) \in \tau' \tag{2.70}$$

elde edilir. O halde [K.2] ve kapanış tanımından

$$v(A) \in F_A \tag{2.71}$$

dır. Bu da kapanış tanımında yer kesişim eşitliğinden

$$\overline{A} \subset v(A) \tag{2.72}$$

olmasını gerektirir. Karşıt kapsamaya ulaşmak için her $F \in F_A$ için $F = A \cup F$ ve $F \in \tau'$ olduğu göz önüne alınarak [K.3] ten

$$F = v(F) = v(A) \cup v(F) = v(A) \cup F \tag{2.73}$$

yazılabilir. Bu da

$$v(A) \subset \bigcap F_A = \overline{A} \tag{2.74}$$

olmasını gerektirir. O halde

$$\overline{A} = v(A) \tag{2.75}$$

dır.

Örnek 2.2.2: Boş olmayan bir X kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 gibi herhangi iki topolojinin $\tau_1 \cap \tau_2$ kesişimi de X üzerinde bir topolojidir. Topoloji olma kurallarını tek tek ispatlayarak bunu gösterelim.

[T.1] τ_1 ve τ_2 tek tek topoloji olduklarından $\varnothing$ ve X bu iki topolojiye de aittir. Bu yüzden bu kümeler $\tau_1 \cap \tau_2$ e de ait olurlar.

[T.2] $\tau_1 \cap \tau_2$ elemanlarının bir sınıfını $\{G_i : i \in I\}$ şeklinde tanımlayalım. Basitçe görüleceği gibi $\{G_i : i \in I\} \subset \tau_1$ ve $\{G_i : i \in I\} \subset \tau_2$ olup, ikinci topoloji aksiyomundan dolayı $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau_1$ ve $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau_2$ olur. Dolayısıyla

$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau_1 \cap \tau_2 \tag{2.76}$$

olur ve ikinci aksiyomda sağlanır.

[T.3] Eğer $G, H \in \tau_1 \cap \tau_2$ ise kapsama kurallarına göre $G, H \in \tau_1$ ve $G, H \in \tau_2$ olup, üçüncü topoloji aksiyomundan dolayı $G \cap H \in \tau_1$ ve $G \cap H \in \tau_2$ dir. Sonuçta,

$$G \cap H \in \tau_1 \cap \tau_2 \tag{2.77}$$

dir.

Bu örnekte bir küme üzerinde tanımlı iki topolojinin kesişimi sayesinde yine bir topoloji elde ettiğimizi görmüş olduk.

2.3 İç İşlem ile Topolojik Yapı Oluşturma

Teorem 2.3.1: Boş olmayan bir X kümesinin P(X) kuvvet kümesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\beta : P(x) \to P(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun.

$\forall A, B \in P(x)$ için

[I.1] $\beta(X) = X$,

[I.2] $\beta(A) \subset A$,

[I.3] $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$,

[I.4] $A \subset B \Rightarrow \beta(A) \subset \beta(B)$, [I.5] $\beta(A \cap B) = \beta(A) \cap \beta(B)$ olsun.

Bu durumda verilen bir $\tau = \{A \subset X : \beta(A) = A\}$ kümeler sınıfı, X kümesi üzerinde bir topolojidir.

Bu topolojiye göre, $\forall A \subset X$ altkümesinin içi olan $\overset{0}{A}$ kümesi, $\beta(A)$ kümesine eşittir.

İspat: τ ailesinin topoloji olduğunu gösterelim.

[T.1] $\varnothing, X \in \tau$?

$\varnothing \subset X$ ve tanımda verilen [I.2] den

$$\beta(\varnothing) \subset \varnothing \tag{2.78}$$

olur. Diğer taraftan; Ø her kümenin alt kümesi olduğundan

$$\varnothing \subset \beta(\varnothing) \tag{2.79}$$

dur. O halde;

$$\beta(\varnothing) = \varnothing \tag{2.80}$$

dır. τ nun tanımından dolayı $\varnothing \in \tau$ olup, $X \subset X$ ve [I.1] aracılığı ile

$$X \in \tau \tag{2.81}$$

dur.

[T.2] Herhangi $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$?

Eğer; $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \varnothing$ ise, [T.1] den

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau \tag{2.82}$$

dır.

Eğer; $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \varnothing$ ise; i=1,2,.......,n için $A_i \in \tau$ olduğundan

$$\beta(A_i) = A_i \tag{2.83}$$

dır. Buradan;

$$\bigcap_{i=1}^{n} \beta(A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \tag{2.84}$$

elde edilir ve [I.5] kullanılarak;

$$\bigcap_{i=1}^{n} \beta(A_i) = \beta(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \tag{2.85}$$

olup, τ tanımından yaralanarak

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau \tag{2.86}$$

buluruz.

[T.3] $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ için $A = \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$?

A=X ise, topoloji olmanın ilk aksiyomundan

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau \tag{2.87}$$

dır.

$A \neq X$ olsun. $\forall i \in I$ için $A_i \subset A$ ve [I.4] ten dolayı;

$$\beta(A_i) \subset \beta(A) \tag{2.88}$$

olur. $\forall i \in I$ için; $\beta(A_i) \subset \beta(A)$ olduğundan

$$\bigcup_{i\in I}\beta(A_i)\subset\beta(A) \tag{2.89}$$

kapsaması sağlanır.

Yine $\forall i\in I$ için $A_i\in\tau$ olduğundan

$$\beta(A_i)=A_i \tag{2.90}$$

bulunur. O halde;

$$A=\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}\beta(Ai)\subset\beta(A)\Rightarrow A\subset\beta(A) \tag{2.91}$$

elde ederiz. [I.2]den dolayı $\beta(A)\subset A$ olduğuna göre. Böylece;

$$\beta(A)=A \tag{2.92}$$

olur. Yani;

$$\beta(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}A_i \tag{2.93}$$

eşitliği gerçeklenir. Bu eşitlik dolayısıyla aşağıdaki eşitliği de yazabiliriz.

$$\bigcup_{i\in I}A_i\in\tau \tag{2.94}$$

Şimdi ise; $\forall A\subset X$ için $\overset{0}{A}=\beta(A)$ olduğunu gösterelim.

[I.3] maddesinden yararlanarak $\beta(\beta(A))=\beta(A)$ olduğundan

$$\beta(A)\in\tau \tag{2.95}$$

dir. τ tanımından $\beta(A)=A$ ve $\overset{o}{A}=\beta(\overset{o}{A})$ dır. Bu yazılanlara göre $\beta(A)\in\tau$ ve açık kümeler için A=$\overset{0}{A}$ eşitliğinden yararlanırsak;

$$\beta(A)=\beta(\overset{0}{A}) \tag{2.96}$$

yazılabilir. O halde, son adımda;

$$\overset{0}{A} = \beta(A) \tag{2.97}$$

olur.

Tanım 2.3.1: $X \neq \varnothing$ bir küme ve $\beta' \subset P(X)$ alt aile olsun. β' ailesine ait kümelerin herhangi birleşimine eşit olan bütün kümelerin oluşturduğu aileye β' nün ürettiği aile denir ve τ' ile gösterilir. $\beta' \subset \tau'$ olduğu açıkça görülebilir.

Teorem 2.3.2: $X \neq \varnothing$ bir küme ve Tanım 2.3.1'dekine uygun bir τ' ailesi verilmiş olsun. Bu durumda $A \in \tau'$ olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in A$ için $\exists B \in \beta' \ni x \in B \subset A$ olmasıdır.

İspat: $A \in \tau'$ olsun.Bahsi geçen Tanım 2.3.1 den A kümesi β' nün bir alt ailesinin birleşimidir, yani $A = \bigcup_{B \in \theta'} B$, $\theta' \subset \beta'$ dır. Dolayısıyla $\forall x \in A$ için

$$\exists B \in \theta' \ni x \in B \subset A \tag{2.98}$$

dır. Tersine olarak, $\forall x \in A$ için $\exists B_X \in \beta' \ni x \in B_X \subset A$ olsun. $\forall x \in A$ için $x \in B_X$ olduğundan

$$A \subset \bigcup_{x \in A} B_X \tag{2.99}$$

dır. Yine, $\forall x \in A$ için $B_X \subset A$ olduğundan

$$\bigcup_{x \in A} B_X \subset A \tag{2.100}$$

olur. O halde ;

$$A = \bigcup B_X \tag{2.101}$$

ve

$$B_X \in \beta' \tag{2.102}$$

dır. Böylece

$$A \in \tau' \tag{2.103}$$

sonucuna varılır.

Teorem 2.3.3: $X \neq \varnothing$ bir küme ve $\beta' \subset P(X)$ ailesi aşağıdaki şartları sağlasın;

[B.1] $X = \bigcup_{B \in \beta'} B$

[B.2] Herhangi $B_1, B_2 \in \beta'$ ve $\forall p \in B_1 \cap B_2$ için $\exists B_p \in \beta' \ni p \in B_p \subset B_1 \cap B_2$ dır.

Bu durumda β' ailesi X kümesi üzerinde bir τ' topolojisini üretir.

İspat: $\tau' = \{\bigcup_{B \in \theta} B : \theta' \subset \beta'\}$ şeklinde tanımlanan τ' ailesinin topoloji aksiyomlarını sağladığını gösterelim;

$t_1)\varnothing, X \in \tau'$?

β' ailesinde birleşim işlemi tanımlı olduğundan

$$\bigcup_{B \in \varnothing} B = \varnothing \tag{2.104}$$

olur. O halde;

$$\varnothing \in \tau' \tag{2.105}$$

dir. Ayrıca; yukarıda verilen [B.1] özelliğinden

$$X \in \tau' \tag{2.106}$$

dir.

t_2) İspatı herhangi $A_1, A_2 \in \tau'$ için yapalım. Sonlu sayıdaki τ' elemanının bunu sağladığı tümevarımla kolayca gösterilebilir.

