

154573

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ REKÜRANT ve RICCI REKÜRANT
YARI-AYRILABİLİR RIEMANN UZAYLARI

154573

Matematikçi Süleyman Volkan ÜZER

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Hakan DEMİRBÜKER

Yard. Doç. Dr. Hakan Demirebiker

Prof. Dr. Ziya SOYUÇUK

Y. Doç. Dr. Kenan KÖKLÜ

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ REKÜRANT ve RICCI REKÜRANT YARI-AYRILABİLİR RIEMANN UZAYLARI.....	3
3. KONFORM REKÜRANT ve KONFORM BİREKÜRANT YARI-AYRILABİLİR RIEMANN UZAYLARI.....	16
4. SONUÇLAR.....	21
KAYNAKLAR.....	22
ÖZGEÇMİŞ.....	23

SİMGE LİSTESİ

g_{ij}	Riemann uzayının metrik tensörünün bileşenleri
$\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}$	İkinci cins Christoffel sembolleri
∇	Kovaryant türev operatörü
$R^i_{\ jkl}$	Karışık eğrilik tensörünün bileşenleri
R_{ijkl}	Kovaryant eğrilik tensörünün bileşenleri
R_{ij}	Ricci tensörünün bileşenleri bileşenleri
C_{ijkl}	Konform eğrilik tensörünün bileşenleri



ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamam sırasında bana yardımcı olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Hakan Demirbüker’e teşekkür ederim.



ÖZET

Bu çalışma üç bölüm içermektedir.

Birinci bölümde yarı-ayrılabilir Riemann uzayları ile ilgili temel tanım ve özellikler verilmiştir.

İkinci bölümde genelleştirilmiş rekürant ve Ricci rekürant yarı-ayrılabilir Riemann uzayları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde konform rekürant ve konform birekürant yarı-ayrılabilir Riemann uzayları ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yarı-ayrılabilir Riemann uzayı, genelleştirilmiş rekürant uzay, Einstein uzayı, konform rekürant uzay.



ABSTRACT

This work contains three chapters.

In chapter 1, the fundemental definitions and properties on semi-decomposable Riemann space are given.

In chapter 2, generalized recurrent and Ricci recurrent semi-decomposable Riemann space are studied.

In chapter 3, conform recurrent and conform birecurrent semi-decomposable Riemann space are investigated.

Keywords: Semi-decomposable Riemann space, generalized recurrent space, Einstein space, conform recurrent space.



1. GİRİŞ

V_n , V_q , V_{n-q} sırasıyla n , q , $n-q$ boyutlu Riemann uzayları ve bunların metrikleri sırasıyla $g_{ij}dx^i dx^j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), $\bar{g}_{ab}dx^a dx^b$ ($a, b = 1, 2, \dots, q$) ve $g^*_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ ($\alpha, \beta = q+1, q+2, \dots, n$) olsun.

$n > 2$ ve $q < n$ olmak üzere V_n de bir $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ koordinat sistemi için

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = \bar{g}_{ab}dx^a dx^b + \sigma g^*_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \quad (1.1)$$

bağıntısı gerçekleşiyorsa, V_n Riemann uzayına yarı-ayrılabilir Riemann uzayı denir (De, 1992). Burada $\sigma = \sigma(x^1, x^2, \dots, x^q)$ dır.

V_n yarı-ayrılabilir Riemann uzayı ise V_q ve V_{n-q} Riemann uzayları, V_n nin tamamlayıcı uzayları olarak adlandırılır.

(1.1) bağıntısından

$$g_{ab} = \bar{g}_{ab}, \quad g_{\alpha\beta} = \sigma g^*_{\alpha\beta}, \quad g_{a\alpha} = 0 \quad (1.2)$$

elde edilir.

V_n Riemann uzayına ait birinci cins ve ikinci cins Christoffel sembolleri sırasıyla,

$$[ij, k] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3)$$

$$\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} = g^{kh} [ij, k] = \frac{1}{2} g^{kh} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (i, j, k, h = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanır (Weatherburn, 1966).

V_n Riemann uzayına ait karışık eğrilik tensörü ve kovaryant eğrilik tensörünün bileşenleri sırasıyla,

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left\{ \begin{matrix} i \\ jl \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ hk \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ jl \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ hl \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ jk \end{matrix} \right\} \quad (1.5)$$

$$R_{hijkl} = g_{hi} R^i_{jkl} \quad (1.6)$$

dır.

V_n Riemann uzayına ait Ricci tensörünün bileşenleri

$$R_{jk} = R_{jki}^i = g^{hm} R_{jhmk} \quad (1.7)$$

şeklinde tanımlanır.

K bir sabit olmak üzere, V_n Riemann uzayının kovaryant eğrilik tensörünün bileşenleri

$$R_{h j k l} = K (g_{j k} g_{h l} - g_{h k} g_{j l}) \quad (1.8)$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa V_n sabit eğrilikli Riemann uzayı olarak adlandırılır.

V_n Riemann uzayının R skaler eğriliği

$$R = g^{ij} R_{ij} \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlanır.

$K = K(x^1, \dots, x^n)$ olmak üzere

$$R_{ij} = K g_{ij} \quad (1.10)$$

bağıntısı mevcut ise V_n Riemann uzayı Einstein uzayı olarak adlandırılır.

(1.9) ve (1.10) bağıntıları göz önüne alınırsa $K = \frac{R}{n}$ olduğu görülür.

2.GENELLEŞTİRİLMİŞ REKÜRANT ve RICCI REKÜRANT YARI-AYRILABİLİR RIEMANN UZAYLARI

λ_m ve b_{lm} sırasıyla V_n de tanımlı kovaryant bir vektör alanı ve ikinci mertebeden kovaryant bir tensör alanının bileşenleri olmak üzere, V_n Riemann uzayının kovaryant eğrilik tensörü,

$$\nabla_m \nabla_l R_{hijk} = \lambda_m \nabla_l R_{hijk} + b_{lm} R_{hijk} \quad (b_{lm} \neq 0) \quad (2.1)$$

bağıntısı gerçekliyorsa V_n Riemann uzayı genelleştirilmiş rekürant uzay olarak adlandırılır (De, 1992).

Burada ∇ , V_n uzayına ait kovaryant türev operatörüdür.

λ_m , V_n de tanımlı kovaryant bir vektör alanının bileşenleri ve b_{lm} de V_n de tanımlı ikinci mertebeden kovaryant bir tensör alanının bileşenleri olmak üzere, V_n Riemann uzayının R_{ij} Ricci tensörü ,

$$\nabla_m \nabla_l R_{ij} = \lambda_m \nabla_l R_{ij} + b_{lm} R_{ij} \quad (b_{lm} \neq 0) \quad (2.2)$$

bağıntısını gerçeklerse, V_n Riemann uzayı genelleştirilmiş Ricci rekürant uzay olarak adlandırılır.

