

154572

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YARI-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONA SAHİP
RIEMANN UZAYLARI**

Matematikçi Fatma ÖZTÜRK

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Hakan DEMİRBÜKER

Yrd. Doç. Dr. Hakan Demirbükler

Doç. Dr. Ömer Gök

Yrd. Doç. Dr. Kevser Özden Köklü

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. SCHUR TEOREMİNİN ÜZERİNDE YARI-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON TANIMLI V_n RIEMANN UZAYINA GENELLEŞTİRİLMESİ.....	4
3. ÜZERİNDE YARI-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON TANIMLI AYRILABİLİR EĞRİLİK TENSÖRLERİNE SAHİP REKÜRANT RIEMANN UZAYLARI.....	13
4. SONUÇLAR.....	21
KAYNAKLAR.....	22
ÖZGEÇMİŞ.....	23

SİMGE LİSTESİ

g_{ij}	Riemann uzayının metrik tensörünün bileşenleri
$\dot{\nabla}$	Riemann konneksiyonu
∇	Yarı-simetrik metrik konneksiyon
$\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ij \end{smallmatrix} \right\}$	Riemann konneksiyonu katsayıları
Γ^h_{ij}	Yarı-simetrik metrik konneksiyon katsayıları
K	Kesitsel eğrilik
K_{ijkh}	Riemann konneksiyonuna ait kovaryant eğrilik tensörünün bileşenleri
R_{ijkh}	Yarı-simetrik metrik konneksiyona ait kovaryant eğrilik tensörünün bileşenleri
R_{ij}	Yarı-simetrik metrik konneksiyona ait Ricci tensörünün bileşenleri



ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamam sırasında bana yardımcı olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Hakan Demirbüker’e teşekkür ederim.



ÖZET

Bu çalışmada, Riemann uzayında yarı-simetrik metrik konneksiyona ait eğrilik tensörü üzerine bazı konular incelenmiştir.

Bilindiği üzere yarı-simetrik metrik konneksiyona ait Γ_{ij}^h konneksiyon katsayıları, $\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ij \end{smallmatrix} \right\}$ fonksiyonları ikinci cins Christoffel sembollerini göstermek üzere

$$\Gamma_{ij}^h = \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ij \end{smallmatrix} \right\} + \delta_j^h p_i - g_{ji} p^h$$

bağıntısıyla verilir. Burada p_i keyfi seçilen bir kovaryant vektör alanının bileşenleri olup, $p^h = g^{ha} p_a$ dır.

Bu çalışma üç bölüm içermektedir.

Birinci bölümde, Riemann uzayında yarı-simetrik metrik konneksiyon ile ilgili temel tanım ve özellikler verilmiştir.

İkinci bölümde, ilk olarak, yarı-simetrik metrik konneksiyona ait eğrilik tensörü üzerine bazı bağıntılar elde edilmiştir. Sonra, Riemann konneksiyonuna ait Schur teoremi, yarı-simetrik metrik konneksiyona sahip Riemann uzayına genelleştirilmiştir.

Üçüncü bölümde, yarı-simetrik metrik konneksiyona göre ayrılabilir eğrilik tensörüne sahip rekürant Riemann uzayları çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Riemann konneksiyonu, yarı-simetrik metrik konneksiyon, kesitsel eğrilik, rekürant uzay, ayrılabilir eğrilik tensörü.

ABSTRACT

In this work, some subjects on the curvature tensor of a metric semi-symmetric connection in Riemannian space are studied.

It is known that a metric semi-symmetric connection coefficients Γ_{ij}^h are given by

$$\Gamma_{ij}^h = \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} + \delta_j^h p_i - g_{ji} p^h$$

where, $\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}$ denote the Christoffel symbols of second kind and p_i are the components of arbitrary covariant vector field and $p^h = g^{ha} p_a$.

This work contains three chapters.

In chapter I, the fundamental definitions and properties on a metric semi-symmetric connection in Riemannian space are given.

In chapter II, some relations on the curvature tensor of a metric semi-symmetric connection are firstly obtained. Next, the Schur theorem concerning the Riemannian connection is generalized to a metric semi-symmetric connection in Riemannian space.

In chapter III, on the recurrent Riemannian spaces having decomposable curvature tensor with respect to metric semi-symmetric connection are studied.

Keywords: Riemannian connection, metric semi-symmetric connection, sectional curvature, recurrent space, decomposable curvature tensor.

1.GİRİŞ

n -boyutlu, g_{ij} metrik tensörüne sahip Riemann uzayını V_n ile gösterelim.

V_n uzayında tanımlı $\hat{\nabla}$ Riemann konneksiyonuna ait $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$ konneksiyon katsayıları

$$\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \quad (1.1)$$

bağıntısı ile tanımlanır (Weatherburn, 1966).

V_n uzayında tanımlı ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonuna ait Γ_{ij}^h konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ji}^h = \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} + \delta_j^h p_i - g_{ji} p^h \quad (1.2)$$

şeklindedir (Yano, 1970; Imai, 1973; Amur, 1978). Burada p_i fonksiyonları keyfi seçilen kovaryant bir vektör alanının bileşenleri olup, bileşenleri p^h olan kontravaryant vektör alanı

$$p^h = g^{ha} p_a \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bilindiği üzere V_n Riemann uzayının g_{ij} metrik tensörü

$$\hat{\nabla}_k g_{ij} = 0 \quad (1.4)$$

bağıntısını gerçekler.

g_{ij} metrik tensörünün ∇ konneksiyonuna göre kovaryant türevi

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{ih} \Gamma_{kj}^h - g_{jh} \Gamma_{ki}^h \quad (1.5)$$

dir. Burada (1.2) bağıntısı kullanılırsa,

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{ih} \left[\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ kj \end{smallmatrix} \right\} + \delta_k^h p_j - g_{kj} p^h \right] - g_{jh} \left[\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ki \end{smallmatrix} \right\} + \delta_k^h p_i - g_{ki} p^h \right] \quad (1.6)$$

elde edilir. (1.4) bağıntısı dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
\nabla_k g_{ij} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{ih} \left\{ \begin{matrix} h \\ kj \end{matrix} \right\} - g_{jh} \left\{ \begin{matrix} h \\ ki \end{matrix} \right\} - g_{ik} p_j + g_{ih} g_{kj} p^h - g_{jk} p_i + g_{jh} g_{ki} p^h \\
&= -g_{ik} p_j + g_{ih} g_{kj} p^h - g_{jk} p_i + g_{jh} g_{ki} p^h \\
&= -g_{ik} p_j + g_{ih} g_{kj} g^{hm} p_m - g_{jk} p_i + g_{jh} g_{ki} g^{hm} p_m \\
&= -g_{ik} p_j + g_{kj} p_i - g_{jk} p_i + g_{ki} p_j
\end{aligned} \tag{1.7}$$

ve buradan da

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{1.8}$$

bulunur. Bulunan bu son bağıntı ∇ yarı-simetrik konneksiyonunun bir metrik konneksiyon olduğunu ifade eder.