$A_1, A_2 \in \tau'$ için $A_1 \bigcap A_2 \in \tau'$?

$$A_1 \in \tau' \Rightarrow \exists \theta_1 \subset \beta' \ni A_1 = \bigcup_{B_1 \in \theta_1} B_1 \tag{2.107}$$

ve

$$A_2 \in \tau' \Rightarrow \exists \theta_2 \subset \beta' \ni A_2 = \bigcup_{B_2 \in \theta_2} B_2 \tag{2.108}$$

olur. Bunlara dayanarak aşağıdakileri yazabiliriz;

$$A_1 \bigcap A_2 = (\bigcup_{B_1 \in \theta_1} B_1) \bigcap (\bigcup_{B_2 \in \theta_2} B_2) = \bigcup_{B_1 \in \theta_1} \bigcup_{B_2 \in \theta_2} (B_1 \bigcap B_2) \tag{2.109}$$

dır [B.2] den dolayı

$$B_1 \bigcap B_2 \in \beta' \tag{2.110}$$

olduğundan

$$A_1 \bigcap A_2 \in \tau' \tag{2.111}$$

bulunur.

$t_3) \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau'$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau'$?

$\forall i \in I$ için $A_i \in \tau'$ olması ve τ' tanımından

$$\exists \theta_i \subset \beta' \ni A_i = \bigcup_{B_i \in \theta_i} B_i \tag{2.112}$$

dir. O halde;

$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{B_i \in \theta_i} B_i) = \bigcup_{Bi \in \theta_i} (\bigcup_{i \in I} B_i)$ olduğundan

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau' \tag{2.113}$$

bulunur. Böylece τ' sınıfı X üzerinde bir topolojidir.

Sonuç 2.3.1: Teorem 2.3.3 ve topolojik yapılar için taban tanımlarından β' sınıfı, τ' topolojisi için bir topoloji tabanıdır. Böylece τ' topolojisi, bütün açık kümeleri incelenerek değil, tabana ait daha az sayıda küme incelenerek oluşturulmuş oldu.

Sonuç 2.3.2 : Verilen bir β ailesinin X üzerindeki bir topolojiye taban olması için gerek ve yeter koşul taban olma şartlarını sağlamasıdır.

Sonuç 2.3.3 : β ailesi, Teorem 2.3.3'e göre; X üzerinde bir τ' topolojisini üretir. β ailesi τ' topolojisi için bir taban olur, benzer şekilde ς ailesi ise Tanım 1.17'de yer alan alt-taban tanımından kolayca görüleceği gibi τ' için bir alt tabandır.

Tanım 2.3.2 : $\varsigma \subset P(X)$ ailesini alt taban kabul eden τ' topolojisine, ς nin ürettiği topoloji denir.

Sonuç 2.3.4 : τ' topolojisi X üzerinde ς yi kapsayan topolojilerin en kabası (en az eleman içereni) dır.

İspat : X üzerinde ς yi kapsayan bütün topolojiler ailesi $\{\tau_i\}_{i\in I}$ olsun.

$\tau(\varsigma) = \bigcap_{i\in I} \tau_i$ yi ele alalım. $\tau(\varsigma)$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. τ' nün oluşumundan $\varsigma \subset \tau'$ ve dolayısıyla

$$\tau(\varsigma) \subset \tau' \tag{2.114}$$

dır. Diğer taraftan her $W \in \tau'$ için τ' nün tanımından;

$$W = \bigcup_{B_i \in \theta'} \Big(\bigcap_{A_i \in \varphi} A_i \Big), \theta' \subset \beta \tag{2.115}$$

$(\varphi' \subset \varsigma$ sonlu) şeklinde yazılabilir. Hipotezden; $\varsigma \subset \tau(\varsigma)$ olmasından

$$A_i \in \tau(\varsigma) \tag{2.116}$$

dır. $\tau(\varsigma)$ topoloji olduğundan ikinci topoloji aksiyomu olan [T.2] den

$$\bigcap_{A_i \in \varphi} A_i \in \tau(\varsigma) \tag{2.117}$$

ve

$$\bigcup_{B_i \in \theta'} \left(\bigcap_{A_i \in \varphi'} A_i \right) \in \tau(\varsigma) \tag{2.118}$$

olur. O halde;

$$\tau' \subset \tau(\varsigma) \tag{2.119}$$

bulunur. Böylece;

$$\tau' = \tau(\varsigma) \tag{2.120}$$

eşitliğini buluruz.

Sonuç olarak, ς yi kapsayan X üzerindeki topolojilerin en kabası (en az eleman içeren topoloji) ς nin ürettiği topolojidir. Gerçekten; $\forall i \in I$ için

$$\tau' \subset \tau_i \tag{2.121}$$

dır.

Yukarıdaki teorem ve sonuçları, elemanlarının birleşimi X kümesini veren P(X) in bir alt ailesinin, X üzerindeki bir tek topoloji için bir alt taban olduğunu gösterir.

Örnek 2.3.1 : X={a,b} ve ς={X} olsun. X üzerindeki ς nin ürettiği topolojiyi bulalım ve X üzerindeki diğer topolojilerle karşılaştıralım.

Çözüm: ς nın elemanlarının birleşimi X i verdiğinden ς, X üzerindeki bir topoloji için bir alt-taban olabilir.

ς nin elemanlarının her sonlu kesişimlerinin kümesi

$$\beta = \{X\} \tag{2.122}$$

dir. β nın elemanlarının herhangi birleşimlerinin oluşturduğu $\tau=\{\varnothing,X\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. X üzerinde ς i kapsayan;

$\tau_1=\{\varnothing,X,\{a\}\}$ ve $\tau_2=\{\varnothing,X,\{b\}\}$ topolojileri τ dan daha incedir. Yani;

$$\tau\subset\tau_1,\tau\subset\tau_2 \tag{2.123}$$

sonucuna varırız.

Örnek 2.3.2: X={a,b,c,d,e} ve $\varsigma=\{\{a,b,c\},\{c,d\},\{d,e\}\}\subset P(X)$ olsun. X üzerinde ς nın ürettiği topolojiyi bulalım.

Çözüm: Önce ς nın elemanlarının birleşiminin X i verdiğine bakalım. $\{a,b,c\}\cup\{c,d\}\cup\{d,e\}=\{a,b,c,d,e\}=X$ olduğundan ς, X üzerinde bir topoloji üretir diyebiliriz. Gerçekten; ς nun elemanlarının her sonlu kesişimlerinin oluşturduğu β ailesini bulalım.

$$\beta=\{\bigcap_{A\in\varphi}A:\varphi\subset\varsigma \text{ sonlu}\} \tag{2.124}$$

olduğundan

$$\{a,b,c\}\cap\{a,b,c\}=\{a,b,c\}, \tag{2.125}$$

$$\{c,d\}\cap\{c,d\}=\{c,d\}, \tag{2.126}$$

$$\{d,e\}\cap\{d,e\}=\{d,e\} \tag{2.127}$$

$$\{a,b,c\}\cap\{c,d\}=\{c\}, \tag{2.128}$$

$$\{a,b,c\}\cap\{d,e\}=\varnothing, \tag{2.129}$$

$$\{c,d\}\cap\{d,e\}=\{d\}, \tag{2.130}$$

$$\{a,b,c\}\cap\{c,d\}\cap\{d,e\}=\varnothing \tag{2.131}$$

Sonuçları bulunur. Ayrıca, ς ailesinin boş alt ailesi üzerinden sonlu kesişimleri de X i verir.

Böylece;

$$\beta = \{\{a,b,c\},\{c,d\},\{d,e\},\{c\},\{d\},\varnothing,X\} \tag{2.132}$$

ailesi bulunur. β nın elemanlarının herhangi bir birleşimlerinin oluşturduğu

$$\tau = \{\bigcup_{B\in\theta} B : \theta \subset \beta\} \tag{2.133}$$

ailesinin

$$\tau = \{\varnothing,X,\{a,b,c,d\},\{c,d,e\},\{a,b,c\},\{c,d\},\{d,e\},\{c\},\{d\}\} = \tau(\varsigma) \tag{2.134}$$

olduğu kolayca bulunur.

Son olarak; bu τ ailesinin topoloji olduğu ispat edilebilir. Sonuçta;

τ, ς tarafından doğrulan bir topolojidir.

3. TOPOLOJİK YAPILARI KULLANARAK YENİ TOPOLOJİLER ELDE ETMEK

Bu bölümde, bundan önceki bölümden farklı olarak, verilmiş topolojik yapılardan faydalanarak yeni topolojik yapılar oluşturacağız. Bunu yaparken ihtiyaç duyacağımız kavramları ilgili yerde ifade edeceğiz. Topolojik yapılardan faydalanarak oluşturulan topolojilerin önceki bölümde verilen topolojiye ait temel kavramları sağladığı da gösterilecektir.

3.1 Topolojik Alt Uzay

Teorem 3.1.1: (X,τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda seçilecek bir $\tau_A = \{U' = A \cap U : U \in \tau\}$ ailesi, A kümesi üzerinde bir topoloji veya topolojik yapıdır.

İspat:

t_1) $A, \varnothing \in \tau_A$?

$X \in \tau$ ve $A \cap X = A$ olduğundan

$$A \in \tau_A \tag{3.1}$$

dır.

$\varnothing \in \tau$ ve $A \cap \varnothing = \varnothing$ olduğundan

$$\varnothing \in \tau_A \tag{3.2}$$

dır.

t_2) herhangi $\{U'_i\}_{i \in j} \subset \tau_A$ için $\bigcap_{i \in J} U'_i \in \tau \in \tau$?

Eğer; $\bigcap_{i \in J} U'_i = \varnothing$ ise birinci aksiyomdan

$$\bigcap_{i\in J} U'_i \in \tau_A \tag{3.3}$$

dır.

Eğer; $\bigcap_{i\in J} U'_i = \varnothing$ ise $\forall i \in J$ ve $U'_i \in \tau_A$ için $U'_i = A \cap U_i$ olacak şekilde $U_i \in \tau$ vardır. $\forall i \in J$ için $U'_i = A \cap U_i$ olduğundan

$$\bigcap_{i\in J} U'_i = \bigcap_{i\in J}(A \cap U_i) = A \cap (\bigcap_{i\in J} U_i) \tag{3.4}$$

dır. τ nun topoloji ve $\bigcap_{i\in J} U_i \in \tau$ olmasından

$$\bigcap_{i\in J} U_i \in \tau_A \tag{3.5}$$

dır.

t_3) Herhangi $\{U'_i\}_{i\in I} \subset \tau_A$ için $\bigcup_{i\in I} U'_i \in \tau_A$?

Eğer; $\bigcup_{i\in I} U'_i = A$ ise, ilk topoloji aksiyomundan dolayı

$$\bigcap_{i\in I} U'_i \in \tau_A \tag{3.6}$$

dır.