(2.1) bağıntısının her iki tarafı g^{hk} ile çarpılır h ve k üzerine toplam alınırsa (2.2) elde edilir. Buradan her genelleştirilmiş rekürant uzayın genelleştirilmiş Ricci rekürant uzay olduğu sonucuna varılır.

Bu bölümde yarı-ayrılabilir genelleştirilmiş rekürant ve genelleştirilmiş Ricci rekürant Riemann uzayları ele alınacaktır. Bunun için öncelikle yarı-ayrılabilir V_n Riemann uzayına ait ikinci cins Christoffel sembollerini hesaplayalım.

$$V_n, V_q, V_{n-q} \text{ uzaylarına ait ikinci cins Christoffel sembolleri sırasıyla } \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \overline{a} \\ bc \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}^*$$

olsun. (1.2), (1.3) ve (1.4) bağıntıları göz önüne alınırsa yarı-ayrılabilir V_n Riemann uzayına ait ikinci cins Christoffel sembolleri için

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} &= g^{am} [\alpha\beta, m] \\
&= \frac{1}{2} g^{ab} \left(\frac{\partial g_{\alpha b}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta b}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^b} \right) \\
&= -\frac{1}{2} g^{ab} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^b} \\
&= -\frac{1}{2} g^{ab} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} g^*_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2} g^{ab} \sigma_{,b} g^*_{\alpha\beta} \\
\left\{ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2} g^{ab} \sigma_{,b} g^*_{\alpha\beta} \tag{2.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ a\beta \end{matrix} \right\} &= g^{\alpha h} [a\beta, h] \\
&= g^{\alpha\gamma} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{a\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{a\beta}}{\partial x^\gamma} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^a} \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \sigma_{,a} g^*_{\beta\gamma} \\
&= \frac{1}{2\sigma} \sigma_{,a} g^{*\alpha\gamma} g^*_{\beta\gamma} \\
\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ a\beta \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2\sigma} \sigma_{,a} \delta^\alpha_\beta \tag{2.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ab \end{matrix} \right\} &= g^{\alpha h} [ab, h] \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha h} \left(\frac{\partial g_{ah}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{bh}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^h} \right) \\
\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ ab \end{matrix} \right\} &= 0 \tag{2.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\} &= g^{ah} [bc, h] \\
&= \frac{1}{2} g^{ad} \left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} \right) \\
&= \bar{g}^{ad} [\overline{bc}, d] \\
&= \left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\} \\
\left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} &= g^{\alpha\mu} [\beta\gamma, \mu] \\
&= \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} \right) \\
&= g^{*\alpha\mu} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}^*}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}^*}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}^*}{\partial x^\mu} \right) \\
\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}^*
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} a \\ \alpha c \end{matrix} \right\} &= g^{ah} [\alpha c, h] \\
&= \frac{1}{2} g^{ah} \left(\frac{\partial g_{\alpha h}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{ch}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha c}}{\partial x^h} \right) \\
\left\{ \begin{matrix} a \\ \alpha c \end{matrix} \right\} &= 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

elde edilir.

V_n, V_q, V_{n-q} uzaylarına ait kovaryant eğrilik tensörlerinin bileşenleri sırasıyla $R_{ijkl}, \bar{R}_{abcd}, R_{\alpha\beta\gamma\delta}^*$ olsun. Bu takdirde (1.2), (1.5), (1.6), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) ve (2.8) bağıntıları kullanılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma} &= g_{ab} R_{\alpha\beta\gamma}^b + g_{a\mu} R_{\alpha\beta\gamma}^\mu \\
&= g_{ab} R_{\alpha\beta\gamma}^b \\
&= g_{ab} \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left\{ \frac{b}{\alpha\gamma} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left\{ \frac{b}{\alpha\beta} \right\} + \left\{ \frac{b}{c\beta} \right\} \left\{ \frac{c}{\alpha\gamma} \right\} + \left\{ \frac{b}{\eta\beta} \right\} \left\{ \frac{\eta}{\alpha\gamma} \right\} - \left(\left\{ \frac{b}{d\gamma} \right\} \left\{ \frac{d}{\alpha\beta} \right\} + \left\{ \frac{b}{\eta\gamma} \right\} \left\{ \frac{\eta}{\alpha\beta} \right\} \right) \right] \\
&= g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left\{ \frac{b}{\alpha\gamma} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left\{ \frac{b}{\alpha\beta} \right\} + \left\{ \frac{b}{\eta\beta} \right\} \left\{ \frac{\eta}{\alpha\gamma} \right\} - \left\{ \frac{b}{\eta\gamma} \right\} \left\{ \frac{\eta}{\alpha\beta} \right\} \right) \\
&= g_{ab} \frac{1}{2} g^{bc} \frac{\partial \sigma}{\partial x^c} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}^*}{\partial x^\gamma} + \left\{ \frac{\eta}{\alpha\beta} \right\} g_{\eta\gamma}^* - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}^*}{\partial x^\beta} - \left\{ \frac{\eta}{\alpha\gamma} \right\} g_{\eta\beta}^* \right)
\end{aligned}$$

ifadesinde

$$\nabla_\gamma^* g_{\alpha\beta}^* = \frac{\partial g_{\alpha\beta}^*}{\partial x^\gamma} - \left\{ \frac{\eta}{\alpha\gamma} \right\} g_{\eta\beta}^* - \left\{ \frac{\eta}{\beta\gamma} \right\} g_{\alpha\eta}^* = 0$$

olduğu kullanılırsa

$$R_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} g_{ab} g^{bc} \frac{\partial \sigma}{\partial x^c} \left(\left\{ \frac{\eta}{\alpha\beta} \right\} g_{\eta\gamma}^* + \left\{ \frac{\eta}{\beta\gamma} \right\} g_{\alpha\eta}^* - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}^*}{\partial x^\beta} \right)$$

ifadesine ulaşılır.