V_n uzayında $\hat{\nabla}$ ve ∇ konneksiyonlarına ait karışık eğrilik tensörlerinin lokal bir koordinat sistemindeki bileşenleri sırasıyla,

$$K_{kji}^h = \partial_k \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} - \partial_j \left\{ \begin{matrix} h \\ ki \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} h \\ km \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ji \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} h \\ jm \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ki \end{matrix} \right\} \tag{1.9}$$

$$R_{kji}^h = \partial_k \Gamma_{ji}^h - \partial_j \Gamma_{ki}^h + \Gamma_{km}^h \Gamma_{ji}^m - \Gamma_{jm}^h \Gamma_{ki}^m \tag{1.10}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Imai, 1973).

V_n Riemann uzayında $\hat{\nabla}$ ve ∇ konneksiyonlarına ait kovaryant eğrilik tensörlerinin bileşenleri sırasıyla,

$$K_{kjih} = g_{th} K_{kji}^t \tag{1.11}$$

$$R_{kjih} = g_{th} R_{kji}^t \tag{1.12}$$

şeklindedir.

V_n Riemann uzayında $\hat{\nabla}$ Riemann konneksiyonuna ait K_{ijkl} kovaryant eğrilik tensörü

$$K_{ijkl} = -K_{jikl} \tag{1.13}$$

$$K_{ijkl} = K_{klij} \tag{1.14}$$

$$K_{kjih} + K_{jikh} + K_{ikjh} = 0 \tag{1.15}$$

$$\dot{\nabla}_l K_{kjm} + \dot{\nabla}_k K_{jlm} + \dot{\nabla}_j K_{lkm} = 0 \quad (1.16)$$

bağıntılarını gerçekler (Weatherburn, 1966).

(1.15) ve (1.16) bağıntıları birinci ve ikinci Bianchi özdeşlikleri olarak bilinir.

V_n Riemann uzayında tanımlı ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonuna ait Ricci özdeşliği

$$\nabla_l \nabla_k a_{ij} - \nabla_k \nabla_l a_{ij} = -a_{ij} R_{lk}^t - a_{it} R_{lkj}^t - 2(\nabla_t a_{ij}) \Gamma_{[lk]}^t \quad (1.17)$$

bağıntısı ile verilir (Imai, 1973). Burada $\Gamma_{[lk]}^t$ ifadesi, Γ_{lk}^t nin l, k indislerine göre antisimetrik kısmı olup,

$$\begin{aligned} \Gamma_{[lk]}^t &= \frac{1}{2} (\Gamma_{lk}^t - \Gamma_{kl}^t) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_l^t p_k - \delta_k^t p_l) \end{aligned} \quad (1.18)$$

şeklindedir.

2. SCHUR TEOREMİNİN ÜZERİNDE YARI-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON TANIMLI V_n RIEMANN UZAYINA GENELLEŞTİRİLMESİ

Bu bölümde V_n Riemann uzayında $\hat{\nabla}$ Riemann konneksiyonu için bilinen Schur teoremini ∇ konneksiyonu için genelleştireceğiz.

Bunun için önce, ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonuna ait R^h_{kji} eğrilik tensörü ile $\hat{\nabla}$ Riemann konneksiyonuna ait K^h_{kji} eğrilik tensörü arasındaki bağıntıyı veren aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.1: K^h_{kji} ve R^h_{kji} sırasıyla V_n Riemann uzayının $\hat{\nabla}$ ve ∇ konneksiyonlarına ait eğrilik tensörleri ise,

$$R^h_{kji} = K^h_{kji} - \alpha_{ji} \delta^h_k + \alpha_{ki} \delta^h_j - g_{ji} A^h_k + g_{ki} A^h_j \quad (2.1)$$

dir. Burada p_i keyfî seçilen kovaryant bir vektör alanının bileşenleri olup, p^h , α_{ji} , A^h_j fonksiyonları sırasıyla,

$$p^h = g^{ha} p_a \quad (2.2)$$

$$\alpha_{ji} = \hat{\nabla}_j p_i - p_j p_i + \frac{1}{2} g_{ji} p_a p^a \quad (2.3)$$

$$A^h_j = g^{ha} \alpha_{ja} \quad (2.4)$$

bağıntıları ile tanımlıdırlar.

İspat: (1.10) bağıntısından ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonuna göre eğrilik tensörünün bileşenleri

$$R^h_{kji} = \partial_k \Gamma^h_{ji} - \partial_j \Gamma^h_{ki} + \Gamma^h_{km} \Gamma^m_{ji} - \Gamma^h_{jm} \Gamma^m_{ki} \quad (2.5)$$

dir. Bu eşitlikte (1.2) bağıntısını yerine konursa,

$$\begin{aligned}
R_{kji}^h &= \partial_k \left[\left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} + \delta_j^h p_i - g_{ji} p^h \right] - \partial_j \left[\left\{ \begin{matrix} h \\ ki \end{matrix} \right\} + \delta_k^h p_i - g_{ki} p^h \right] \\
&\quad + \left[\left\{ \begin{matrix} h \\ km \end{matrix} \right\} + \delta_k^h p_m - g_{km} p^h \right] - \left[\left\{ \begin{matrix} m \\ ji \end{matrix} \right\} + \delta_j^m p_i - g_{ji} p^m \right] \\
&\quad - \left[\left\{ \begin{matrix} h \\ jm \end{matrix} \right\} + \delta_j^h p_m - g_{jm} p^h \right] - \left[\left\{ \begin{matrix} m \\ ki \end{matrix} \right\} + \delta_k^m p_i - g_{ki} p^m \right] \\
&= \partial_k \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} + \delta_j^h \partial_k p_i - (\partial_k g_{ji}) p^h - g_{ji} (\partial_k p^h) \\
&\quad - \partial_j \left\{ \begin{matrix} h \\ ki \end{matrix} \right\} - \delta_k^h \partial_j p_i + (\partial_j g_{ki}) p^h + g_{ki} (\partial_j p^h) \\
&\quad + \left\{ \begin{matrix} h \\ km \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ji \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} h \\ kj \end{matrix} \right\} p_i - g_{ij} \left\{ \begin{matrix} h \\ km \end{matrix} \right\} p^m \\
&\quad - \left\{ \begin{matrix} h \\ jm \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ki \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} h \\ jk \end{matrix} \right\} p_i + g_{ki} \left\{ \begin{matrix} h \\ jm \end{matrix} \right\} p^m \\
&\quad + \delta_k^h p_m \left\{ \begin{matrix} m \\ ji \end{matrix} \right\} + \delta_k^h p_m \delta_j^m p_i - \delta_k^h p_m g_{ji} p^m \\
&\quad - \delta_j^h p_m \left\{ \begin{matrix} m \\ ki \end{matrix} \right\} - \delta_j^h p_m \delta_k^m p_i + \delta_j^h p_m g_{ki} p^m \\
&\quad - g_{km} p^h \left\{ \begin{matrix} m \\ ji \end{matrix} \right\} - g_{kj} p^h p_i + g_{km} p^h g_{ij} p^m \\
&\quad + g_{jm} p^h \left\{ \begin{matrix} m \\ ki \end{matrix} \right\} + g_{kj} p^h p_i - g_{jm} g_{ki} p^h p^m
\end{aligned} \tag{2.6}$$