Eğer; $\bigcup_{i\in I} U'_i \neq A$ olsun. $\forall i \in I$ ve $U_i \in \tau_A$ için $U'_i = A \cap U_i$ olacak şekilde $U_i \in \tau$ vardır. $\forall i \in I$ için $U'_i = A \cap U_i$ olduğundan

$$\bigcup_{i\in I} U'_i = \bigcup_{i\in I}(A \cap U_i) = A \cap (\bigcup_{i\in I} U_i) \tag{3.7}$$

dır.

τ nun topoloji olması ve $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$ olmasından

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_A \tag{3.8}$$

dır. O halde τ_A, A üzerinde bir topolojidir.

Tanım 3.1.1: A kümesi üzerinde Teorem 3.1.1 ile τ tarafından oluşturulan τ_A topolojisine τ topolojisinden indirgenen (rölatif) topoloji, (A, τ_A) topolojik uzayına da (X, τ) topolojik uzayının alt uzayı denir. Bu uzayın açık kümeleri, X in açık kümelerinin A ile ilgili tüm kesişimlerini içerir.

Örnek 3.1.1: X={a,b,c,d,e} şeklinde bir X kümesi seçelim, X üzerindeki topoloji $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$ ve X in bir alt kümesi olan A kümesi de $A = \{a,c,e\} \subset X$ şeklinde olsun. A kümesi üzerindeki τ_A topolojisini bulalım.

Çözüm: $\tau_A = \{U' = A \cap U : U \in \tau\}$ olduğundan, τ_A nın elemanları

$$A \cap X = A, \tag{3.9}$$

$$A \cap \{a\} = \{a\}, \tag{3.10}$$

$$A \cap \{a,c,d\} = \{a,c\}, \tag{3.11}$$

$$A \cap \{a,b,e\} = \{a,e\}, \tag{3.12}$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \tag{3.13}$$

$$A \cap \{a,b\} = \{a\}, \tag{3.14}$$

$$A \cap \{a,b,c,d\} = \{a,c\} \tag{3.15}$$

dır. O halde;

$$\tau_A = \{\varnothing, A, \{a\}, \{a,c\}, \{a,e\}\} \tag{3.16}$$

dır. Kolayca gösterilebilir ki τ_A, A üzerinde bir topolojidir.

{a,c} ve {a,e} kümeleri τ_A topolojisine göre açık olmasına rağmen τ ya göre açık olmadığına dikkat edilmelidir.

τ_A ya göre herhangi bir açığın, τ ya göre açık olması için A nın τ ya göre açık olması gerekir. Gerçekten;

$$\forall U \in \tau \text{ için } A \cap U \Rightarrow U' \in \tau_A \tag{3.17}$$

dır. Özel olarak; U=X alınırsa,

$$A \cap X = A \in \tau \tag{3.18}$$

olur. Bunun tersi de doğrudur, yani;

$$A \in \tau \text{ ise, } A \cap U = U' \in \tau \tag{3.19}$$

$A, U \in \tau$ olduğundan topoloji olmanın [T.2] aksiyomundan

$$A \cap U = U' \in \tau \tag{3.20}$$

elde edilir.

Örnek 3.1.2: (R, τ) alışılmış topolojik uzay, $I = [0,1] \subset R$ ve τ_1, I üzerindeki indirgenmiş topoloji olsun. Bu durumda I nın alt kümeleri olan $(\frac{1}{2},1]$, $(\frac{2}{8},\frac{1}{2})$, $(0,\frac{1}{2}]$ kümeleri τ_1 ye göre açık altkümeleri midir?

Çözüm: $(\frac{1}{2},1] = I \cap (\frac{1}{2},2)$ ve $(\frac{1}{2},1) \in \tau$ olması nedeniyle

$$(\frac{1}{2},1] \in \tau_1 \tag{3.21}$$

dır.

$(\frac{2}{8},\frac{1}{2}) = I \cap (\frac{2}{8},\frac{1}{2})$ ve $(\frac{2}{8},\frac{1}{2}) \in \tau$ olması nedeniyle,

$$(\frac{2}{8},\frac{1}{2}) \in \tau_1 \tag{3.22}$$

dır.

I ile arakesiti $(0,\frac{1}{2}]$ olacak şekilde τ alışılmış topolojisinde hiçbir açık olmadığından

$$(0,\frac{1}{2}] \notin \tau_1 \tag{3.23}$$

dır.

Teorem 3.1.2: (X,τ) bir topolojik uzay ve (A,τ_A), X in alt uzayı olsun. Bu durumda $K' \subset A$ alt kümesinin τ_A ya göre kapalı olması için gerek ve yeter şart $K \subset X$ altkümesi τ ya göre kapalı olmak üzere $K' = A \cap K$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: $K' \subset A$ altkümesi τ_A ya göre kapalı olarak seçilsin. Tanım 1.7'de belirttiğimiz kapalı küme tanımından dolayı $\widetilde{K}' = A - K'$ kümesi τ_A ya göre açıktır. τ_A nın tanımından

$$\exists U \in \tau \ \ni \ \widetilde{K}' = A \cap U \tag{3.24}$$

dır. Bu eşitliğin tekrar A ya göre tümleyeni alınırsa,

$$K' = (A \cap U)^c_A = A^c_A \cup U^c_A = \varnothing \cup (A \cap U^c_X) = A \cap U^c_X \tag{3.25}$$

olur. U^c_X kümesi kapalı olduğundan

$$K = U^c_X \tag{3.26}$$

alınabilir. O halde;

$$K' = A \cap K \tag{3.27}$$

olur. Tersine olarak ;

$K \subset X$ alt kümesi τ ya göre kapalı olmak üzere $K' = A \cap K$ olsun. K' nün τ_A ya göre kapalı olduğunu göstermek için; $K'^c_A = A - K'$ kümesinin τ_A ya göre açık olduğunu gösterelim:

$$K' = A \cap K \Rightarrow K'^c_A = (A \cap K)^c_A = A^c_A \cup K^c_A = \varnothing \cup (A \cap K^c_X) = A \cap K^c_X \quad (3.28)$$

$K^c_X \subset X$, τ ya göre açık olması ve Teorem 3.1.1 den dolayı $K'^c_X \in \tau_A$ ya göre açıktır.

O halde ;

K', τ_A ya göre kapalıdır.

Örnek 3.1.3: X={a,b,c,d,e} kümesi üzerinde seçilen bir topoloji aşağıdaki şekilde olsun. $\tau=\{\varnothing, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$ ve X in bir alt kümesi olarak A={a,c,e} seçilsin. A kümesi üzerindeki τ_A topolojisine göre A nın kapalılarını bulalım.

τ nun kapalılar ailesi

$$\kappa=\{X, \varnothing, \{b,c,d,e\}, \{c,d,e\}, \{b,e\}, \{e\}, \{c,d\}\} \quad (3.29)$$

dır. τ_A ya göre kapalılar ailesi ise,

$$A \cap X = A, \quad (3.30)$$

$$A \cap \{b,c,d,e\} = \{c,e\}, \quad (3.31)$$

$$A \cap \{b,e\} = \{e\}, \quad (3.32)$$

$$A \cap \{c,d\} = \{c\}, \quad (3.33)$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \quad (3.34)$$

$$A \cap \{c,d,e\} = \{c,e\}, \quad (3.35)$$

$$A \cap \{e\} = \{e\} \quad (3.36)$$

dır. Bunlardan yararlanarak

$$\kappa_A = \{A, \varnothing, \{c,e\}, \{e\}, \{c\}\} \qquad (3.37)$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.3: (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset B \subset X$ ve (A,τ_A), (B,τ_B) X in alt uzayları olsun. Bu durumda τ_B topolojisinin A üzerine koyduğu $(\tau_A)_B$ topolojisi, τ_A topolojisi ile aynıdır.

İspat:

$$(\tau_B)_A = \{A \cap (B \cap U) : U \in \tau\} = \{A \cap U : U \in \tau\} = \tau_A \qquad (3.38)$$

olduğu basitçe görülür.

Tanım 3.1.2: (X,τ) topolojik uzayına ait bir özellik, bu uzayın bütün alt uzaylarında var ise, bu özelliğe kalıtsal özellik denir.

Teorem 3.1.4: (X,τ) bir topolojik uzay, $N(x)$; $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi ve (A,τ_A) da X in alt uzayı olsun. Bu durumda her $x \in A$ noktasının (A,τ_A) alt uzayına göre $N_A(x) = \{N_A = N \cap A : N \in N(x)\}$ komşuluklar ailesi, komşuluk aksiyomlarının sağlar.

İspat: $N_A(x)$ ailesinin $x \in A$ noktasının komşuluk aksiyomlarının sağladığını göstermek için komşuluk aksiyomlarını gerçeklediğini göstermek yeterlidir.

[N.1] $\forall N_A \in N_A(x)$ için $N_A = A \cap N$ ve $x \in A$ ve $x \in N$ olmasından

$$x \in N_A \qquad (3.39)$$

dır.

[N.2] $\forall N_A \in N_A(x)$ ve $N_A \subset M$ olsun. $N_A \in N_A(x)$ olması komşuluk tanımından

$$\exists U_A \in \tau_A \ni U_A \subset N_A \qquad (3.40)$$

dır.

$N_A \subset M$ ve $U_A \subset N_A \subset M$ den ise aşağıdaki durum elde edilir.

$$M \in N_A(x) \tag{3.41}$$

dır.

[N.3] Herhangi $N_A, N'_A \in N_A(x)$ alalım.

$$N_A \in N_A(x) \Rightarrow \exists U_A \in \tau_A \ni U_A \subset N_A \tag{3.42}$$

ve

$$N'_A \in N_A(x) \Rightarrow \exists U'_A \in \tau_A \ni U'_A \subset N'_A \tag{3.43}$$

olur. [T.2] den $U'_A \cap U_A \in \tau_A$ ve $U'_A \cap U_A \subset N_A \cap N'_A$ olmasından

s

$$N_A \cap N'_A \in N_A(x) \tag{3.44}$$

dır.

[N.4] $\forall N_A \in N_A(x)$ için $x \in U_A \subset N_A$ olacak şekilde $U_A \in \tau_A$ açık kümesi vardır. Buna göre Tanım 1.6'da yer alan komşuluk tanımından U_A içindeki her noktanın komşuluğudur, yani; $\forall y \in U_A$ için $U_A \in N_A(y)$ olmaktadır. $U_A \subset N_A$ olması ve [N.2] maddesinden dolayı

$$N_A \in N_A(y) \tag{3.45}$$

dır.