Bu son bağıntıda $\nabla_\beta^* g_{\alpha\gamma}^* = \frac{\partial g_{\alpha\gamma}^*}{\partial x^\beta} - \left\{ \frac{\eta}{\alpha\beta} \right\} g_{\eta\gamma}^* - \left\{ \frac{\eta}{\gamma\beta} \right\} g_{\alpha\eta}^* = 0$ olduğu dikkate alınır

$$R_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (2.9)$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{a\beta}}{\partial x^\alpha \partial x^b} + \frac{\partial^2 g_{ab}}{\partial x^a \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{ab}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^a \partial x^b} + g_{hk} \left\{ \frac{k}{a\beta} \right\} \left\{ \frac{h}{\alpha b} \right\} - g_{hk} \left\{ \frac{k}{ab} \right\} \left\{ \frac{h}{\alpha\beta} \right\} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \nabla_b \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \right) g_{\alpha\beta}^* + \sigma g_{hk}^* \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \delta_\beta^k \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} \delta_\alpha^h - \bar{g}_{hk} \left\{ \frac{k}{ab} \right\} - \frac{1}{2} \bar{g}^{hc} \frac{\partial \sigma}{\partial x^c} g_{\alpha\beta}^* \\
&= -\frac{1}{2} \nabla_b \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \right) g_{\alpha\beta}^* + g_{\alpha\beta}^* \frac{1}{4} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} \frac{1}{\sigma} + \left\{ \frac{c}{ab} \right\} \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^c} \\
&= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}^* \left(-\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^b \partial x^a} + \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} + \left\{ \frac{c}{ab} \right\} \frac{\partial \sigma}{\partial x^c} \right)
\end{aligned}$$

Eğer $T_{ab} = \nabla_b \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \right) - \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b}$ olarak tanımlanırsa

$$R_{\alpha\alpha\beta\beta} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta}^* T_{\alpha\beta} \quad (2.10)$$

sonucu elde edilir.

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \right) + g_{hk} \left\{ \begin{matrix} k \\ \alpha\delta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} - g_{hk} \left\{ \begin{matrix} k \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} h \\ \beta\delta \end{matrix} \right\} \\ &= \sigma R_{\alpha\beta\gamma\delta}^* + g_{hk} \left(-\frac{1}{2} \bar{g}^{kb} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} g_{\alpha\delta}^* \right) \left(-\frac{1}{2} \bar{g}^{ha} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} g_{\beta\gamma}^* \right) \\ &\quad - g_{hk} \left(-\frac{1}{2} \bar{g}^{kb} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} g_{\alpha\gamma}^* \right) \left(-\frac{1}{2} \bar{g}^{ha} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} g_{\beta\delta}^* \right) \\ &= \sigma R_{\alpha\beta\gamma\delta}^* - \frac{1}{4} g^{ab} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} (g_{\alpha\gamma}^* g_{\beta\delta}^* - g_{\alpha\delta}^* g_{\beta\gamma}^*) \\ &= \sigma R_{\alpha\beta\gamma\delta}^* + g^{ab} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} (g_{\alpha\delta}^* g_{\beta\gamma}^* - g_{\alpha\gamma}^* g_{\beta\delta}^*) \end{aligned}$$

Eğer $\Delta\sigma = g^{ab} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b}$ olarak tanımlanırsa

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sigma R_{\alpha\beta\gamma\delta}^* + \frac{1}{4} \Delta\sigma (g_{\alpha\delta}^* g_{\beta\gamma}^* - g_{\alpha\gamma}^* g_{\beta\delta}^*) \quad (2.11)$$

olduğu sonucuna varılır.

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= g_{ac} R_{bcd}^e + g_{ad} R_{bcd}^e \\ &= g_{ac} R_{bcd}^e \\ &= g_{ac} \left(\frac{\partial}{\partial x^c} \left\{ \begin{matrix} e \\ bd \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^d} \left\{ \begin{matrix} e \\ bc \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} e \\ ic \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ bd \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} e \\ id \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i \\ bc \end{matrix} \right\} \right) \\ &= g_{ac} \left[\frac{\partial}{\partial x^c} \left\{ \begin{matrix} e \\ bd \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^d} \left\{ \begin{matrix} e \\ bc \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} e \\ fc \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} f \\ bd \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} e \\ \mu c \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ bd \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} e \\ zd \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} z \\ bc \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} e \\ \gamma d \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ bc \end{matrix} \right\} \right] \\ &= g_{ac} \left(\frac{\partial}{\partial x^c} \left\{ \begin{matrix} e \\ bd \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^d} \left\{ \begin{matrix} e \\ bc \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} e \\ fc \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} f \\ bd \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} e \\ zd \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} z \\ bc \end{matrix} \right\} \right) \\ &= \bar{g}_{ae} \left(\frac{\partial}{\partial x^c} \left\{ \begin{matrix} e \\ bd \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^d} \left\{ \begin{matrix} e \\ bc \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} e \\ fc \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} f \\ bd \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} e \\ zd \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} z \\ bc \end{matrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

ve buradan

$$R_{abcd} = \bar{R}_{abcd} \quad (2.12)$$

elde edilir.

V_n, V_q, V_{n-q} uzaylarına ait Ricci tensörünün bileşenleri sırasıyla $R_{ij}, \bar{R}_{ab}$ ve $R^*_{\alpha\beta}$ olsun. (1.2), (1.6), (1.7), (2.10), (2.11) ve (2.12) bağıntıları gözönüne alındığında aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned}
 R_{ab} &= g^{cd} R_{cabd} + g^{\alpha\beta} R_{\alpha ab\beta} \\
 &= g^{cd} R_{cabd} + \frac{1}{\sigma} g^{\alpha\beta} \frac{1}{2} g^*_{\alpha\beta} T_{ab} \\
 &= \bar{g}^{cd} \bar{R}_{cabd} + \frac{1}{2\sigma} T_{ab} g^*_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \\
 R_{ab} &= \bar{R}_{ab} + \frac{1}{2\sigma} (n-q) T_{ab}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha\beta} &= g^{ab} R_{a\alpha\beta b} + g^{\gamma\delta} R_{\gamma\alpha\beta\delta} \\
 &= g^{ab} \frac{1}{2} g^*_{\alpha\beta} T_{ab} + \frac{1}{\sigma} g^{\gamma\delta} \left[\sigma R^*_{\gamma\alpha\beta\delta} + \frac{1}{4} g^{ab} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} (g^*_{\gamma\delta} g^*_{\alpha\beta} - g^*_{\gamma\beta} - g^*_{\alpha\delta}) \right] \\
 &= g^{ab} \frac{1}{2} g^*_{\alpha\beta} T_{ab} + R^*_{\alpha\beta} + \frac{1}{4\sigma} \Delta \sigma [(n-q) g^*_{\alpha\beta} - g^*_{\alpha\beta}] \\
 &= \frac{1}{2} g^{ab} g^*_{\alpha\beta} T_{ab} + R^*_{\alpha\beta} + \left(\frac{n-q-1}{4\sigma} \right) \Delta \sigma g^*_{\alpha\beta} \\
 R_{\alpha\beta} &= \frac{g^*_{\alpha\beta}}{2} \left[g^{ab} T_{ab} + \left(\frac{n-q-1}{2\sigma} \right) \Delta \sigma \right] + R^*_{\alpha\beta}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 R_{a\alpha} &= g^{cd} R_{ca\alpha d} + g^{\gamma\delta} R_{\gamma a\alpha \delta} = 0 \\
 R_{a\alpha} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Şimdi genelleştirilmiş rekürant yarı-ayrılabilir Riemann uzayları ile ilgili aşağıdaki teoremi ispat edelim.