elde edilir. Bu son bağıntıda (1.9) eşitliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
R_{kji}^h = & K_{kji}^h + \delta_k^h \left[-\partial_j p_i + p_m \left\{ \begin{matrix} m \\ ji \end{matrix} \right\} + p_i p_j - g_{ij} p_m p^m \right] \\
& + \delta_j^h \left[\partial_k p_i - p_m \left\{ \begin{matrix} m \\ ki \end{matrix} \right\} - p_i p_k + g_{ki} p_m p^m \right] \\
& + p^h \left[-\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - g_{km} \left\{ \begin{matrix} m \\ ji \end{matrix} \right\} + g_{jm} \left\{ \begin{matrix} m \\ ki \end{matrix} \right\} + g_{km} g_{ij} p^m - g_{jm} g_{ik} p^m \right] \\
& + g_{ik} \left[\partial_j p^h + \left\{ \begin{matrix} h \\ jm \end{matrix} \right\} p^m \right] - g_{ij} \left[\partial_k p^h + \left\{ \begin{matrix} h \\ km \end{matrix} \right\} p^m \right]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

bulunur.

(1.4) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g_{im} \left\{ \begin{matrix} m \\ kj \end{matrix} \right\} &= \partial_j g_{ki} - g_{km} \left\{ \begin{matrix} m \\ ij \end{matrix} \right\} \\
&= \partial_k g_{ij} - g_{jm} \left\{ \begin{matrix} m \\ ik \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

elde edilir.

(2.8) eşitliği (2.7) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
R_{kji}^h = & K_{kji}^h + \delta_k^h \left[-\partial_j p_i + p_m \left\{ \begin{matrix} m \\ ji \end{matrix} \right\} + p_i p_j - g_{ij} p_m p^m \right] \\
& + \delta_j^h \left[\partial_k p_i - p_m \left\{ \begin{matrix} m \\ ki \end{matrix} \right\} - p_i p_k + g_{ki} p_m p^m \right] \\
& - g_{ij} \left[\partial_k p^h + \left\{ \begin{matrix} h \\ km \end{matrix} \right\} p^m - p_k p^h \right] \\
& + g_{ik} \left[\partial_j p^h + \left\{ \begin{matrix} h \\ jm \end{matrix} \right\} p^m - p_j p^h \right]
\end{aligned} \tag{2.9}$$

bulunur.

(2.2), (2.3), (2.4) bağıntıları ve $\dot{\nabla}_j p_i = \partial_j p_i - p_m \left\{ \begin{matrix} m \\ ji \end{matrix} \right\}$ olduğu (2.9)'de göz önüne alınırsa

$$R_{kji}^h = K_{kji}^h - \alpha_{ji} \delta_k^h + \alpha_{ki} \delta_j^h - g_{ji} A_k^h + g_{ki} A_j^h \quad (2.10)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonuna ait R_{kji}^h kovaryant eğrilik tensörünün bazı özelliklerini elde etmeye çalışalım. Bununla ilgili aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.2: p_k , gradyent bir vektörün bileşenleri ise ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonuna ait R_{kji}^h eğrilik tensörü

$$R_{kji}^h = R_{ihkj} \quad (2.11)$$

$$R_{kji}^h + R_{jki}^h + R_{ikj}^h = 0 \quad (2.12)$$

bağıntılarını gerçekler.

İspat: (2.1) bağıntısının her iki tarafı g_{ih} ile çarpılıp h üzerine toplam alınır ve (1.11), (1.12), (2.4) bağıntıları dikkate alınırsa, ∇ ve $\dot{\nabla}$ konneksiyonlarına ait kovaryant eğrilik tensörleri arasında

$$R_{kji}^h = K_{kji}^h - \alpha_{ji} g_{kh} + \alpha_{ki} g_{jh} - g_{ji} \alpha_{kh} + g_{ki} \alpha_{jh} \quad (2.13)$$

bağıntısı bulunur.

(2.13) denkleminde (ih), (kj) indisleri üzerinde blok yer değiştirme yapılarak elde edilen denklem (2.13) denkleminden çıkarılır ve (1.14) bağıntısı kullanılırsa

$$R_{kji}^h = R_{ihkj} - (\alpha_{ji} - \alpha_{ij}) g_{kh} - (\alpha_{hk} - \alpha_{kh}) g_{ji} + (\alpha_{ki} - \alpha_{ik}) g_{jh} + (\alpha_{jh} - \alpha_{hj}) g_{ki} \quad (2.14)$$

elde edilir.

Hipoteze göre p_h gradyent bir vektörün bileşenleri olduğundan

$$\dot{\nabla}_j p_i - \dot{\nabla}_i p_j = \partial_j p_i - \partial_i p_j = 0 \quad (2.15)$$

dır.

(2.3) ve (2.4) bağıntıları (2.14)'de kullanılırsa (2.11) bağıntısı ispatlanmış olur.

(1.15), (2.13) bağıntıları göz önüne alındığında

$$R_{kji} + R_{jik} + R_{ikj} = -(\alpha_{ji} - \alpha_{ij}) g_{kh} - (\alpha_{ik} - \alpha_{ki}) g_{jh} - (\alpha_{kj} - \alpha_{jk}) g_{ih} \quad (2.16)$$

bulunur.

Bulunan bu son bağıntıda (2.15) kullanılırsa (2.12) bağıntısı bulunur.