(A, τ_A) bir topolojik uzay olduğundan A nın boştan farklı herhangi bir B alt kümesine değme noktası, yığılma noktası, kapanış noktası, iç noktası, dış noktası tanımlanabilir. Hatta B nin kapanış içi, dışı, sınırı, yoğun olması, hiçbir yerde yoğun olmaması da tanımlanabilir.

Teorem 3.1.5: (X, τ) bir topoloji k uzay, (A, τ_A) alt uzay ve $B \subset A$ olsun. B nin τ ya göre kapanışı $\overline{B}_X$, τ_A ya göre $\overline{B}_A$ olmak üzere $\overline{B}_A = A \cap \overline{B}_X$ şeklinde ifade edilebilir.

İspat: $\forall x \in \overline{B}_A$ olsun. x noktası, B kümesinin τ_A ya göre bir değme noktası olduğundan

$\forall N_A \in N_A(x)$ için

$$B \cap N_A \neq \varnothing \tag{3.46}$$

dır. Teorem 3.1.4'ten dolayı $N_A = A \cap N$ olduğundan

$$x \in A \cap N \tag{3.47}$$

dır. O halde ;

$$(A \cap N) \cap B = N \cap (A \cap B) = N \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{B}_X \tag{3.48}$$

ve $x \in A$ olmasından

$$x \in A \cap \overline{B}_X \tag{3.49}$$

Bulunur. Böylece

$$\overline{B}_A \subset A \cap \overline{B}_X \tag{3.50}$$

olur. Tersine olarak $\forall x \in A \cap \overline{B}_X$ olsun. Bu durumda $x \in A$ ve $\forall x \in \overline{B}_X$ dır. B nin τ ya göre değme noktası tanımından $\forall x \in N \in N(x)$ için

$$N \cap B \neq \varnothing \tag{3.51}$$

dır. Buradan

$$(N \cap B) \cap A = (N \cap A) \cap B = N_A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{B}_A \tag{3.52}$$

bulunur. Böylece

$$A \cap \overline{B}_X \subset \overline{B}_A \tag{3.53}$$

(3.50) ve (3.53) den

$$\overline{B}_A = A \cap \overline{B}_X \tag{3.54}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.6: (X,τ) bir topolojik uzay, (A,τ_A) alt uzay ve β, τ için bir taban olsun. Bu durumda $\beta_A = \{B_A = A \cap B : B \in \beta\}$ ailesi, τ_A için bir tabandır.

İspat: $\forall U' \in \tau_A$ için $U' = U \cap A$ olacak şekilde $U \in \tau$ olması ve β ailesi τ için bir taban olduğundan

$$\exists \theta \subset \beta \text{ alt ailesi } \ni U = \bigcup_{B \in \theta} B \tag{3.55}$$

dır. Buradan

$$U' = U \cap A = \bigcup_{B \in \theta} B \cap A = \bigcup_{B \in \theta} (B \cap A) = \bigcup_{B_A \in \theta_A} B_A \tag{3.56}$$

($\theta_A \subset \beta_A$) bulunur. O halde τ_A nın her bir elemanı β_A nın elemanlarının bazı birleşimleri şeklinde yazılmaktadır. Böylece β_A, τ_A için bir tabandır.

Ayrıca, β_A ailesinin (b_1) ve (b_2) özelliklerini sağladığı kolayca gösterilebilir.

X uzayı ve A alt uzayı üzerinde işlem yaparken alt açık küme kavramını kullanırken dikkat etmemiz gerekir. Burada bahsi geçen açık kümenin X e mi yoksa A ya mı ait olduğu karıştırılmamalıdır.

Eğer, X in A alt uzayı için Y de açık olan bir U kümesi, aynı zamanda Y nin topolojisine ait ise bu durum bize U nun, Y nin bir alt kümesi olduğunu gösterir.

Eğer U kümesi X in herhangi bir topolojsine ait ise o zaman U kümesi X de açıktır denir.

Özel bir durumda ise; Y üzerinde açık olan her küme X üzerinde de açıktır.

Örnek 3.1.4: X={a,b,c,d,e} kümesi üzerindeki topoloji $\tau=\{\varnothing,X,\{a,b,c,d\},\{c,d,e\},\{a,b,c\},\{c,d\},\{d,e\},\{c\},\{d\}\}$ bu topoloji için β tabanı $\beta=\{\varnothing,X,\{a,b,c\},\{c,d\},\{d,e\},\{c\},\{d\}\}$ ve $A=\{a,c,d\}\subset X$ olsun. A üzerindeki τ_A topolojisini bulalım.

$\beta_A=\{B_A=A\cap B:B\in\beta\}$ olacaktır. Elemanlarını oluşturalım;

$$A\cap\varnothing=\varnothing, \tag{3.57}$$

$$A\cap\{a,b,c\}=\{a,c\}, \tag{3.58}$$

$$A\cap\{d,e\}=\{d\}, \tag{3.59}$$

$$A\cap\{d\}=\{d\}, \tag{3.60}$$

$$A\cap X=A, \tag{3.61}$$

$$A\cap\{c,d\}=\{c,d\}, \tag{3.62}$$

$$A\cap\{c\}=\{c\} \tag{3.63}$$

olacağından sonuçta;

$$\beta_A=\{\varnothing,A,\{a,c\},\{c,d\},\{c\},\{d\}\} \tag{3.64}$$

elde edilir. Şimdi bu kümenin taban olma kurallarını sağladığını gösterelim.

b_1) $A=\bigcup_{B_A\in\beta_A} B_A$ olduğu açıktır.

b_2) β_A ya ait herhangi iki elemanın arakesitinin kapsadığı eleman da yine β_A ya ait olur. Örneğin;

$\{a,c\},\{c,d\}\in\beta_A$ için

$$\{a,c\}\cap\{c,d\}=\{c\}\in\beta_A \tag{3.65}$$

dır. O halde bu bilgilere dayanarak

$$\tau_A=\{\varnothing, A, \{a,c\}, \{c,d\}, \{c\}, \{d\}\} \qquad (3.66)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3.1.7: (X,τ) bir topolojik uzay, (A,τ_A) alt uzay ve ς, τ için bir alt taban olsun. Bu durumda $\varsigma_A=\{ V_A = A\cap V : V\in \varsigma \}$ ailesi τ_A için bir alt tabandır.

İspat: ς ailesi τ topolojisi için bir alt taban olduğundan Tanım 1.17'deki alt-taban tanımından $\beta = \bigcap_{V\in\varphi} V : \varphi \subset \varsigma$ sonlu ailesi τ için bir tabandır. O halde $\forall U \in \tau$ için

$$\exists \theta \subset \beta \ni U = \bigcup_{B\in\theta} B = \bigcup_{B\in\theta} \bigcap_{V\in\varphi} V \qquad (3.67)$$

dır. Diğer taraftan τ_A nın tanımından

$$U \cap A \in \tau_A \qquad (3.68)$$

dır. O halde

$$U\cap A = \bigcup_{B\in\theta} \bigcup_{V\in\varphi} V\cap A = \bigcup_{B\in\theta} \bigcup_{V\in\varphi} (V\cap A) = \bigcup_{B_A\in\theta_A} \bigcup_{V_A\in\varphi_A} V_A, \qquad (3.69)$$

$(\varphi_A \subset \varsigma_A$ sonlu$, \theta_A \subset \beta_A)$ olur. Böylece τ_A ya ait elemanlar ς_A nın elemanlarının sonlu kesişimlerinin birleşimi olarak yazılmaktadır.

ς_A, τ_A için bir alt tabandır.

Örnek 3.1.5: (R,τ) alışılmış topolojik uzay, $0 < a$, $b > 1$ olmak üzere seçilen ς topluluğu, $\varsigma = \{(-\infty,b),(a,+\infty): a,b\in R\}$ τ nun bir alt tabanı ve $A=[0,1]\subset R$ olsun. Bu durumda A üzerindeki τ_A topolojisi için bir alt tabanı bulalım.

$\varsigma_A = \{V_A = A\cap V : V\in\varsigma\}$ olduğundan

$$A\cap (a,+\infty=(a,1],\ a\in R,\ 0\le a<1 \qquad (3.70)$$

$$A\cap (-\infty,b)=[0,b),\ b\in R,\ 0<b\le 1 \qquad (3.71)$$

olup, bunlardan yararlanarak ς_A aşağıdaki şekilde olur;

$$\varsigma_A=\{[0,b),(a,b]:a,b\in R \text{ ve } 0\leq a<1, 0<b\leq\} \tag{3.72}$$

Kolayca gösterilebilir ki; ς_A, τ_A için bir alt tabandır.

3.2 Fonksiyonlarla Oluşturulan Topolojik Yapılar

Fonksiyonlarla topolojik yapıların nasıl oluşturulduklarını vermeden önce, topolojinin temel kavramlarından biri olan süreklilik ve süreklilikle ilgili bazı temel özellikler vereceğiz.

Bir fonksiyonun sürekliliği, bu fonksiyonun grafiğinin hiç kesintiye uğramadan devam ettiğini ifade eder. Çeşitli kaynaklarda süreklilik tanımını değişik şekilde verilmektedir. Metrik uzaylarda geçerli olan bir noktada süreklilik tanımını bir anlamda topolojik uzaylara genelleştireceğimiz için noktada süreklilik tanımı ile başlayacağız.

Tanım 3.2.1: (X,τ) ve (Y,τ') herhangi iki topolojik uzay, $f:X\to Y$ bir fonksiyon ve $x_0\in X$ olsun. Eğer; $f(x_0)$ içeren Y deki her N' komşuluğu için X de x_0 içeren bir N komşuluğu var ve $\ni f(N)\subset N'$ ise, f fonksiyonunu x_0 noktasında sürekli(notasal sürekli) denir, Yani;

$$F,\ x_0\in X \text{da sürekli} \Leftrightarrow \forall\ N'\in N(f(x_0)) \text{ için } \exists N\in N(x_0)\ni f(N)\subset N \tag{3.73}$$

Teorem 3.2.1: (X,τ) ve (Y,τ') herhangi iki topolojik uzay $f:X\to Y$ bir fonksiyon ve $x_0\in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i. f fonksiyonu $x_0\in X$ noktasında sürekli,

ii. $\forall\ N'\in N(f(x_0))$ için $\exists N\in N(x_0)\ni \forall x\in N\Rightarrow f(x)\in N$ dır,

iii. $\forall\ N'\in N(f(x_0))$ için $\exists N\in N(x_0)\ni N\subset f^{-1}(N)$ dır,

iv. $\forall\ N'\in N(f(x_0))$ için $f^{-1}(N)\in N(x_0)$ dır,

v. $\forall E' \in E(f(x_o))$ için $f^{-1}(E') \in N(x_o)$ dır.