Teorem 2.1 V_n genelleştirilmiş rekürant yarı-ayrılabilir bir Riemann uzayı olsun. Bu takdirde V_q ve V_{n-q} tamamlayıcı uzayları sırasıyla genelleştirilmiş rekürant ve sabit eğrilikli Riemann uzayları olur.

İspat: V_n uzayı genelleştirilmiş rekürant olduğundan (2.1) bağıntısı kullanılırsa

$$\nabla_f \nabla_e R_{abcd} = \lambda_f \nabla_e R_{abcd} + b_{ef} R_{abcd} \tag{2.16}$$

elde edilir. Diğer taraftan, kovaryant türev tanımı kullanılır ve (2.5), (2.6), (2.12) bağıntıları dikkate alınır

$$\begin{aligned}
 \nabla_e R_{abcd} &= \frac{\partial R_{abcd}}{\partial x^e} - R_{ibcd} \left\{ \begin{matrix} i \\ ae \end{matrix} \right\} - R_{aibc} \left\{ \begin{matrix} i \\ be \end{matrix} \right\} - R_{abid} \left\{ \begin{matrix} i \\ ce \end{matrix} \right\} - R_{abci} \left\{ \begin{matrix} i \\ de \end{matrix} \right\} \\
 &= \frac{\partial R_{abcd}}{\partial x^e} - \left(R_{fbcd} \left\{ \begin{matrix} f \\ ae \end{matrix} \right\} + R_{\mu bcd} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ ae \end{matrix} \right\} \right) - \left(R_{afcd} \left\{ \begin{matrix} f \\ be \end{matrix} \right\} + R_{a\mu cd} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ be \end{matrix} \right\} \right) \\
 &\quad - \left(R_{abfd} \left\{ \begin{matrix} f \\ ce \end{matrix} \right\} + R_{ab\mu d} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ ce \end{matrix} \right\} \right) - \left(R_{abcf} \left\{ \begin{matrix} f \\ de \end{matrix} \right\} + R_{abc\mu} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ de \end{matrix} \right\} \right) \\
 &= \frac{\partial R_{abcd}}{\partial x^e} - R_{fbcd} \left\{ \begin{matrix} f \\ ae \end{matrix} \right\} - R_{afcd} \left\{ \begin{matrix} f \\ be \end{matrix} \right\} - R_{abfd} \left\{ \begin{matrix} f \\ ce \end{matrix} \right\} - R_{abcf} \left\{ \begin{matrix} f \\ de \end{matrix} \right\} \\
 &= \frac{\partial \bar{R}_{abcd}}{\partial x^e} - \bar{R}_{fbcd} \left\{ \begin{matrix} f \\ ae \end{matrix} \right\} - \bar{R}_{afcd} \left\{ \begin{matrix} f \\ be \end{matrix} \right\} - \bar{R}_{abfd} \left\{ \begin{matrix} f \\ ce \end{matrix} \right\} - \bar{R}_{abcf} \left\{ \begin{matrix} f \\ de \end{matrix} \right\} \\
 \nabla_e R_{abcd} &= \bar{\nabla}_e \bar{R}_{abcd}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

bulunur.

Bulunan bu son bağıntı kullanılırsa benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 \nabla_f (\nabla_e R_{abcd}) &= \frac{\partial}{\partial x^f} (\nabla_e R_{abcd}) - (\nabla_i R_{abcd}) \left\{ \begin{matrix} i \\ ef \end{matrix} \right\} - (\nabla_e R_{ibcd}) \left\{ \begin{matrix} i \\ af \end{matrix} \right\} \\
 &\quad - (\nabla_e R_{aibc}) \left\{ \begin{matrix} i \\ bf \end{matrix} \right\} - (\nabla_e R_{abid}) \left\{ \begin{matrix} i \\ cf \end{matrix} \right\} - (\nabla_e R_{abci}) \left\{ \begin{matrix} i \\ df \end{matrix} \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^f} (\bar{\nabla}_e \bar{R}_{abcd}) - (\bar{\nabla}_g \bar{R}_{abcd}) \left\{ \begin{matrix} g \\ ef \end{matrix} \right\} - (\bar{\nabla}_e \bar{R}_{gbcd}) \left\{ \begin{matrix} g \\ af \end{matrix} \right\} \\
 &\quad - (\bar{\nabla}_e \bar{R}_{aibd}) \left\{ \begin{matrix} g \\ bf \end{matrix} \right\} - (\bar{\nabla}_e \bar{R}_{abid}) \left\{ \begin{matrix} g \\ cf \end{matrix} \right\} - \left(\bar{\nabla}_e \bar{R}_{abci} \left\{ \begin{matrix} g \\ df \end{matrix} \right\} \right) \\
 \nabla_f (\nabla_e R_{abcd}) &= \bar{\nabla}_f (\bar{\nabla}_e \bar{R}_{abcd})
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

elde edilir.

(2.12), (2.17), (2.18) bağıntıları göz önüne alınırsa (2.16) bağıntısı,

$$\bar{\nabla}_f \bar{\nabla}_e \bar{R}_{abcd} = \lambda_f \bar{\nabla}_e \bar{R}_{abcd} + b_{ef} \bar{R}_{abcd} \tag{2.19}$$

şekline dönüştür. Bulunan bu son bağıntı V_q tamamlayıcı uzayının genelleştirilmiş rekürant olduğunu gösterir.

Kovaryant türev tanımı kullanılırsa

$$\nabla_\delta \nabla_b R_{\alpha\beta\gamma} = \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} R_{\delta\alpha\beta\gamma}^* + A_{ab} (g_{\alpha\beta}^* g_{\delta\gamma}^* - g_{\delta\beta}^* g_{\alpha\gamma}^*) \quad (2.20)$$

bulunur. Burada A_{ab} ikinci mertebeden kovaryant bir tensörün bileşenleri olup

$$A_{ab} = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} \Delta\sigma - \frac{1}{8\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial(\Delta\sigma)}{\partial x^b} - \frac{3}{16\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} \frac{\partial(\Delta\sigma)}{\partial x^a} + \frac{1}{4} \frac{\partial \sigma}{\partial x^m} \nabla_b T_{am} \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$R_{\alpha\beta\gamma} = 0$ olduğundan

$$\nabla_b R_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (2.22)$$

$$\nabla_\delta \nabla_b R_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (2.23)$$

dır.