V_n Riemann uzayında tanımlı ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonuna göre ikinci Bianchi özdeşliğini elde edebilmek için (1,3) tipinde $\hat{R}_{kji}^h$ tensörünü p keyfi seçilen bir skaler fonksiyon olmak üzere

$$\hat{R}_{kji}^h = e^{-2p} R_{kji}^h \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlayalım.

p_k , gradyent bir vektörün bileşenleri ise, (2.11), (2.12) bağıntıları göz önüne alındığında

$$\hat{R}_{kji} = g_{ih} \hat{R}_{kji}^t \text{ tensörünün}$$

$$\hat{R}_{kji} = \hat{R}_{ihk} \quad (2.18)$$

$$\hat{R}_{kji} + \hat{R}_{jik} + \hat{R}_{ikj} = 0 \quad (2.19)$$

bağıntılarını gerçeklediği görülür.

Şimdi ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonu için ikinci Bianchi özdeşliği olarak bilinen aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.3: V_n Riemann uzayında tanımlı ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonuna göre eğrilik tensörü R_{kji}^h olsun. Eğer keyfi seçilen bir p skaler fonksiyonunun gradyentinin

$$\text{bileşenleri } p_k = \frac{\partial p}{\partial x^k} \text{ ve } \hat{R}_{kji}^h = e^{-2p} R_{kji}^h \text{ olmak üzere}$$

$$\nabla_i \hat{R}_{kji}^h + \nabla_k \hat{R}_{jli}^h + \nabla_j \hat{R}_{lki}^h = 0 \quad (2.20)$$

dır.

İspat: ω_i , V_n de tanımlı keyfi bir kovaryant vektör alanının bileşenleri olmak üzere, (1.17) Ricci özdeşliği kullanılırsa

$$\nabla_i \nabla_k (\nabla_j \omega_i) - \nabla_k \nabla_i (\nabla_j \omega_i) = -R_{lkj}^t \nabla_t \omega_i - R_{lki}^t \nabla_j \omega_t - T_{lk}^t \nabla_t \nabla_j \omega_i \quad (2.21)$$

$$- \nabla_k \nabla_j \omega_i + \nabla_j \nabla_k \omega_i = R_{kji}^t \omega_t + \nabla_t \omega_i T_{kj}^t \quad (2.22)$$

bağıntıları bulunur. Burada

$$T_{lk}^t = \delta_l^t p_k - \delta_k^t p_l \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

(2.22) bağıntısının her iki tarafının x^l koordinatına göre kovaryant türevi alınır

$$-\nabla_l \nabla_k (\nabla_j \omega_i) + \nabla_l \nabla_j (\nabla_k \omega_i) = \nabla_l R_{kji}^t \omega_t + R_{kji}^t \nabla_l \omega_t + \nabla_l \nabla_t \omega_i T_{kj}^t + \nabla_t \omega_i \nabla_l T_{kj}^t \quad (2.24)$$

bulunur. (2.21) ve (2.24) bağıntılarında l, k, j indislerinin devirsel olarak değiştirilmesiyle sırasıyla,

$$\nabla_k \nabla_j (\nabla_l \omega_i) - \nabla_j \nabla_k (\nabla_l \omega_i) = -R_{kjl}^t \nabla_t \omega_i - R_{kji}^t \nabla_l \omega_t - T_{kj}^t \nabla_t \nabla_l \omega_i \quad (2.25)$$

$$\nabla_j \nabla_l (\nabla_k \omega_i) - \nabla_l \nabla_j (\nabla_k \omega_i) = -R_{jlk}^t \nabla_t \omega_i - R_{jli}^t \nabla_k \omega_t - T_{jl}^t \nabla_t \nabla_k \omega_i \quad (2.26)$$

$$-\nabla_k \nabla_j (\nabla_l \omega_i) + \nabla_k \nabla_l (\nabla_j \omega_i) = \nabla_k R_{jli}^t \omega_t + R_{jli}^t \nabla_k \omega_t + \nabla_k \nabla_t \omega_i T_{jl}^t + \nabla_t \omega_i \nabla_k T_{jl}^t \quad (2.27)$$

$$-\nabla_j \nabla_l (\nabla_k \omega_i) + \nabla_j \nabla_k (\nabla_l \omega_i) = \nabla_j R_{lki}^t \omega_t + R_{lki}^t \nabla_j \omega_t + \nabla_j \nabla_t \omega_i T_{lk}^t + \nabla_t \omega_i \nabla_j T_{lk}^t \quad (2.28)$$

denklemleri elde edilir. (2.21), (2.25), (2.26), (2.24), (2.27), (2.28) denklemleri taraf tarafa toplanır, (2.23) denklemi göz önüne alınır

$$\begin{aligned} & (\nabla_l R_{kji}^t + \nabla_k R_{jli}^t + \nabla_j R_{lki}^t) \omega_t - (R_{lkj}^t + R_{kjl}^t + R_{jlk}^t) \nabla_t \omega_i \\ & + 2 \{ p_l (\nabla_k \nabla_j \omega_i - \nabla_j \nabla_k \omega_i) + p_k (\nabla_j \nabla_l \omega_i - \nabla_l \nabla_j \omega_i) + p_j (\nabla_l \nabla_k \omega_i - \nabla_k \nabla_l \omega_i) \} \\ & + \nabla_k \omega_i (\nabla_l p_j - \nabla_j p_l) + \nabla_j \omega_i (\nabla_k p_l - \nabla_l p_k) + (\nabla_l \omega_i) (\nabla_j p_k - \nabla_k p_j) = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

bulunur. Bulunan bu son eşitlikte (1.12), (2.12) ve (2.22) denklemleri ve p_k vektörünün gradyent bir vektör olduğu kullanılırsa

$$\nabla_l R_{kji}^h + \nabla_k R_{jli}^h + \nabla_j R_{lki}^h = 2 (p_l R_{kji}^h + p_k R_{jli}^h + p_j R_{lki}^h) \quad (2.30)$$

elde edilir. (2.17) bağıntısının her iki tarafının x^l koordinatına göre kovaryant türevi alınır

$$\nabla_l (e^{-2p} R_{kji}^h) = -2e^{-2p} p_l R_{kji}^h + e^{-2p} \nabla_l R_{kji}^h \quad (2.31)$$

bulunur.

(2.30) bağıntısının her iki tarafı e^{-2p} ile çarpılır ve (2.31) bağıntısı dikkate alınır,

$$\begin{aligned}
& e^{-2p} \left(\nabla_l R_{kji}^h + \nabla_k R_{jli}^h + \nabla_j R_{lki}^h \right) \\
& = \nabla_l \left(e^{-2p} R_{kji}^h \right) + \nabla_k \left(e^{-2p} R_{jli}^h \right) + \nabla_j \left(e^{-2p} R_{lki}^h \right) + 2e^{-2p} \left(p_l R_{kji}^h + p_k R_{jli}^h + p_j R_{lki}^h \right)
\end{aligned} \quad (2.32)$$

elde edilir.