İspat: $i \Rightarrow ii$ olduğu Tanım 3.2.1'de yer alan süreklilik tanımından açıktır.Gerçekten;

$\forall N' \in N(f(x_0))$ için $\exists N \in N(x_o) \ni f(N) \subset N'$ yerine

$$\forall N' \in N(f(x_0)) \text{ için } \exists N \in N(x_o) \ni \forall x \in N \Rightarrow f(x) \in N' \tag{3.73}$$

yazılır.

$ii \Rightarrow iii$ olduğu $f^{-1}(N)$ ters görüntü tanımından açıktır.

$iii \Rightarrow iv$ olduğu Teorem 1.1'de bahsedilen komşuluk aksiyomlarından (N_2) aksiyomu nedeniyle açıktır. Çünkü;

$N \subset f^{-1}(N)$ ve $N \in N(x)$ olması ve (N_2) den dolayı

$$f^{-1}(N) \in N(x_o) \tag{3.74}$$

dır

$iv \Rightarrow v$ komşuluklar tabanı kavramından yararlanarak

$E(f(x_o)) \subset N(f(x_o))$ olması ve $\forall E' \in E(f(x_o))$ için

$$E' \in N(f(x_o)) \tag{3.75}$$

dır. (iv) madde dolayısıyla

$$f^{-1}(E') \in N(x_o) \tag{3.76}$$

olur.

$v \Rightarrow i$ $\forall N' \in N(f(x_0))$ için yine komşuluklar tabanı kavramından yarlanarak

$$\exists E' \in E(f(x_o)) \ni f(x_o) \in E' \subset N' \tag{3.77}$$

yazabiliriz. O halde; (v) den

$$f^{-1}(E') \in N(x_o) \tag{3.78}$$

dır. Özel olarak; N= $f^{-1}(E')$ alınırsa

$$f(N)=f(f^{-1}(E')) \subset E' \subset N' \tag{3.79}$$

elde edilir. Böylece; $\forall N' \in N(f(x_0))$ için

$$\exists N=f^{-1}(E') \in N(x_o) \ni f(N) \subset N' \tag{3.80}$$

dır. Tanım 3.2.1'de anlatılan süreklilik tanımına göre f, x_o da süreklidir.

Örnek 3.2.1: X, bütün tek nokta kümeleri açık olan bir topolojik uzay, Y herhangi bir topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f herhangi bir $x \in X$ noktasında süreklidir. Gerçekten; f(x) i içeren Y nin her A açık alt kümesi veya f(x) in her N' komşuluğu için,

$$x \in f^{-1}(A) \Rightarrow x \in \{x\} \subset f^{-1}(A) \tag{3.81}$$

veya

$$x \in f^{-1}(N') \Rightarrow x \in \{x\} \subset f^{-1}(N') \tag{3.82}$$

ve $\{x\}$ tek nokta kümesi açık olduğundan

$$f^{-1}(A),\ f^{-1}(N') \in N(x) \tag{3.83}$$

dır. Böylece f, x noktasında süreklidir.

Tanım 3.2.2: (X, τ) bir topolojik uzay ve f de X üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu $\forall x \in X$ için sürekli ise, f fonksiyonuna X topolojik uzayında sürekli, diğer bir deyimle düzgün sürekli denir.

Teorem 3.2.2: (X,τ) ve (Y,τ') herhangi iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i. f, X topolojik uzayında sürekli

ii.Y topolojik uzayındaki her açık alt kümenin f altındaki ters görüntüsü X de açıktır, yani $\forall V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ dır.

İspat: $i \Rightarrow ii$ $\forall V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \subset X$ olsun. $\forall x \in f^{-1}(V)$ için

$$f(x) \in V \tag{3.84}$$

dır. V açık olduğundan içindeki her noktanın komşuluğudur. O halde;

$$V \in N(f(x)) \tag{3.85}$$

olur. f in sürekli olması ve üstte ispatlanan Teorem 3.2.1 in iv. özelliğinden dolayı

$$f^{-1}(V) \in N(x) \tag{3.86}$$

dır. Yani; $f^{-1}(V)$ içindeki her noktanın komşuluğudur. O halde; $f^{-1}(V)$ açıktır.

$ii \Rightarrow i$ $\forall V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \in \tau$, $x \in X$ herhangi bir nokta ve $N' \in N(f(x))$ olsun. Bu durumda $f(x) \in V \subset N'$ olacak şekilde $V \in \tau'$ vardır. $f^{-1}(V)$ açık olduğundan

$$f^{-1}(V) \in N(x) \tag{3.87}$$

olacaktır. O halde

$$f(f^{-1}(V)) \subset V \subset N' \tag{3.88}$$

dır. Böylece $x \in X$ keyfi olduğundan f, X topolojik uzayında süreklidir.

Teorem 3.2.3: (X,τ) ve (Y, τ') herhangi iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i. f ,X topolojik uzayında sürekli,

ii.Y deki her K kapalı alt kümesi için $f^{-1}(K)$, X de kapalıdır.

İspat: (i)$\Rightarrow$(ii) Her $K \subset Y$ kapalı alt kümesi için $Y\text{-}K=K^c$ kümesi Y de açık ve f sürekli olmasından $f^{-1}(\widetilde{K})$, X de açıktır.Ayrıca;

$$f^{-1}(\widetilde{K})=(f^{-1}(K))^c \text{ açık} \Rightarrow f^{-1}(K) \text{ kapalı} \tag{3.89}$$

dır.

(ii)$\Rightarrow$(i) $\forall A \subset Y$ açık alt kümesi için A^c, Y de kapalıdır. Hipotezden $f^{-1}(\widetilde{A})$ kümesi X de kapalıdır. Ayrıca;

$$f^{-1}(\widetilde{K})=(f^{-1}(K))^c \text{ kapalı} \Rightarrow f^{-1}(A) \text{ açıktır.} \tag{3.90}$$

Teorem 3.2.2'de verilen sürekli fonksiyonların ters görüntülerin açık olmasını içeren teoremden dolayı f süreklidir.

Örnek 3.2.2: (X,τ) ayrık topolojik uzay, (Y,τ') herhangi bir topolojik uzay ve $f:X\rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunu X topolojik uzayında süreklidir.
Gerçekten;

$\forall V \in \tau'$ açığı için $f^{-1}(V) \subset X$ dır. X in her alt kümesi açık olduğundan

$$f^{-1}(V) \in \tau \tag{3.91}$$

dır.

Teorem 3.2.4:.(X,τ) ve (Y,τ') herhangi iki topolojik uzay, β ile ς aileleri X topolojik uzayının, β ile ς aileleri Y topolojik uzayının sırasıyla taban ve alt tabanları ve $f:X\rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i). f, X topolojik uzayında sürekli

(ii). $\forall A' \in \varsigma$ için $f^{-1}(A') \in \tau$ dır,

(iii). $\forall B' \in \beta$' için $f^{-1}(B') \in \tau$ dır.

İspat : (i) $\Rightarrow$(i) $\varsigma \subset \tau$' olması ve Teorem 3.2.2'den ispat açıktır.

(ii) $\Rightarrow$(iii) $\forall$ $B' \in \beta$' kümesi için ς nün alt taban olmasından

$$B' = \bigcap_{A \in \varphi} A', \varphi' \subset \varsigma \tag{3.92}$$

(φ' sonlu) dır. Hipotezden $\forall$ $A' \in \varphi'$ için $f^{-1}(A') \in \tau$ dır.(t_2) den

$$\bigcap_{A' \in \varphi'} f^{-1}(A') = f^{-1}\left(\bigcap_{A' \in \varphi'} A'\right) = f^{-1}(B') \in \tau \tag{3.93}$$

olur.

(iii)$\Rightarrow$(i) $\forall$ U'$\in \tau$' için β' taban olduğundan

$$U' = \bigcup_{B \in \theta} B, \theta' \subset \beta' \tag{3.94}$$

dır. Hipotezden $\forall$ $B' \in \theta'$ için $f^{-1}(B') \in \tau$ dır. O halde

$$f^{-1}(U') = f^{-1}\left(\bigcup_{B \in \theta} B\right) = \cup f^{-1}(B') \tag{3.95}$$

ve (t_3) den f^{-1} (U') $\in \tau$ dır. Böylece f, X topolojik uzayında süreklidir.

Teorem 3.2.5: f:$(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ sürekli bir fonksiyon ve g:$(Y,\tau')\rightarrow(Z,\tau'')$ süreki bir fonksiyon olsun. Bu durumda gof : $(X,\tau)\rightarrow(Z,\tau^{n})$ bileşke fonsiyonuda süreklidir.

İspat: $\forall$ $A'' \in \tau''$ açık kümesi için g sürekli olduğundan $g^{-1}(A^{n})$, Y de açıktır, f sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(A''))$, X de açıktır.

$(gof)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$ olduğundan

$$f^{-1}(g^{-1}(A'')) = (f^{-1} o g^{-1})(A'') = (gof)^{-1}(A'') \tag{3.96}$$

dır. Teorem 3.2.2'den dolayı gof süreklidir.

Tanım 3.2.3: (X,τ) ve (Y,τ') topolojik uzaylar, (A,τ_A) X in alt uzayı ve $f{:}A\to Y$, $g{:}X\to Y$ fonksiyonları verilmiş olsun X,Y ve A nın topolojik yapıya sahip olmaları gerekli değil. Bu durumda her $x\in A$ için f(x)=g(x) oluyorsa, g fonksiyonuna f nin X e genişlemesi (extension) ve f fonksiyonuna da g nin A ya kısıtlaması denir ve kısıtlama f=g|A şeklinde gösterilir.

Bilindiği gibi bir fonksiyonun sürekliliği topolojik uzaylarda verilen topolojilere bağlıdır. Eğer verilen kümeler üzerinde birden fazla topoloji varsa, sürekliliğin hangi topolojilere göre olduğu açıkça yazılmalıdır.