(2.20) ve (2.23) bağıntıları kullanılırsa

$$\frac{3}{4} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} R_{\delta\alpha\beta\gamma}^* + A_{ab} (g_{\alpha\beta}^* g_{\delta\gamma}^* - g_{\delta\beta}^* g_{\alpha\gamma}^*) = 0 \quad (2.24)$$

bulunur.

(2.24) bağıntısının her iki tarafı $g^{*\alpha\beta}$ ile çarpılıp, α, β indisleri üzerine toplam alınır ve (1.6), (1.7) bağıntıları kullanılırsa

$$\frac{3}{4\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} R_{\delta\gamma}^* + A_{ab} (n - q - 1) g_{\delta\gamma}^* = 0 \quad (2.25)$$

elde edilir.

(2.25) bağıntısının her iki tarafı $g^{*\delta\gamma}$ ile çarpılıp, δ, γ indisleri üzerine toplam alınır ve (1.9) bağıntısı kullanılırsa

$$\frac{3}{4\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} R^* + A_{ab} (n - q - 1)(n - q) = 0 \quad (2.26)$$

bulunur. Buradan,

$$A_{ab} = -\frac{1}{(n-q)(n-q-1)} \frac{3}{4\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} R^* \quad (2.27)$$

elde edilir.

(2.27) bağıntısı (2.23)'de yerine konursa

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}^* = \frac{R^*}{(n-q)(n-q-1)} (g_{\alpha\beta}^* g_{\delta\gamma}^* - g_{\delta\beta}^* g_{\alpha\gamma}^*) \quad (2.28)$$

bulunur. Bu son bağıntı V_{n-q} Riemann uzayının sabit eğrilikli olduğunu gösterir.

Teorem 2.2: V_n , genelleştirilmiş rekürant yarı-ayrılabilir bir Riemann uzayı ise,

$$\nabla_f \nabla_e T_{bc} - \left(\lambda_f + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} \right) \nabla_e T_{bc} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \nabla_f T_{bc} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^e \partial x^f} + \frac{2}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} - b_{ef} \right) T_{bc} = 0$$

bağıntısı gerçekleşir.

İspat: (1.2) ve (2.10) bağıntıları kullanılırsa

$$\nabla_e R_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\sigma} g_{\alpha\beta} \nabla_e T_{bc} - \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} g_{\alpha\beta} T_{bc}$$

yani

$$\nabla_e R_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\sigma} g_{\alpha\beta} \left(\nabla_e T_{bc} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} T_{bc} \right) \quad (2.29)$$

bulunur.

(2.29) bağıntısının her iki tarafını x^f koordinatına göre kovaryant türevi alınır ve (1.2) bağıntısı dikkate alınır

$$\begin{aligned} \nabla_f \nabla_e R_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}^* \left(\nabla_f \nabla_e T_{bc} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^e \partial x^f} T_{bc} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} T_{bc} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \nabla_f T_{bc} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}^* \left(\nabla_e T_{bc} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} T_{bc} \right) \left(-\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} \right) \\ &= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}^* \left(\nabla_f \nabla_e T_{bc} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^e \partial x^f} T_{bc} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} T_{bc} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \nabla_f T_{bc} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}^* \left(-\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} \nabla_e T_{bc} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} T_{bc} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned} \nabla_f \nabla_e R_{\alpha b c \beta} = & \frac{1}{2} g_{\alpha \beta}^* (\nabla_f \nabla_e T_{bc} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^e \partial x^f} T_{bc} + \frac{2}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} T_{bc} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \nabla_f T_{bc} \\ & - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} \nabla_e T_{bc}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

bulunur.

Diğer taraftan, V_n uzayı genelleştirilmiş rekürant Riemann uzayı olduğundan

$$\nabla_f \nabla_e R_{\alpha b c \beta} = \lambda_f \nabla_e R_{\alpha b c \beta} + b_{ef} R_{\alpha b c \beta} \quad (2.31)$$

yazılabilir.

(2.29) ve (2.30) bağıntıları (2.31)'de yerine konursa

$$\begin{aligned} \nabla_f \nabla_e T_{bc} - \left(\lambda_f + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} \right) \nabla_e T_{bc} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \nabla_f T_{bc} \\ + \left(\frac{1}{\sigma} \lambda_f \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^e \partial x^f} + \frac{2}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} - b_{ef} \right) T_{bc} = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

elde edilir.

Şimdi genelleştirilmiş Ricci rekürant yarı-ayrılabilir Riemann uzayları ile ilgili aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2.3: V_n , genelleştirilmiş Ricci rekürant yarı-ayrılabilir bir Riemann uzayı olsun. Bu takdirde V_{n-q} tamamlayıcı uzayı bir Einstein uzayıdır.

İspat: V_n uzayı genelleştirilmiş Ricci rekürant olduğundan (2.2) bağıntısından

$$\nabla_\beta \nabla_b R_{\alpha\alpha} = \lambda_\beta \nabla_b R_{\alpha\alpha} + b_{b\beta} R_{\alpha\alpha} \quad (2.33)$$

yazılabilir.

(2.15) bağıntısı göz önüne alınırsa, $\nabla_b R_{\alpha\alpha} = 0$ ve

$$\nabla_\beta \nabla_b R_{\alpha\alpha} = 0 \quad (2.34)$$

bulunur. Diğer taraftan (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7), (2.8), (2.13), (2.14), (2.15) bağıntıları kullanılırsa

$$\nabla_\beta \nabla_b R_{\alpha\alpha} = \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} R_{\alpha\beta}^* + B_{ab} g_{\alpha\beta}^* \quad (2.35)$$

elde edilir.

Burada $T = T_{ab} \bar{g}^{ab}$, $P = T + \frac{1}{2\sigma}(n-q-1)\Delta\sigma$ olmak üzere

$$B_{ab} = \frac{3}{8} \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial\sigma}{\partial x^a} \frac{\partial\sigma}{\partial x^b} P - \frac{1}{4} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial x^a} \frac{\partial P}{\partial x^b} + \frac{1}{2} \left[\nabla_b \bar{R}_{am} + \frac{1}{2}(n-q) \left(\nabla_b T_{am} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial x^b} T_{am} \right) \right] \frac{\partial\sigma}{\partial x^p} g^{mp} \\ - \frac{1}{4\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial x^b} \left[R_{am} + \frac{1}{2\sigma}(n-q)T_{am} \right] \frac{\partial\sigma}{\partial x^p} g^{mp}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

(2.34) ve (2.35) bağıntıları göz önüne alınırsa

$$\frac{3}{4} \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial\sigma}{\partial x^a} \frac{\partial\sigma}{\partial x^b} R_{\alpha\beta}^* + B_{ab} g_{\alpha\beta}^* = 0 \quad (2.36)$$

elde edilir.