Bulunan bu bağıntıda, (2.30) ve $\hat{R}_{kji}^h = e^{-2p} R_{kji}^h$ olduğu kullanılırsa, (2.20) bağıntısı ispatlanmış olur.

Şimdi V_n Riemann uzayında Riemann konneksiyonu için bilinen Schur teoremini yarı-simetrik metrik konneksiyona sahip Riemann uzaylarına genelleştirmeye çalışalım. Bilindiği üzere V_n Riemann uzayında $\bar{u}$ ve $\bar{v}$ vektörlerinin gerdiği γ düzlemine ait kesitsel eğrilik

$$K = - \frac{R_{kjih} u^k v^j u^i v^h}{\left(g_{ki} g_{jh} - g_{kh} g_{ji} \right) u^k v^j u^i v^h} \quad (2.33)$$

bağıntısıyla verilir (Weatherburn, 1966; Imai, 1973). Eğer (2.33) bağıntısı ile tanımlanan kesitsel eğrilik V_n nin her noktasında $\bar{u}$ ve $\bar{v}$ doğrultuları tarafından belirlenen γ kesitine bağlı değilse, (2.33) bağıntısı

$$R_{kjih} = K \left(g_{kh} g_{ji} - g_{jh} g_{ki} \right) \quad (2.34)$$

şekline indirgenir. (1.12) bağıntısı göz önüne alınırsa (2.34) denklemi

$$R_{kji}^h = K \left(g_{ji} \delta_k^h - g_{ki} \delta_j^h \right) \quad (2.35)$$

şekline dönüşür.

(2.35) bağıntısının her iki tarafı e^{-2p} ile çarpılır ve $\hat{R}_{kji}^h = e^{-2p} R_{kji}^h$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\hat{R}_{kji}^h = e^{-2p} K \left(g_{ji} \delta_k^h - g_{ki} \delta_j^h \right) \quad (2.36)$$

dir. (2.20) ve (2.36) bağıntıları dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
& \nabla_l \left[e^{-2p} K \left(g_{ji} \delta_k^h - g_{ki} \delta_j^h \right) \right] g^{ji} \\
& + \nabla_k \left[e^{-2p} K \left(g_{li} \delta_j^h - g_{ji} \delta_l^h \right) \right] \\
& + \nabla_j \left[e^{-2p} K \left(g_{ki} \delta_l^h - g_{li} \delta_k^h \right) \right] = 0
\end{aligned} \quad (2.37)$$

dır.

Yukarıdaki eşitlikte metrik tensörün ve Kronecker deltasının yarı-simetrik metrik konneksiyona göre kovaryant türevleri sıfır olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
 & [\nabla_i (e^{-2p} K)] (g_{ji} \delta_k^h - g_{ki} \delta_j^h) \\
 & + [\nabla_k (e^{-2p} K)] (g_{li} \delta_j^h - g_{ji} \delta_l^h) \\
 & + [\nabla_j (e^{-2p} K)] (g_{ki} \delta_l^h - g_{li} \delta_k^h) = 0
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

bulunur. Eşitliğin her iki yanını g^{ij} ile çarpılıp i ve j indisleri üzerinden toplam alınırsa

$$\begin{aligned}
 & [\nabla_i (e^{-2p} K)] (g_{ji} g^{ij} \delta_k^h - g_{ki} g^{ij} \delta_j^h) \\
 & + [\nabla_k (e^{-2p} K)] (g_{li} g^{ij} \delta_j^h - g_{ji} g^{ij} \delta_l^h) \\
 & + [\nabla_j (e^{-2p} K)] (g_{ki} g^{ij} \delta_l^h - g_{li} g^{ij} \delta_k^h) = 0
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
 & [\nabla_i (e^{-2p} K)] [n \delta_k^h - \delta_k^j \delta_j^h] \\
 & + [\nabla_k (e^{-2p} K)] [\delta_l^j \delta_j^h - n \delta_l^h] \\
 & + [\nabla_j (e^{-2p} K)] [\delta_k^j \delta_l^h - \delta_l^j \delta_k^h] = 0
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
 & [\nabla_i (e^{-2p} K)] [(n-1) \delta_k^h] - [\nabla_k (e^{-2p} K)] [(n-1) \delta_l^h] \\
 & = (n-1) \delta_k^h \nabla_i (e^{-2p} K) - (n-1) \delta_l^h \nabla_k (e^{-2p} K) + \delta_l^h \nabla_k (e^{-2p} K) - \delta_k^h \nabla_l (e^{-2p} K) \\
 & = (n-2) [\delta_k^h \nabla_i (e^{-2p} K) - \delta_l^h \nabla_k (e^{-2p} K)] = 0
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

elde edilir. Bulunan bu son ifadeden $n > 2$ için

$$\delta_k^h \nabla_i (e^{-2p} K) = \delta_l^h \nabla_k (e^{-2p} K) \tag{2.42}$$

elde edilir. (2.42) bağıntısı h indisinin 1 den n ye kadar alacağı tüm değerler için sağlandığından,

$$\nabla_i (e^{-2p} K) = 0 \tag{2.43}$$

yani

$$e^{-2p} K = c = \text{sabit} \tag{2.44}$$

bulunur.

(2.36) ifadesinde $e^{-2p}K = c$ yazılır ve (2.17) bağıntısı dikkate alınırsa,

$$R_{kji}^h = ce^{2p} (g_{ji}\delta_k^h - g_{ki}\delta_j^h) \quad (2.45)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 2.4: Üzerinde ∇ yarı-simetrik metrik konneksiyonu tanımlı V_n Riemann uzayının ∇ konneksiyonuna ait konneksiyon katsayıları p_k keyfi seçilen bir p skaler fonksiyonunun gradyentinin bileşenleri olmak üzere, $\Gamma_{ji}^h = \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\} + \delta_j^h p_i - g_{ji} p^h$ bağıntısı ile verilmiş olsun.

Eğer V_n nin her noktasında kesitsel eğrilik γ kesitine bağlı değilse ∇ konneksiyonuna ait eğrilik tensörünün bileşenleri c bir sabit olmak üzere, $R_{kji}^h = ce^{2p} (g_{ji}\delta_k^h - g_{ki}\delta_j^h)$ şeklinde ifade edilebilir.