Teorem 3.2.6: $g:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ fonksiyonu sürekli (τ-τ' sürekli) ve (A,τ_A) alt uzay olsun. Bu durumda $f=g\,|\,A:(A,\tau_A)\to(Y,\tau')$ kısıtlanmış fonksiyonu da sürekli ($\tau_A-\tau'$ sürekli) dir.

İspat: g fonksiyonu sürekli olduğundan, $\forall V\in\tau'$ için

$$g^{-1}(V)\in\tau \tag{3.97}$$

dır. Diğer taraftan; $f^{-1}(V)=(g\,|\,A)^{-1}(V)=g^{-1}(V)\cap A$ olmasından,

$$g^{-1}(V)\cap A\in\tau_A \tag{3.98}$$

bulunur. O halde; $f=g\,|\,A$ kısıtlanmış fonksiyonu sürekli($\tau_A-\tau'$ sürekli) dir.

Tanım 3.2.4: (X,τ) ve (Y,τ') topolojik uzaylar ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. X in her açık alt kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü Y de açık ise, f ye açık fonksiyon ve X in her kapalı alt kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü Y de kapalı ise, f ye kapalı fonksiyon denir.

Tanım 3.2.5: (X,τ) ve (Y,τ') topolojik uzaylar ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu sürekli ve tersi f^{-1} var ve f^{-1} de sürekli ise, f ye bir homeomorfizm veya topolojik dönüşüm denir. Eğer X ile Y uzayları arasında bir homeomorfizm varsa, X ve Y topolojik uzaylarına homeomorf(topolojik denk) uzaylar denir.

Tanım 3.2.6 : Topolojik uzaylarda homeomorfizm altında değişmeyen (korunan) özelliklere topolojik özellik (topolojik invaryant) denir.

Sonuç 3.2.1: (X,τ) ve (Y,τ') topolojik uzaylar, $f:X \to Y$ bir homeomorfizm ve $f(A)=B$ olmak üzere (A,τ_A) ve (B,τ_B) alt uzayları olsun. Bu durumda $f|A:(A,\tau_A) \to (B,\tau'_B)$ kısıtlanmış fonksiyonu bir homeomorfizmdir.

İspat: f bire-bir ve örten olduğundan $f|A$ da bire-bir ve örtendir. Gerçekten; $\forall x,y \in A$ için $(f|A)(x)=(f|A)(y)$ olsun. $\forall x \in A$ için $(f|A(x)=f(x)$ olması Tanım 3.2.3'te açıklanan bir fonksiyonun kısıtlaması tanımından ve f nin bire-bir olmasından

$$(f|A)(x)=(f|A)(y)=f(x)=f(y) \Rightarrow x=y \tag{3.99}$$

dır. $f|A$ nın örten olması hipotezde verilmişti. Diğer taraftan f nin sürekli olması $f|A$ kısıtlamasının sürekli olmasını verir. Teorem 3.2.6'da açıklanan kısıtlanmış fonksiyonun sürekliliği ve f^{-1} in sürekli olmasından $f^{-1}|B$ nin sürekli olmasını verir. Böylece $f|A$ bir homeomorfizmdir.

Tanım 3.2.7: (X,d) ve (Y,d') metrik uzaylar ve $f:X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer; $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ sayısı $\ni \forall x,y \in X, d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x),g(y)) < \varepsilon$ ise, f fonksiyonuna düzgün sürekli denir.

Sonuç 3.2.2: Düzgün sürekli bir fonksiyon süreklidir, ancak bu ifadenin tersi doğru değildir.

Örnek 3.2.3: (X,d) metrik uzay ve $\forall x,y \in X$ için $d(f(x),f(y))=d(x,y)$ şartını sağlayan her $f:X \to X$ fonksiyonu düzgün süreklidir. Gerçekten; $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x,y \in X$ için $d(x,y) < \delta$ olduğunda durumda $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \varepsilon$ sayısı bulunabilir. Dolayısıyla;

$\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x,y \in X$ için $d(x,y) < \delta$ olduğundan $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$ olur ki bu da f nin düzgün sürekli olması demektir.

Şimdi geldiğimiz noktadan tekrar bu bölümün başlığına geri dönecek olursak, mevcut topolojilerden faydalanarak yeni topolojik yapıların oluşturulmasında artık fonksiyonlardan faydalanabiliriz. Çünkü süreklilik ve sürekli fonksiyonların temel bazı özelliklerini artık biliyoruz.

Teorem 3.2.7: $X \neq \varnothing$ herhangi bir küme, (Y, τ') bir topolojik uzay, $f : X \to Y$ bir fonksiyon ve $\{f^1(V) : V \in \tau'\} = \tau^* \subset P(X)$ ailesi verilmiş olsun. Bu durumda τ^* ailesi f fonksiyonunu sürekli kılan X üzerindeki en kaba yapılı topolojidir.

İspat: Önce gösterelim ki $\tau^* = \{f^1(V) : V \in \tau'\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

t_1) $\varnothing, X \in \tau^*$?

$\varnothing \in \tau'$ ve $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ olduğundan

$$\varnothing \in \tau^* \tag{3.100}$$

dır

$Y \in \tau'$ ve $f^{-1} / Y = X$ olduğundan

$$X \in \tau^* \tag{3.101}$$

dır.

t_2) Herhangi $\{W_i\}_{i \in J} \subset \tau^*$ (J sonlu) için $\bigcap_{i \in J} W_i \in \tau^*$?

$\forall i \in J$ için $W_i \in \tau^*$ olduğundan $W_i = f^{-1}(V_i)$ olacak şekilde $V_i \in \tau'$ vardır. O halde; $\forall i \in J$ için $W_i = f^{-1}(V_i)$ olduğundan

$$\bigcap_{i \in J} W_i = \bigcap_{i \in J} f^{-1}(V_i) = f^{-1}(\bigcap_{i \in J} V_i) \tag{3.102}$$

dır. (t_2) özelliğinden $\bigcap_{i \in J} V_i \in \tau'$ olmasından

$$\bigcap_{i \in J} W_i \in \tau^* \tag{3.103}$$

bulunur.

t_3) $\{W_i\}_{i \in I} \subset \tau^*$ için $\bigcup_{i \in I} W_i \in \tau^*$?

$\forall i \in I$ için $W_i \in \tau^*$ olduğundan $W_i = f^{-1}(V_i)$ olacak şekilde $V_i \in \tau'$ vardır. O halde; $\forall i \in I$ için $W_I = f^{-1}(V_i)$ olduğundan

$$\bigcup_{i\in I} W_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} V_i) \tag{3.104}$$

olur. (t_3) özelliğinden $\bigcup_{i\in I} V_i \in \tau'$ olmasından

$$\bigcup_{i\in I} W_i \in \tau^* \tag{3.105}$$

bulunur. O halde; τ^* X üzerinde bir topolojidir. Diğer taraftan her $V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \in \tau^*$ olmasından Teorem 3.2.2'den f fonksiyonu bu topolojiye göre süreklidir. Son olarak gösterelim ki; f fonksiyonunun sürekli kılan X üzerindeki en kaba yapılı topoloji τ^* dır.

Kabul edelim ki, X kümesi üzerinde τ^* dan başka f fonksiyonunu sürekli kılan topoloji τ olsun. Bu durumda ; $f:(X,\tau') \to (Y,\tau')$ sürekli olmasında $\forall V \in \tau'$ için

$$f^{-1}(V) \tag{3.106}$$

dır. τ^* ın elemanlarının oluşumundan $\forall f^{-1}(V) \in \tau^*$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ olduğundan

$$\tau^* \subset \tau \tag{3.107}$$

dır. O halde; τ^*, f fonksiyonunu sürekli kılan en kaba yapılı topolojidir.

Tanım 3.2.8: $X \neq \varnothing$ herhangi bir küme, $\{(Y_i,\tau_i) : i \in I$ topolojik uzaylar ailesi ve $\forall i \in I$ için $f_i : X \to Y_i$ fonksiyonu verilmiş olsun. X kümesi üzerindeki topolojik yapılar arasında $\{f_i : i \in I\}$ fonksiyonlarından her birini sürekli kılan en kaba topolojiye τ^* diyelim. Bu τ^* topolojisine $\{\tau_i : \dot{I} \in I\}$ topolojiler ailesinin, $\{f_i : i \in I\}$ fonksiyonlarına göre, başlangıç (izdüşel) topoloji, (X,τ^*) uzayına da $\{(Y_i,\tau_i) : i \in I\}$ uzaylarının $\{f_i : i \in I\}$ fonsiyonlarına göre başlangıç (izdüşel) uzayı denir.

Teorem 3.2.8: $(X,\tau^*),\{(Y_i,\tau_i):\dot{I}\in I\}$ uzaylarının $\{f_i : i\in I\}$ fonksiyonlarına göre başlangıç uzayı olsun. Bu durumda ;

$\varsigma=\{f_i^{-1}(V_i):\exists i\in I$ için $\{V_i\in\tau_i\}$ ailesi τ^* için bir alt tabandır.

İspat: $\varsigma=\{\{f_i^{-1}(V_i):\exists i\in I$ için $V_i\in\tau_i$ ailesinin bütün sonlu ara kesitlerinden oluşan

$\beta=\{\{\bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} f_{i_\alpha}^{-1}(V_i)\} : f_{i_\alpha}^{-1}(V_i)\in\varsigma\}$ ailesinin taban olma şartları olan (b_1) ve (b_2) yi sağlar. O halde; Teorem 2.3.2'den β ailesinin taban, ς ailesinin de alt taban olduğu X üzerinde bir topoloji vardır. Bu topolojiye T diyelim.

Teorem 3.2.4'ün (ii) aksiyomundan

$$\varsigma\subset\tau^* \tag{3.108}$$

dır. Bu da Teorem 3.2.7'den

$$T\subset\tau^* \tag{3.109}$$

olması demektir. Diğer taraftan $\{f_i : i\in I\}$ fonksiyonları X üzerinde T topolojisine göre sürekli olması ve Teorem 3.2.7'den

$$\tau^*\subset T \tag{3.110}$$

dir. O halde

$$\tau^*=T \tag{3.111}$$

dır. Böylece ς, τ^* için bir alt tabandır.