Bulunan bu son bağıntının her iki tarafı $g^{*\alpha\beta}$ ile çarpılıp α ve β indisleri üzerine toplam alınır ve (1.9) bağıntısı kullanılırsa

$$\frac{3}{4} \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial\sigma}{\partial x^a} \frac{\partial\sigma}{\partial x^b} R^* + B_{ab} (n-q) = 0 \quad (2.37)$$

bulunur. (2.37) bağıntısından

$$B_{ab} = -\frac{1}{n-q} \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial\sigma}{\partial x^a} \frac{\partial\sigma}{\partial x^b} R^* \quad (2.38)$$

elde edilir.

(2.38) bağıntısı (2.36)'da yerine yazılırsa

$$R_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{n-q} R^* g_{\alpha\beta}^* \quad (2.39)$$

bulunur.

Bulunan bu son bağıntı V_{n-q} tamamlayıcı uzayının bir Einstein uzayı olduğunu gösterir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.4: V_n genelleştirilmiş Ricci rekürant yarı-ayrılabilir bir Riemann uzayı olsun. Bu takdirde,

$$A_{bcef} = \nabla_f \nabla_e T_{bc} - \left(\lambda_f + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} \right) \nabla_e T_{bc} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \nabla_f T_{bc} \\ + \left(\frac{1}{\sigma} \lambda_f \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^e \partial x^f} + \frac{2}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} - b_{ef} \right) T_{bc}$$

olmak üzere

$$\bar{\nabla}_f \bar{\nabla}_e \bar{R}_{bc} = \lambda_f \bar{\nabla}_e \bar{R}_{bc} + b_{ef} \bar{R}_{bc} - \frac{n-q}{2\sigma} A_{bcef} \quad (2.40)$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat: Kovaryant türev tanımı kullanılırsa

$$\nabla_e R_{bc} = \frac{\partial R_{bc}}{\partial x^e} - R_{ic} \left\{ \begin{matrix} i \\ be \end{matrix} \right\} - R_{bi} \left\{ \begin{matrix} i \\ ce \end{matrix} \right\} \quad (2.41)$$

elde edilir.

(2.41) bağıntısında (2.6) ve (2.15) bağıntıları kullanılırsa

$$\nabla_e R_{bc} = \frac{\partial R_{bc}}{\partial x^e} - R_{ac} \left\{ \begin{matrix} a \\ be \end{matrix} \right\} - R_{ba} \left\{ \begin{matrix} a \\ ce \end{matrix} \right\}$$

yani,

$$\nabla_e R_{bc} = \bar{\nabla}_e R_{bc} \quad (2.42)$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$\nabla_f \nabla_e R_{bc} = \bar{\nabla}_f \bar{\nabla}_e R_{bc} \quad (2.43)$$

olduğu görülür.

(2.13) ve (2.42) bağıntıları dikkate alınır

$$\bar{\nabla}_e R_{bc} = \bar{\nabla}_e \bar{R}_{bc} - \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} (n-q) \Gamma_{bc} + \frac{1}{2\sigma} (n-q) \bar{\nabla}_e T_{bc} \quad (2.44)$$

(2.44) bağıntısının her iki tarafı x^f koordinatına göre kovaryant türevi alınır ve (2.43) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_f \bar{\nabla}_e R_{bc} &= \bar{\nabla}_f \bar{\nabla}_e \bar{R}_{bc} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} (n-q) \bar{\nabla}_f T_{bc} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^e \partial x^f} (n-q) T_{bc} + \frac{1}{\sigma^3} (n-q) \frac{\partial \sigma}{\partial x^e} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} T_{bc} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^f} (n-q) \bar{\nabla}_e T_{bc} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma} (n-q) \bar{\nabla}_f \bar{\nabla}_e T_{bc}\end{aligned}\quad (2.45)$$

elde edilir.

Diğer taraftan V_n uzayı Ricci rekürant olduğundan

$$\bar{\nabla}_f \bar{\nabla}_e R_{bc} = \lambda_f \bar{\nabla}_e R_{bc} + b_{ef} R_{bc} \quad (2.46)$$

dir.

(2.46) bağıntısında, (2.13), (2.44) ve (2.45) bağıntıları yerine konursa (2.40) bağıntısı bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.1: V_n , genelleştirilmiş Ricci rekürant, yarı-ayrılabilir bir Riemann uzayı olsun. Eğer $A_{bcef} = 0$ ise V_q tamamlayıcı uzayı Ricci rekürant uzaydır.

İspat: Teorem 2.4'de $A_{bcef} = 0$ alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

3. KONFORM REKÜRANT ve KONFORM BİREKÜRANT YARI-AYRILABİLİR RIEMANN UZAYLARI

Bilindiği üzere V_n Riemann uzayına ait C_{hijk} konform eğrilik tensörünün bileşenleri

$$C_{hijk} = R_{hijk} - \frac{1}{n-2} (g_{hk} R_{ij} - g_{hj} R_{ik} + g_{ij} R_{hk} - g_{ik} R_{hj}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{hk} g_{ij} - g_{hj} g_{ik}) \quad (3.1)$$

dır (Deszcz vd., 1995).

a_e , kovaryant bir vektör alanının bileşenleri olmak üzere C_{hijk} konform eğrilik tensörü

$$\nabla_e C_{hijk} = a_e C_{hijk} \quad (3.2)$$

bağıntısını sağlıyorsa V_n uzayı konform rekürant uzay olarak adlandırılır.

h_m ikinci mertebeden kovaryant bir tensörün bileşenleri olmak üzere C_{hijk} konform eğrilik tensörü

$$\nabla_n \nabla_r C_{hijk} = h_m C_{hijk} \quad (3.3)$$

bağıntısını gerçeklerse V_n uzayı konform birekürant uzay olarak adlandırılır.

Bu bölümde konform rekürant ve birekürant yarı-ayrılabilir Riemann uzayları ele alınacaktır. İlk önce konform rekürant yarı-ayrılabilir Riemann uzayları ile ilgili olarak aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.1: V_n konform rekürant yarı-ayrılabilir bir Riemann uzayı olsun. Bu takdirde V_q tamamlayıcı uzayı konform reküranttır.