3. ÜZERİNDE YARI-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON TANIMLI AYRILABİLİR EĞRİLİK TENSÖRLERİNE SAHİP REKÜRANT RIEMANN UZAYLARI

Üzerinde yarı-simetrik metrik konneksiyon tanımlı V_n Riemann uzayında

$$\nabla_m R^h_{kji} = \Psi_m R^h_{kji} \quad (3.1)$$

olacak şekilde, bileşenleri ψ_m olan bir kovaryant vektör alanı mevcut ise, V_n Riemann uzayına rekürant Riemann uzayı denir (Wong, 1962; Takano, 1967).

Bu bölümde, p^h gradyent bir vektörün bileşenleri olmak üzere eğrilik tensörü

$$R^h_{kji} = v^h \phi_{kji} \quad (3.2)$$

şeklinde ayrılabilen rekürant Riemann uzayları ele alınacaktır. Burada v^h kontravaryant bir vektörün bileşenleri ve ϕ_{kji} de üçüncü mertebeden kovaryant bir tensörün bileşenlerini göstermektedir.

R^h_{kji} tensörü k, j indislerine göre antisimetrik olduğundan,

$$v^h (\phi_{kji} + \phi_{jki}) = 0 \quad (v \neq 0) \quad (3.3)$$

ve buradan da

$$\phi_{kji} + \phi_{jki} = 0 \quad (3.4)$$

bulunur.

(1.12), (2.12) ve (3.2) bağıntıları göz önüne alınırsa

$$\phi_{kji} + \phi_{jik} + \phi_{ikj} = 0 \quad (3.5)$$

bulunur. (2.20), (3.1) ve (3.2) bağıntıları kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \nabla_l (e^{-2p} R_{kji}^h) + \nabla_k (e^{-2p} R_{jli}^h) + \nabla_j (e^{-2p} R_{lki}^h) \\
&= -2e^{-2p} p_l v^h \phi_{kji} - 2e^{-2p} p_k v^h \phi_{jli} - 2e^{-2p} p_j v^h \phi_{lki} \\
&+ e^{-2p} [\psi_l v^h \phi_{kji} + \psi_k v^h \phi_{jli} + \psi_j v^h \phi_{lki}] = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) bağıntısında $v \neq 0$ olduğu dikkate alınır

$$(\psi_l - 2p_l) \phi_{kji} + (\psi_k - 2p_k) \phi_{jli} + (\psi_j - 2p_j) \phi_{lki} = 0 \tag{3.7}$$

bulunur.

(3.7) bağıntısının her iki tarafı v^l ile çarpılır, l üzerine toplam alınır ve (3.4) bağıntısı kullanılırsa,

$$\phi_{kji} = \frac{1}{\mu} [(\psi_k - 2p_k) \phi_{jli} - (\psi_j - 2p_j) \phi_{kli}] \tag{3.8}$$

bulunur. Burada

$$\mu = (\psi_l - 2p_l) v^l, \quad \phi_{ki} = v^l \phi_{lki} \tag{3.9}$$

dir.

(3.8) bağıntısı kullanılırsa (3.2) bağıntısı

$$R_{kji}^h = \alpha v^h [(\psi_k - 2p_k) \phi_{jli} - (\psi_j - 2p_j) \phi_{kli}] \quad , \quad \left(\alpha = \frac{1}{\mu} \right) \tag{3.10}$$

şekline dönüşür.

Diğer taraftan (3.4) bağıntısı $v^k v^j$ ile çarpılır ve k, j indisleri üzerine toplam alınır, (3.9) yardımıyla

$$v^j \phi_{ji} = 0 \quad (i=1, \dots, n) \tag{3.11}$$

bulunur.

(3.10)'da h ve k indisleri üzerine daraltma yapılır ve (3.11) dikkate alınır $R_{hji}^h = R_{ji} = \phi_{ji}$ ve böylece

$$v^j R_{ji} = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir. Burada bileşenleri R_{ji} olan ikinci mertebeden kovaryant tensör ∇ konneksiyonuna göre Ricci tensörü olarak isimlendirilir.

(3.12) denklem sistemi $v^1, v^2, \dots, v^n$ e göre lineer homojen denklem sistemi olup, $v \neq 0$ olduğundan $\det(R_{ji}) = 0$ dır.

(3.10)'da $\phi_{ji} = R_{ji}$ konursa

$$R_{kji}^h = \alpha v^h \left[(\psi_k - 2p_k) R_{ji} - (\psi_j - 2p_j) R_{ki} \right] \quad (3.13)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1: Eğrilik tensörü $R_{kji}^h = v^h \phi_{kji}$ şeklinde ayrılabilen rekürant bir Riemann uzayı için $\det(R_{ji}) = 0$ ve $\phi_{kji} = \alpha \left[(\psi_k - 2p_k) R_{ji} - (\psi_j - 2p_j) R_{ki} \right]$ dır.

Teorem 3.2: Eğrilik tensörü $R_{kji}^h = v^h \phi_{kji}$ şeklinde ayrılabilen rekürant bir Riemann uzayında v vektör alanı ve ϕ tensör alanı reküranttır.

İspat: (3.1)'de h ve k indisleri üzerine daraltma yapılırsa

$$\nabla_m R_{ji} = \psi_m R_{ji} \quad (3.14)$$

elde edilir.

(3.13) bağıntısının her iki tarafının x^m koordinatına göre türevi alınır (3.14) yardımıyla

$$\begin{aligned} & \alpha \left[(\psi_j - 2p_j) R_{ki} - (\psi_k - 2p_k) R_{ji} \right] \nabla_m v^h \\ &= \alpha \left[\nabla_m (\psi_k - 2p_k) R_{ji} - \nabla_m (\psi_j - 2p_j) R_{ki} \right] v^h \\ &+ (\nabla_m \alpha) \left[(\psi_k - 2p_k) R_{ji} - (\psi_j - 2p_j) R_{ki} \right] v^h \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.15) bağıntısının her iki tarafı v^a ile çarpılır ve (3.13) dikkate alınır

$$R_{kji}^a \nabla_m v^h = R_{kji}^h \nabla_m v^a \quad (3.16)$$

bulunur. $\phi_{kji} \neq 0$ olduğu göz önüne alınır ve (3.2) bağıntısı kullanılırsa (3.16) bağıntısı

$$v^a \nabla_m v^h = v^h \nabla_m v^a \quad (3.17)$$

şekline dönüşür. Buradan λ_m bir kovaryant vektör alanının bileşenleri olmak üzere

$$\nabla_m v^h = \lambda_m v^h \quad (3.18)$$

elde edilir.