Sonuç 3.2.3: $\{X,\tau^*\}\{\{Y_i,\tau_i)i\in I$ uzaylarının $\{f_i : i\in I\}$ fonksiyonlarına göre başlangıç uzay ve $\forall i\in I$ için β_i,τ_i topolojileri için taban olmak üzere

$\varsigma'=\{A=f^{-1}{}_i(B_i):\exists i\in I$ için $B_i\in\beta_i\}$ ailesi τ^* için bir alt tabandır.

İspat: ς' nün tanımından

$$\varsigma' \subset \varsigma \tag{3.112}$$

dır. O halde; ς' nün alt taban olarak X üzerinde ürettiği τ' topolojisi τ^* dan daha ince değildir. Yani

$$\tau' \subset \tau^* \tag{3.113}$$

dır. Diğer taraftan $\forall B_i \in \beta_i$ için

$$f_i^{-1}(B_i) \in \varsigma \subset \tau'(i \in I) \tag{3.114}$$

olması Teorem 3.2.4 ün (iii) aksiyomundan f_i fonksiyonları τ' topolojisine göre süreklidir Teorem 3.2.7'den dolayı

$$\tau^* \subset \tau' \tag{3.115}$$

dır. O halde

$$\tau^* = \tau' \tag{3.116}$$

dır ve böylece ς', τ^* için bir alt tabandır.

Teorem 3.2.9: $X = \varnothing$ herhangi bir küme, (Y, τ') bir topolojik uzay, $f : Y \to X$ bir fonksiyon ve $\{W \subset X : f^{-1}(W) \in \tau'\} = \tau_* \subset P(X)$ ailesi verilmiş olsun. Bu durumda τ_* ailesi fonksiyonunu sürekli kılan X üzerindeki en ince yapılı topoloji sonuç topoloji, tümel topolojidir.

İspat:

$t_1)\ \varnothing, X \in \tau_*?$

$f^{1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau'$ olduğundan

$$\varnothing \in \tau_* \tag{3.117}$$

dır.

$f^{-1}(X) = Y \in \tau'$ olduğundan

$$X \in \tau. \tag{3.118}$$

dır.

t_2) Herhangi $\{W_i\}_{i\in J} \subset \tau.$ (J sonlu) için $\bigcap_{i\in J} W_i \in \tau.?$

$\forall i \in J$ için $W_i \in \tau.$ olduğundan

$$f^1(W_i) \in \tau' \tag{3.119}$$

dır. τ' topoloji olduğundan τ' ya ait elemanların herhangi sonlu sayıdaki elemanlarının ara kesiti yine τ' ye aittir, yani $\forall i \in J$ için

$$f^1(W_i) \in \tau' \Rightarrow \bigcap_{i\in J} f^{-1}(W_i) = f^1(W_i) = f^1(\bigcap_{i\in j} W_i) \in \tau' \tag{3.120}$$

dır. O halde;

$$\bigcap_{i\in J} W_i \in \tau. \tag{3.121}$$

bulunur.

t_3) Herhangi $\{W_i)_{i\in I} \subset \tau.$ için $\bigcup_{i\in I} W_i \in \tau.?$

$\forall i \in I$ için $W_i \in \tau.$ olduğundan

$$f^1(W_i) \in \tau' \tag{3.122}$$

dır. τ' topoloji olduğundan, τ' ye ait elemanların keyfi birleşimleri de τ' ye aittir, yani $\forall i \in I$ için

$$f^1(W_i) \in \tau' \Rightarrow \bigcup_{i\in I} f^{-1}(W_i) = f^1(\bigcup_{i\in I} W_i) \in \tau' \tag{3.123}$$

dır. O halde ;

$$\bigcup_{i\in I} W_i \in \tau_* \qquad (3.124)$$

bulunur. Böylece; τ_* ailesi X üzerinde bir topolojidir.

Diğer taraftan; $\forall W \in \tau_*$ için $f^{1}(W) \in \tau'$ olması Teorem 3.2.2'den f fonksiyonu bu topolojiye göre süreklidir.

Son olarak gösterelim ki f fonksiyonunun sürekli kılan en ince yapılı topoloji τ_* dır.

Kabul edelim ki X kümesi üzerinde τ_* dan başka f fonksiyonunu sürekli kılan herhangi bir topoloji τ olsun. Bu durumda ;

$f:(Y,\tau') \to (X,\tau)$ olması ve $\forall W \in \tau$ için $f^{1}(W) \in \tau'$dır. $W \in \tau_*$ olduğu için de

$$\tau \subset \tau_* \qquad (3.125)$$

dır. O halde; τ_*, f fonksiyonunu sürekli kılan en ince yapılı topolojidir.

Tanım 3.2.9: $X \neq \varnothing$ herhangi bir küme, $\{(Y_i,\tau_i): i \in I\}$ topolojik uzaylar ailesi ve $\forall i \in I$ için $f_i : Y_i \to X$ fonksiyonları verilmiş olsun. X kümesi üzerindeki topolojik yapılar arasında $\{f_i : i \in I\}$ fonksiyonlarından her birini sürekli kılan topolojilerin en ince yapılısına τ_* diyelim Bu τ_* topolojisine $\{\tau_i i \in I\}$ topolojiler ailesinin, $\{f_i : i \in I\}$ fonksiyonlarına göre sonuç topoloji ve (X,τ_*) uzayına da $\{(Y_i,\tau_i): i \in I\}$ topolojik uzaylarının $\{f_i : i \in I\}$ fonksiyonlarına göre sonuç uzayı denir.

Örnek 3.2.4: $X = \{a,b,c\}$ bir küme, $Y = \{1,2,3\}$, $\tau = \{\varnothing, Y, \{1\}, \{2,3\}\}$ Y üzerinde bir topoloji $f: Y \to X$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun.

f(1)=b, f(2)=c, f(3)=b

Bu durumda f yi sürekli kılan X üzerindeki topolojiyi bulalım.

Çözüm: $X = \{a, b, c\}$ kümesinin $\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ alt kümelerinin f fonksiyonu altındaki ters görüntülerin τ da olanların kümesini yazalım.

$$f^{1}(\varnothing) = \varnothing, \tag{3.126}$$

$$f^{1}(X) = Y, \tag{3.127}$$

$$f^{1}(\{a\}\} = \varnothing, \tag{3.128}$$

$$f^{1}(\{b\}) = \{1,3\}, \tag{3.129}$$

$$f^{1}(\{c\}) = \{2\}, \tag{3.130}$$

$$f^{1}(\{a, b\}) = \{1,3\}, \tag{3.131}$$

$$f^{1}(\{b, c\}) = Y, \tag{3.132}$$

$$f^{1}(\{a, c\}) = \{2\} \tag{3.133}$$

olduğuna göre

$$\tau_{*} = \{W \subset X : f^{1}(W) \in \tau'\} = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\} \tag{3.134}$$

olarak bulunur. Bu τ_{*} ailesi X üzerinde bir topolojidir.

3.3 Kartezyen Çarpım Uzayları

Tanım 3.3.1: $I \neq \varnothing$ bir indis kümesi olmak üzere, $\forall i \in I$ için $X_i \neq \varnothing$ kümelerinin kartezyen çarpımı

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : f(i) = f_i \in X_i, \forall i \in I\} \tag{3.135}$$

şeklinde yazılır. Burada f_i, f nin i. koordinatı, X_i ise, X in i. çarpım kümesidir.

Eğer I indis kümesi sonlu ise, yani i = {1,2,...,n} ise, kartezyen çarpım

$$X=\prod_{i=1}^{n} X_i \tag{3.136}$$

olup, her bir $f \in \prod_{i=1}^{n} X_i$ elemanı f=x alınırsa, bilinen sıralı n-lidir.Yani $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ dır. Böylece

$$X=\prod_{i=1}^{n} X_i = \{\{x_1, x_2, ..., x_n)x_i \in X_i, i=1,2,....,n\} \tag{3.137}$$

dır. Eğer, I=N ise, kartezyen çarpım

$$X= X=\prod_{i=1}^{\infty} X_i = \{\{x_1, x_2, x_3, ...): x_i \in X_i\ ,\ i=1,2,3....\} \tag{3.138}$$

olur. Eğer, $\forall i \in I$ için $X_i = X$ ise,bu durumda kartezyen çarpım kümesi, I dan X e bütün fonksiyonların kümesi olarak yazılır, yani

$$\prod_{i\in I} X_i = X^I \tag{3.139}$$

dır. Eğer, $A_J \subset X_j$ ise, $\prod_j A_j$ kümesi $\prod_{i\in I} X_i$ kartezyen çarpımının altkümesi olup,

$$\prod_j A_j = \{f : f(i) \in A_j\} \tag{3.140}$$

şeklindedir.

$X=\prod_{i\in I} X_i$ kartezyen çarpımından her bir X_j j. çarpana, j. izdüşüm fonksiyonu diye adlandırılan doğal bir $\prod_j$ fonksiyonu vardır, yani

$$\prod{}_j : X = \prod{}_j : X = \prod_{i\in I} X_i \to X_j\ , x \to \prod{}_j(x) = x_j \tag{3.141}$$

dır. Eğer, $\forall i \in I$ için X_i topolojik uzay, yani (X_i, τ_i) ise, $\prod_{i \in I} X_i$ kartezyen çarpım, topolojik uzaylarının çarpımıdır. Bu çarpım üzerine topolojik yapı koymak istiyoruz. Ancak konunun anlaşılması için önce sonlu kartezyen çarpım da, topolojinin nasıl oluşturulduğunu verelim:

(X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) topolojik uzaylar ve bunların kartezyen çarpım kümesi $X = \prod_{i=1}^{2} X_i = \{\{x_1, x_2\} : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ ve $\prod_i X \to X_i : i = 1,2$ projeksiyonlar olsun. Bu durumda Tanım 3.2.8'de açıklanan başlangıç uzay tanımı ve teorem 3.2.8'de yer alan alt-taban ispatından $\prod_i$ izdüşüm fonksiyonlarının sürekli kılan X üzerindeki en kaba yapılı topolojiyi bulabiliriz, Şöyle ki;

$\mathrm{fl} = \{\prod_i^{-1}(V_i) : V_i \in \tau_i, i = 1,2\} = \{V_1 \times X_2, X_1 \times V_2 : V_1 \in \tau_1, V_2 \in \tau_2\}$ ailesini alalım Bu ailenin elemanlarının her sonlu kesişimin oluşturduğu aile

$$\beta = \{\bigcap_{A \in \varphi} A : \varphi \subset \mathrm{flA} : \text{sonlu}\} = \{(V_1 \times X_2) \cap (X_1 \times V_2) = V_1 \times V_2 : V_1 \in \tau_1, V_2 \in \tau_2\}$$

olsun. β ailesi $(b_1 - b_2)$ şartlarını sağlar. Gerçekten;

b_1) $X = \bigcup_{B \in \beta} B = \bigcup_{V_1 \times V_2 \in \beta} (V_1 \times V_2)$ olduğu açık, çünkü $X_1 \in \tau, X_2 \in \tau_2$ dır.

b_2) Herhangi $V_1 \times V_2$, $v_1 \times v_2 \in \beta$ için $(V_1 \times V_2) \cap (v_1' \times v_2') = (V_1 \cap v_1) \times (V_2 \cap v_2)$ ve (t_2) den $V_1 \cap v_1 \in \tau_1, V_2 \cap v_2 \in \tau_2$ olduğundan

$$(V_1 \times v_1) \cap (V_2 \times v_2) \in \beta \tag{3.142}$$

dır. O halde ; Teorem 2.3.2'den

$$\tau = \{\bigcup_{B \in \theta} B : \theta \subset \beta\} = \{\bigcup_{V_1 \times V_2 \in \theta} (V_1 \times V_2) : \theta \subset \beta\} \tag{3.143}$$

ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye τ_1 ile τ_2 nin çarpım topolojisi (veya Tychonoff topolojisi), (X, τ) uzayına da kartezyen çarpım (veya çarpım) uzayı denir.

Böylece $\varsigma \subset \beta \subset \tau$ olup i= 1,2 için $\prod_i^{-1}(V_i) \in \tau$ olması $\prod_i$, i= 1,2 izdüşüm fonksiyonları süreklidir.

Ayrıca $\forall V_1 \times V_2 \in \beta$ için $\prod_i(V_1 \times V_2) = V_i \in \tau_i$ olmasından da $\prod_i$, i = 1,2 izdüşüm fonksiyonları açık fonksiyonlardır.

Sonuç 3.3.1: (X,τ) kartezyen çarpım uzayı ve $V \subset X$ olsun. Bu durumda V nin açık olması için gerek ve yeter şart $\forall_x = (x_1, x_2) \in V$ için $x_1 \in V_{x1} \in \tau_1$ $x_2 \in V_{x2} \in \tau_2$ olmak üzere V kümesinin $V = \bigcup_{x \in V}(V_{x1} \times V_{x2})$ şeklinde olmasıdır.

Örnek 3.3.1: $X_1 = \{a,b,c\}, X_2 = \{1,2\}$ kümeleri üzerindeki topolojiler sırasıyla

$\tau_1 = \{\varnothing, X_1, \{a\}, \{b,c\}\}$ ve $\tau_2 = \{\varnothing, X_2, \{1\}\}$ olsun. Bu durumda

X={(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)} olur. Şimdi kartezyen çarpım kümesi üzerindeki çarpım topolojisini bulalım:

$\prod_1 : X \to X_1, \prod_2 : X \to X_2$ projeksiyonları için

$\varsigma = \{\prod_i^{-1}(V_i) : V_1 \in \tau_1, V_2 \in \tau_2\} = \{V_1 \times X_2, X_1 \times V_2 : V_1 \in \tau_1, V_2 \in \tau_2\}$ ailesini oluşturalım.

i=1 için

$$\prod_1^{-1}(\varnothing) = \varnothing \times X_2 = \varnothing, \tag{3.144}$$

$$\prod_1^{-1}(X_1) = X_1 \times X_2, \tag{3.145}$$

olur.

$$\prod_1^{-1}(\{a\}) = \{a\} \times \{1,2\} = \{(a,1),(a,2)\}, \tag{3.146}$$

$$\prod_1^{-1}(\{b,c\}) = \{b,c\} \times \{1,2\} = \{(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\} \tag{3.147}$$

i=2 için

$$\prod_2^{-1}(\varnothing) = X_1 \times \varnothing = \varnothing, \tag{3.148}$$

$$\prod_2^{-1}(X_2) = X_1 \times X_2 \tag{3.149}$$

olur.

$$\prod_2^{-1}(\{1\}) = \{a,b,c\} \times \{1\} = \{(a,1),(b,1),(c,1)\} \tag{3.150}$$

dır. O halde,

$$\varsigma = \{\varnothing, X, \{a,1),(a,2)\}, \{(b,1),b,2),(c,1),(c,2)\}, \{(a,1),(b,1),(c,1)\} \tag{3.151}$$

olarak bulunur. ς nin elemanlarının her sonlu kesişimi β ailesi olacağından

$$\beta = \{\bigcap_{A\in\varphi} A : \varphi \subset \varsigma \text{ sonlu}\} =$$

$$\varnothing, X\{(a,1), \{(b,1),(c,1), \{(a,1),(a,2), \{(b,1),(b,2),(c,1),(c,2), \{(a,1),(b,1),(c,1)\}\} \tag{3.152}$$

olarak bulunur. Kolayca gösterilebilir ki β ailesi $(b_1 - b_2)$ şartını sağlar. O halde; β nın elemanlarının birleşimlerinden oluşan τ ailesi :

$$\tau = \{\bigcup_{B\in\theta} B : \theta \subset \beta\} =$$

$$\varnothing, X, \{(a,1)\}, \{(a,1),(b,1),(c,1)\}, \{(a,1),(a,2)\}, \{(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\},$$
$$\{(b,1),(c,1), \{(a,1),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2), \{(b,1),(c,1),(a,1),(a,2)\}\} \tag{3.153}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.3.2: $I \neq \varnothing$ kümesi bir indis kümesi olmak üzere, (X_i, τ_i), $i \in I$ topolojik uzaylar ailesi, $X = \prod_{i\in I} X_i$ çarpım kümesi ve $\prod_i : X = \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ izdüşüm fonksiyonları olsun. $\forall i \in I$ için $\prod_i$ izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılacak şekildeki $X = \prod_{i\in I} X_i$ kümesi üzerindeki en kaba τ topolojisine kartezyen çarpım veya sadece çarpım (Tychonoff) topolojisi ve (X, τ)

ikilisine de kartezyen çarpım veya sadece çarpım uzayı denir. Teorem 3.2.8'e göre τ çarpım topolojisinin bir alt tabanı

$$\varsigma=\{\prod_j X_j \times V_i : j\neq i, V_i\in\tau_i\} \tag{3.154}$$

ailesi ve tabanı ise

$$\beta=\{\prod_{i}^{-1}{}_1(V_{i_1})\cap\prod_{i}^{-1}{}_2(V_{i2})\cap\ldots\cap\prod_{i}^{-1}{}_n(V_{in})=\prod_j X_j\times V_{i1}\times V_{i2}\times\ldots\times$$

$$V_{in} : J\neq \dot{I}_1,\ldots,\dot{I}_n, Vi_1\in\tau_{i1}, V_{i2}\in\tau_{i2},\ldots,V_{i\in}\in\tau_{in}\} \tag{3.155}$$

ailesidir. Yine Teorem 3.2.7 ye göre, τ çarpım topolojisinin iki alt tabanı tanımlayabiliriz:

$$\varsigma = \{\prod_{i}^{-1}(B_i)=\prod_j X_j\times B_i : j\neq i,\ B_i\in\beta_i\}, \tag{3.156}$$

$$\varsigma' = \{\prod_{i}^{-1}(A_i)=\prod_j X_j\times A_i : j\neq i,\ A_i\in \text{fl}_i\}, \tag{3.157}$$

Tanım 3.3.3: (X_1,τ_1), (X_2,τ_2) topolojik uzaylar, (X,τ) çarpım uzayı ve $x=(x_1,x_2)\in X$ olsun. x noktasının komşuluğu Tanım 1.6'da verilen tanım doğrultusunda

$$N\in N(x) \Leftrightarrow \exists V\subset X \ni x\in V\subset N$$

dır. Kartezyen çarpım uzayı tanımından yararlanarak bir V açık kümesi aşağıdaki gibi tanımlayalım, $V=\bigcup_{(x_1,x_2)\in V} V_{x1}\times V_{x2}, V_{x1}\in\tau_1, V_{x2}\in\tau_2$ şeklinde tanımlandığından

$$N\in N(x)\Leftrightarrow \exists V_{x1}\in\tau_1, \exists V_{x2}\in\tau_2 \ni x=(x_1,x_2)\in V_{x1}\times V_{x2}\subset V\subset N \tag{3.158}$$

dır. Ayrıca

$N_1\in N(x_1)\Leftrightarrow \exists V_{x1}\in\tau_1\ni x_1\in V_{x1}\subset N_1$ ve $N_2\in N(x_2)\Leftrightarrow\exists V_{x2}\in\tau_2\ni x_2\in V_{x2}\subset N_2$ olup,

$$X=(x_1,x_2)\in V_{x1}\times V_{x2}\subset N_1\times N_2 \tag{3.159}$$

dır. Böylece ;

$$N_1\times N_2 = N\in(x) \tag{3.160}$$

4. SONUÇ

Bu çalışmada "Topolojik Yapıların Kurulma Yöntemleri" incelenmiştir. Topolojik yapıların daha iyi anlaşılması için temel tanım ve teoremlerden yararlanılmış olup, topolojilerin kurulma metotları detayları ile açıklanmıştır. Bu bilgilere ek olarak fonksiyonlarda süreklilik kavramı ile bilgiler sunulmuştur.

KAYNAKLAR

Dönmez A., (2000), Metrik Ve Topolojik Uzaylar, Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., İstanbul.

Gemignani, M.C., (1962), Elementary Topology, Addison-Wesley Publishing Company Inc., London.

Kelly, J.L., (1995), General Topology, D. Van Nostrand Company Inc., New York.

Lipschutz, S., (1965), Theory And Problems Of General Topology, McGraw-Hill Book Company, New York.

Munkers, J.R., (1975), Topology A First Course, Prentince-Hall Inc., Englewood Ciffs, New Jersey.

Yıldız, C., (1999), Genel Topoloji, Gazi Üniversitesi Basımevi, Ankara.

Willard, S., (1970), General Topology, Addison-Wesley Publishing Company Inc., London.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	24.10.1978	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1992-1995	Koca Mustafa Paşa Lisesi
Lisans	1995-2001	İstanbul Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü

Çalıştığı Kurum

	2002-	Troysis Yazılım