İspat: (2.12), (2.17), (3.1) ve (3.2) bağıntıları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \bar{R}_{abcd} = a_e \left[\bar{R}_{abcd} - \frac{1}{(n-2)} (g_{ad} R_{bc} - g_{ac} R_{bd} + g_{bc} R_{ad} - g_{bd} R_{ac}) \right. \\ \left. + \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{ad} g_{bc} - g_{ac} g_{bd}) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir.

(3.4) bağıntısının her iki tarafı g^{bc} ile çarpılıp b ve c indisleri üzerine toplam alınır ve (1.7) bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \bar{\nabla}_e \bar{R}_{ad} - \frac{1}{n-2} [g_{ad} g^{bc} \nabla_e R_{bc} + (q-2) \nabla_e R_{ad}] + \frac{q-1}{(n-1)(n-2)} g_{ad} \nabla_e R \\
& = a_e \left\{ \bar{R}_{ad} - \frac{1}{n-2} [g_{ad} g^{bc} R_{bc} + (q-2) R_{ad}] + \frac{q-1}{(n-1)(n-2)} R g_{ad} \right\}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

bulunur.

(3.5) bağıntısının her iki tarafı g^{ad} ile çarpılıp a ve d indisleri üzerine toplam alınır ve (1.9) bağıntısı dikkate alınır

$$\begin{aligned}
& \bar{\nabla}_e \bar{R} - \frac{1}{n-2} q g^{bc} \nabla_e R_{bc} - \frac{q-2}{n-2} g^{ad} \nabla_e R_{ad} + \frac{q(q-1)}{(n-1)(n-2)} \nabla_e R \\
& = a_e \left(\bar{R} - \frac{1}{n-2} q g^{bc} R_{bc} - \frac{1}{n-2} (q-2) g^{ad} R_{ad} + \frac{q(q-1)}{(n-1)(n-2)} R \right)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir.

Bulunan bu son bağıntıdan

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{n-2} g^{bc} \nabla_e R_{bc} = -\frac{1}{2(q-1)} \bar{\nabla}_e \bar{R} - \frac{q}{2(n-1)(n-2)} \nabla_e R \\
& \quad + a_e \left\{ \frac{1}{2(q-1)} \bar{R} - \frac{1}{n-2} g^{bc} R_{bc} + \frac{q}{2(n-1)(n-2)} R \right\}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

yazılabilir.

(3.5) bağıntısında (3.7) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \bar{\nabla}_e \bar{R}_{ad} - \frac{\bar{\nabla}_e \bar{R}}{2(q-1)} g_{ad} - \frac{q}{2(n-1)(n-2)} g_{ad} \nabla_e R \\
& + a_e \left[\frac{\bar{R} g_{ad}}{2(q-1)} - \frac{g^{bc} R_{bc}}{n-2} g_{ad} + \frac{q}{2(n-1)(n-2)} R g_{ad} \right] - \frac{q-2}{n-2} \nabla_e R_{ad} + \frac{q-1}{(n-1)(n-2)} g_{ad} \nabla_e R \\
& = a_e \left\{ \bar{R}_{ad} - \frac{1}{n-2} [g_{ad} g^{bc} R_{bc} + (q-2) R_{ad}] + \frac{q-1}{(n-1)(n-2)} R g_{ad} \right\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n-2}\nabla_e R_{ad} = & -\frac{1}{q-2}\bar{\nabla}_e \bar{R}_{ad} + \frac{g_{ad}\bar{\nabla}_e \bar{R}}{2(q-1)(q-2)} - \frac{g_{ad}\nabla_e R}{2(n-1)(n-2)} \\
& + a_e \left[-\frac{\bar{R}}{2(q-1)(q-2)}g_{ad} + \frac{1}{q-2}\bar{R}_{ad} - \frac{1}{n-2}R_{ad} + \frac{R}{2(n-1)(n-2)}g_{ad} \right] \quad (3.9)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.9) bağıntısı (3.4)'de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \bar{\nabla}_e \bar{R}_{abcd} + g_{ad} \left\{ -\frac{1}{q-2}\bar{\nabla}_e \bar{R}_{bc} + \frac{\bar{\nabla}_e \bar{R}}{2(q-1)(q-2)}g_{bc} - \frac{\nabla_e R}{2(n-1)(n-2)}g_{bc} \right. \\
& + a_e \left[-\frac{\bar{R}}{2(q-1)(q-2)}g_{bc} + \frac{1}{q-2}\bar{R}_{bc} - \frac{1}{n-2}R_{bc} + \frac{R}{2(n-1)(n-2)}g_{bc} \right] \Big\} \\
& - g_{ac} \left\{ -\frac{1}{q-2}\bar{\nabla}_e \bar{R}_{bd} + \frac{\bar{\nabla}_e \bar{R}}{2(q-1)(q-2)}g_{bd} - \frac{\nabla_e R}{2(n-1)(n-2)}g_{bd} \right. \\
& + a_e \left[-\frac{\bar{R}}{2(q-1)(q-2)}g_{bd} + \frac{1}{q-2}\bar{R}_{bd} - \frac{1}{n-2}R_{bd} + \frac{R}{2(n-1)(n-2)}g_{bd} \right] \Big\} \\
& + g_{bc} \left\{ -\frac{1}{q-2}\bar{\nabla}_e \bar{R}_{ad} + \frac{\bar{\nabla}_e \bar{R}}{2(q-1)(q-2)}g_{ad} - \frac{\nabla_e R}{2(n-1)(n-2)}g_{ad} \right. \\
& + a_e \left[-\frac{\bar{R}}{2(q-1)(q-2)}g_{ad} + \frac{1}{q-2}\bar{R}_{ad} - \frac{1}{n-2}R_{ad} + \frac{R}{2(n-1)(n-2)}g_{ad} \right] \Big\} \\
& - g_{bd} \left\{ -\frac{1}{q-2}\bar{\nabla}_e \bar{R}_{ac} + \frac{\bar{\nabla}_e \bar{R}}{2(q-1)(q-2)}g_{ac} - \frac{\nabla_e R}{2(n-1)(n-2)}g_{ac} \right. \\
& + a_e \left[-\frac{\bar{R}}{2(q-1)(q-2)}g_{ac} + \frac{1}{q-2}\bar{R}_{ac} - \frac{1}{n-2}R_{ac} \right. \\
& + \left. \frac{R}{2(n-1)(n-2)}g_{ac} + \frac{\nabla_e R}{(n-1)(n-2)}(g_{ad}g_{bc} - g_{ac}g_{bd}) \right] \Big\} \\
& = a_e \left[\bar{R}_{abcd} - \frac{1}{n-2}(g_{ad}R_{bc} - g_{ac}R_{bd} + g_{bc}R_{ad} - g_{bd}R_{ac}) \right. \\
& + \left. \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ad}g_{bc} - g_{ac}g_{bd}) \right] \quad (3.10)
\end{aligned}$$

bulunur.

Bulunan bu son bağıntıda sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \bar{\nabla}_e \bar{R}_{abcd} - \frac{1}{q-2} (g_{ad} \bar{\nabla}_e \bar{R}_{bc} - g_{ac} \bar{\nabla}_e \bar{R}_{bd} + g_{bc} \bar{\nabla}_e \bar{R}_{ad} - g_{bd} \bar{\nabla}_e \bar{R}_{ac}) \\
& + \frac{\bar{\nabla}_e \bar{R}}{(q-1)(q-2)} (g_{ad} g_{bc} - g_{ac} g_{bd}) \\
& = a_e \left[\bar{R}_{abcd} - \frac{1}{q-2} (g_{ad} \bar{R}_{bc} - g_{ac} \bar{R}_{bd} + g_{bc} \bar{R}_{ad} - g_{bd} \bar{R}_{ac}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\bar{R}}{(q-1)(q-2)} (g_{ad} g_{bc} - g_{ac} g_{bd}) \right] \tag{3.11}
\end{aligned}$$

yani

$$\bar{\nabla}_e \bar{C}_{abcd} = a_e \bar{C}_{abcd} \tag{3.12}$$

elde edilir.

(3.12) bağıntısı V_q tamamlayıcı uzayının konform rekürant olduğunu uzay olduğunu gösterir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi konform birekürant yarı-ayrılabilir Riemann uzayları ile ilgili aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.2: V_n konform birekürant yarı-ayrılabilir bir Riemann uzayı olsun. Bu taktirde V_{n-q} tamamlayıcı uzayı bir Einstein uzayıdır.

İspat: (1.2) ve (2.15) bağıntıları (3.1)'de dikkate alınır

$$C_{\alpha\beta\gamma} = 0 \tag{3.13}$$

bulunur.

(3.3) ve (3.13) bağıntıları kullanılırsa

$$\nabla_\delta \nabla_b C_{\alpha\beta\gamma} = 0 \tag{3.14}$$

elde edilir.

(3.14) bağıntısı (3.1) yardımıyla

$$\nabla_\delta \nabla_b R_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{n-2} (g_{\alpha\beta} \nabla_\delta \nabla_b R_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma} \nabla_\delta \nabla_b R_{\alpha\beta}) = 0 \tag{3.15}$$

şekline dönüşür.

(3.15)'de (2.20) ve (2.35) bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} R_{\delta\alpha\beta\gamma}^* + A_{ab} (g_{\alpha\beta}^* g_{\delta\gamma}^* - g_{\delta\beta}^* g_{\alpha\gamma}^*) - \frac{\sigma}{n-2} (g_{\alpha\beta}^* g_{\delta\gamma}^* - g_{\alpha\gamma}^* g_{\beta\delta}^*) B_{ab} \\ & - \frac{1}{n-2} \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} (g_{\alpha\beta}^* R_{\gamma\delta}^* - g_{\alpha\gamma}^* R_{\beta\gamma}^*) = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir.

Eğer $E_{ab} = A_{ab} - \frac{\sigma}{n-2} B_{ab}$ olarak tanımlanırsa bulunan bu son denklem

$$\frac{3}{4} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} R_{\delta\alpha\beta\gamma}^* + E_{ab} (g_{\alpha\beta}^* g_{\gamma\delta}^* - g_{\alpha\gamma}^* g_{\beta\gamma}^*) - \frac{1}{n-2} \frac{3}{4} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} (g_{\alpha\beta}^* R_{\gamma\delta}^* - g_{\alpha\gamma}^* R_{\beta\gamma}^*) = 0 \quad (3.17)$$

şekline dönüşür.

(3.17) bağıntısının her iki tarafı $g^{*\alpha\beta}$ ile çarpılıp α ve β indisleri üzerinden toplam alınır ve

(1.7) bağıntısı kullanılırsa

$$\frac{3}{4} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^a} \frac{\partial \sigma}{\partial x^b} \frac{q-1}{n-2} R_{\delta\gamma}^* = -(n-q-1) g_{\delta\gamma}^* E_{ab} \quad (3.18)$$

elde edilir.

Bulunan bu son bağıntının her iki tarafı $g^{*\delta\gamma}$ ile çarpılıp δ ve γ indisleri üzerine toplam alınır,

(1.9) bağıntısı kullanılırsa

$$R_{\delta\gamma}^* = \frac{R^*}{n-q} g_{\delta\gamma}^* \quad (3.19)$$

bulunur.

(3.19) bağıntısı V_{n-q} tamamlayıcı uzayının bir Einstein uzayı olduğunu gösterir. Böylece

ispat tamamlanmış olur.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

V_n , genelleştirilmiş rekürant yarı-ayrılabilir bir Riemann uzayı ise V_q ve V_{n-q} tamamlayıcı uzayları sırasıyla genelleştirilmiş rekürant ve sabit eğrilikli Riemann uzayları olur.

V_n , genelleştirilmiş Ricci rekürant yarı-ayrılabilir bir Riemann uzayı olsun.Bu taktirde V_{n-q} tamamlayıcı uzayı bir Einstein uzayıdır.

V_n , konform rekürant yarı-ayrılabilir bir Riemann uzayı olsun.Bu takdirde V_q tamamlayıcı uzayı konform reküranttır.

V_n , konform birekürant yarı-ayrılabilir bir Riemann uzayı olsun.Bu takdirde V_{n-q} tamamlayıcı uzayı bir Einstein uzayıdır.



KAYNAKLAR

De, U. C., (1992), "Semi-Decomposable Generalized 2-Recurrent and 2-Ricci Recurrent Riemannian Spaces", J. Indian Acad. Math., Vol.14 No.2, 152-159

Deszcz, R., Verstraelen, L., Yaprak, Ş., (1995), "Hypersurface with pseudosymmetric Weyl tensor in conformally flat manifolds", Dept. Math., Agricultural Univ. Wroclaw, No.32

Weatherburn, C. E., (1966), "An introduction to Riemannian geometry and the tensor calculus", Cambridge



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 01.04.1977

Doğum yeri İstanbul

Lise 1992-1995 T. E. D. Zonguldak Koleji

Lisans 1995-2001 İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

2002-2003 Şırnak Cizre Vali Kamil Acun İlköğretim Okulu

2003-Devam ediyor İstanbul Fatih Kocamustafapaşa Lisesi