(3.2) bağıntısının her iki tarafının x^m koordinatına göre kovaryant türevi alınır ve (3.1), (3.2), (3.18) kullanılırsa, $v \neq 0$ olduğundan,

$$\nabla_m \phi_{kji} = (\psi_m - \lambda_m) \phi_{kji} \quad (3.19)$$

elde edilir.

Şimdi bileşenleri ϕ_{kji} olan tensör alanının

$$\phi_{kji} = (\psi_i - 2p_i) \phi_{kj} \quad (3.20)$$

şeklinde ayrılabilirdiği rekürant Riemann uzayları için aşağıdaki teoremi ispat edelim.

Teorem 3.3: ϕ tensör alanının $\phi_{kji} = (\psi_i - 2p_i) \phi_{kj}$ şeklinde ayrılabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$\nabla_m (\psi_i - 2p_i) + (\lambda_m - \alpha \nabla_m \mu) (\psi_i - 2p_i) = 0$$

yani $\psi_i - 2p_i$ vektör alanının rekürant olmasıdır.

İspat: (3.20) bağıntısından (3.19) yardımıyla

$$\begin{aligned} & (\psi_m - \lambda_m) (\psi_i - 2p_i) \phi_{kj} \\ &= \nabla_m (\psi_i - 2p_i) \phi_{kj} + (\psi_i - 2p_i) (\nabla_m \phi_{kj}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir.

$\mu = (\psi_i - 2p_i) v^i$ bağıntısının her iki tarafının x^m koordinatına göre kovaryant türevi alınır ve (3.18) kullanılırsa

$$v^i \nabla_m (\psi_i - 2p_i) = \nabla_m \mu - \lambda_m \mu \quad (3.22)$$

bulunur.

(3.21) bağıntısının her iki tarafı v^i ile çarpılıp, i üzerine toplam alınır ve (3.22) bağıntısı kullanılırsa

$$\nabla_m \phi_{kj} = (\psi_m - \alpha \nabla_m \mu) \phi_{kj} \quad (3.23)$$

elde edilir.

$R_{kji}^h = v^h \phi_{kji} = v^h (\psi_i - 2p_i) \phi_{kj}$ denkleminin her iki tarafının x^m koordinatına göre kovaryant türevi alınır ve (3.1), (3.18), (3.23) bağıntıları kullanılırsa

$$\psi_m R_{kji}^h = \psi_m R_{kji}^h + [\lambda_m (\psi_i - 2p_i) + \nabla_m (\psi_i - 2p_i) - \alpha (\psi_i - 2p_i) \nabla_m \mu] \phi_{kj} v^h \quad (3.24)$$

ve böylece

$$\nabla_m (\psi_i - 2p_i) + (\lambda_m - \alpha \nabla_m \mu) (\psi_i - 2p_i) = 0 \quad (3.25)$$

elde edilir. Böylece şartın gerekliliği ispatlanmış olur.

Şartın yeterliliğini ispatlamak için, (3.25) denkleminde ∇_n operatörü uygulanarak elde edilen denklemden, m ve n indislerinin yerlerini değiştirerek elde edilen denklem çıkarılır ve Ricci özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & -R_{nmi}^h (\psi_h - 2p_h) - [p_m \nabla_n (\psi_i - 2p_i) - p_n \nabla_m (\psi_i - 2p_i)] \\ & + [\nabla_n (\lambda_m - \alpha \nabla_m \mu) - \nabla_m (\lambda_n - \alpha \nabla_n \mu)] (\psi_i - 2p_i) = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

bulunur.

(3.2) ve (3.25) bağıntıları göz önüne alınır ve $\mu = (\psi_i - 2p_i) v^i$ olduğu hatırlanırsa (3.26) bağıntısından

$$\begin{aligned} \phi_{nmi} &= \alpha [p_m (\lambda_n - \alpha \nabla_n \mu) - p_n (\lambda_m - \alpha \nabla_m \mu) \\ &+ \nabla_m (\lambda_n - \alpha \nabla_n \mu) - \nabla_n (\lambda_m - \alpha \nabla_m \mu)] (\psi_i - 2p_i) \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir.

(3.27) denklemi,

$$\varphi_{nm} = \alpha [p_m (\lambda_n - \alpha \nabla_n \mu) - p_n (\lambda_m - \alpha \nabla_m \mu) + \nabla_m (\lambda_n - \alpha \nabla_n \mu) - \nabla_n (\lambda_m - \alpha \nabla_m \mu)] \quad (3.28)$$

olmak üzere,

$$\varphi_{nmi} = (\psi_i - 2p_i) \varphi_{nm} \quad (3.29)$$

şeklindedir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.4: Eğrilik tensörünün $R_{nmi}^h = v^h (\psi_i - 2p_i) \varphi_{nm}$ şeklinde ayrılabilirdiği rekürant bir Riemann uzayında φ_{nm} tensörü

$$\varphi_{nm} = \alpha [\nabla_m \psi_n - \nabla_n \psi_m + p_n \psi_m - p_m \psi_n]$$

şeklindedir.

İspat: (3.1) denklemin ∇_n operatörü uygulanarak elde edilen denklemden, m ve n indislerinin yerlerini değiştirerek elde edilen denklem çıkarılır ve Ricci özdeşliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (\nabla_n \psi_m - \nabla_m \psi_n) R_{kji}^h &= -R_{nmk}^l R_{lji}^h - R_{nmj}^l R_{kli}^h - R_{nmi}^l R_{kjl}^h \\ &\quad + R_{nmi}^h R_{kji}^l - p_m \nabla_n R_{kji}^h + p_n \nabla_m R_{kji}^h \end{aligned} \quad (3.30)$$

bulunur. Bu denklemin her iki tarafı $\psi_h - 2p_h$ ile çarpılıp h üzerine toplam alınır ve

$$R_{nmi}^h = v^h (\psi_i - 2p_i) \varphi_{nm}, \quad v^i \varphi_{nmi} = \mu \varphi_{nm} \quad (3.31)$$

$$\varphi_{kji} = \alpha [(\psi_k - 2p_k) R_{ji} - (\psi_j - 2p_j) R_{ki}] \quad (3.32)$$

bağıntıları kullanılırsa

$$\varphi_{nm} = \alpha [\nabla_m \psi_n - \nabla_n \psi_m + p_n \psi_m - p_m \psi_n] \quad (3.33)$$

bulunur.

Teorem 3.5: Eğrilik tensörünün $R_{nmi}^h = v^h (\psi_i - 2p_i) \varphi_{nm}$ şeklinde ayrılabilirdiği rekürant bir Riemann uzayında

$$\begin{aligned} &p_m (\psi_n + \lambda_n - \alpha \nabla_n \mu) + \nabla_m (\lambda_n - \psi_n - \alpha \nabla_n \mu) \\ &= p_n (\psi_m + \lambda_m - \alpha \nabla_m \mu) + \nabla_n (\lambda_m - \psi_m - \alpha \nabla_m \mu) \end{aligned} \quad (3.34)$$

bağıntısı sağlanır.

İspat: (3.28) ve (3.33)'de ϕ_{mn} için bulunan farklı iki bağıntının birbirine eşitlenmesiyle istenilen bağıntı bulunur.

Teorem 3.6: Eğrilik tensörünün $R_{nmi}^h = v^h (\psi_i - 2p_i) \phi_{nm}$ şeklinde ayrılabilirdiği rekürant bir Riemann uzayında ϕ_{mn} tensörü

$$\nabla_q \mu \phi_{mn} = \psi_q \mu \phi_{mn}$$

bağıntısını gerçekler.

İspat: (3.30) ifadesinin her iki tarafına ∇_q operatörü uygulanır ve uzayın rekürant bir uzay olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \nabla_q [\nabla_n \psi_m - \nabla_m \psi_n] R_{kji}^h + [\nabla_n \psi_m - \nabla_m \psi_n] \psi_q R_{kji}^h \\ &= 2\psi_q \left[-R_{nmk}^l R_{lji}^h - R_{nmj}^l R_{kli}^h - R_{nmi}^l R_{kji}^h + R_{nml}^l R_{kji}^l \right] \\ & - \nabla_q (p_m \psi_n - p_n \psi_m) R_{kji}^h - (p_m \psi_n - p_n \psi_m) \psi_q R_{kji}^h \end{aligned} \quad (3.35)$$

bulunur. (3.35)'da (3.30) bağıntısı ve $R_{kji}^h \neq 0$ olduğu dikkate alınır

$$\begin{aligned} \nabla_q (\nabla_n \psi_m - \nabla_m \psi_n) &= \psi_q (\nabla_n \psi_m - \nabla_m \psi_n) \\ &+ \psi_q (p_m \psi_n - p_n \psi_m) - \nabla_q (p_m \psi_n - p_n \psi_m) \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir. Bulunan bu son bağıntı

$$\begin{aligned} & \nabla_q (\nabla_n \psi_m - \nabla_m \psi_n + p_m \psi_n - p_n \psi_m) \\ &= \psi_q (\nabla_n \psi_m - \nabla_m \psi_n + p_m \psi_n - p_n \psi_m) \end{aligned} \quad (3.37)$$

şeklinde yazılır ve (3.33) bağıntısı göz önüne alınır

$$\nabla_q \mu \phi_{mn} = \psi_q \mu \phi_{mn} \quad (3.38)$$

bulunur.

a_j^i (1,1), ϕ_{kl} da (0,2) tipinde birer tensör alanının bileşenleri olmak üzere, eğrilik tensörünün

$$R_{jkl}^i = a_j^i \phi_{kl} \quad (3.39)$$

şeklinde ayrılabilirdiği rekürant bir Riemann uzayı ile ilgili aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.7: Eğrilik tensörünün $R_{jkl}^i = a_j^i \varphi_{kl}$ şeklinde ayrılabilir olduğu rekürant bir Riemann uzayında φ_{kl} ve a_j^i tensör alanları reküranttır.

İspat: (3.39)'de i ve j indisleri üzerine daraltma yapılır ve Ricci tensörünün tanımı hatırlanırsa

$$R_{kl} = \rho \varphi_{kl}, \quad \rho = a_i^i \quad (3.40)$$

bulunur. $\rho \neq 0$ için (3.40)'den elde edilen

$$\varphi_{kl} = \frac{1}{\rho} R_{kl} = h R_{kl} \quad \left(h = \frac{1}{\rho} \right) \quad (3.41)$$

bağıntısından x^m değişkenine göre kovaryant türev alınır ve rekürant bir uzayın Ricci tensörünün de rekürant olduğu, yani $\nabla_m R_{kl} = \psi_m R_{kl}$ olacak şekilde bir ψ_m kovaryant vektörünün varlığı hatırlanırsa

$$\nabla_m \varphi_{kl} = (\nabla_m h) R_{kl} + h \nabla_m R_{kl} = (\rho \nabla_m h + \psi_m) \varphi_{kl} \quad (3.42)$$

elde edilir. O halde φ_{kl} tensör alanı reküranttır.

(3.39) bağıntısından x^m koordinatına göre kovaryant türev alınır ve (3.1), (3.42) kullanılırsa $\varphi_{kl} \neq 0$ için

$$\nabla_m a_j^i = -\rho (\nabla_m h) a_j^i \quad (3.43)$$

bulunur ki bu da a_j^i tensör alanının rekürant olduğunu ifade eder.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada ilk önce, yarı-simetrik metrik konneksiyona ait eğrilik tensörü üzerine bazı bağıntılar elde edilmiştir. Sonra, Riemann konneksiyonuna ait Schur teoremi, yarı-simetrik metrik konneksiyona sahip Riemann uzaylarına genelleştirilmiştir.

Ayrıca, ϕ tensör alanının $\phi_{kji} = (\psi_i - 2p_i)\phi_{kj}$ şeklinde ayrılabilmesi için gerek ve yeter şartın

$$\nabla_m (\psi_i - 2p_i) + (\lambda_m - \alpha \nabla_m \mu) (\psi_i - 2p_i) = 0$$

olduğu ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

Amur, K. and Pudar, S. S., (1978), "On submanifolds of a Riemannian manifolds admitting a metric semi-symmetric connection", Tensor, N. S., Vol. 32.

Imai, T., (1973), "Notes on semi-symmetric metric connections II, Tensor, N. S., Vol. 27.

Takano, K., (1967), "Decomposition of curvature tensor in a recurrent space", Tensor, 18, 343-347.

Weatherburn, C. E., (1966), An Introduction to Riemannian geometry and the tensor calculus, Cambridge.

Wong, Y., (1962), "Linear connexions with zero torsion and recurrent curvature", Trans. Amer. Math. Soc., 102.

Yano, K., (1970), "On semi-symmetric metric connection", Rev. Roum Math., Pures et Appl., 15, 1579-1586.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 23.12.1979

Doğum yeri İstanbul

Lise 1994-1997 İstanbul Fatih Yedikule Lisesi

Lisans 1997-2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

2001-2002 İstanbul Cebeci Sultançiftliği İlköğretim Okulu

2002-Devam ediyor YTÜ Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi