

768485

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DÜZGÜN UZAYLAR

Matematikçi Gamze TORCU

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdül

Prof. Dr. Ehlilman Adıgüzelov

Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜL

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜL (Y.T.Ü.)

Prof. Dr. Mustafa Sıral

[Signature]

İSTANBUL, 2005

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. KÖŞEĞEN DÜZGÜNLÜKLER.....	2
3. DÜZGÜN ÖRTÜLER.....	13
4. DÜZGÜN ÇARPIMLAR VE ALT UZAYLAR, ZAYIF DÜZGÜNLÜKLER ...	20
5. DÜZGÜNLEŞTİRİLEBİLİRLİK VE DÜZGÜN METRİKLENEBİLİRLİK	26
6. TAM DÜZGÜN UZAYLAR; TAMLAMA	31
7. YAKINLIK UZAYLARI	37
8. KOMPAKTLIKLAR VE YAKINLIKLAR.....	46
KAYNAKLAR.....	50
ÖZGEÇMİŞ.....	51

SİMGE LİSTESİ

Δ	$X \times X$ in köşegeni
$\mathcal{D} < \mathcal{E}$	$\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ nin inceltimidir
$\mathcal{D}^* < \mathcal{E}$	$\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ nin yıldız inceltimidir
$\text{Yıl}(x, \mathcal{D})$	$\mathcal{D}$ ye göre x in yıldızı
δ	yakınlık bağıntısı



ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 $U[x]=\{y \in X \mid (x,y) \in U\}$	7
Şekil 5.1 $U_{\alpha} = \{(x,y) \mid x = y \text{ veya } x > \alpha, y > \alpha\}$	30



ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince verdiği destekten ötürü danışmanlığımı üstlenen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜL'e,

Çalışmalarım sırasında beni yalnız bırakmayan sevgili babam Orhan TORCU, annem, ağabeyim ve arkadaşlarıma,

Ocak, 2005

Teşekkür ederim

Gamze TORCU



ÖZET

Düzgün uzayların topolojik özelliklerine yönelen bu çalışmada, düzgün uzaylar genel olarak incelenmiş ve ileri düzeyde topoloji bakımından bu konu, tanımlar, teoremler ve detaylı örneklerle ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Düzgün uzaylar, **köşegen düzgünlükler**; düzgün uzaylar teorisine alternatif bir yaklaşım olan **düzgün örtüler**; **düzgün çarpımlar ve alt uzaylar**; **zayıf düzgünlükler**; hangi topolojilerin düzgünlüklerden ve hangi düzgünlüklerin metriklerden geldiğini ele alan **düzgünleştirilebilme ve düzgün metriklenebilirlik**; Cauchy dizisinin genelleştirilmesi vasıtasıyla metrik uzaylardan düzgün uzaylara taşınabilen tamlık kavramının verildiği **tam düzgün uzaylar**, **tamlama**; yakınlık bağıntısının tanıtıldığı **yakınlık uzayları** ve son olarak X Tychonoff uzayı üzerindeki uygun yakınlıklar ile X in kompaktlaştırılması arasında bire-bir eşlemenin kurulduğu **kompaktlıklar ve yakınlıklar** ana başlıkları ile bir bütün olarak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Köşegen düzgünlükler, düzgün örtüler, zayıf düzgünlükler, tam düzgün uzaylar, yakınlık uzayları.



ABSTRACT

This study focuses on the topologic properties of uniform spaces, within this subject the uniform spaces are examined in general and on account of higher level topology the subject is put forward with specified descriptions, theorems, and detailed examples.

The uniform spaces are examined as a whole with the parts named below respectively: **Diagonal uniformities, uniform covers**- an alternative approach to the uniform spaces; **uniform products and subspaces: weak uniformities, uniformizability and uniform metrizable** that focuses on which topologies come from uniformities and which uniformities come from metrics; **complete uniform spaces and completeness** in which the notion of completeness is carried over from the metrics spaces and given to the uniform spaces due to the generalized Cauchy sequence; **the proximity spaces** that introduce the “nearness relation”. Finally the title of **compactification and proximities** aimed to establish the one-one correspondence between the compatible proximities on a Tychonoff space X and the compactification of X .

Keywords: Diagonal uniformities, uniform covers, weak uniformities, complete uniform spaces, proximity spaces.

1. GİRİŞ.

Topolojik uzaylarda süreklilik ve yakınsaklık kavramı en genel halde verilebilmekte ancak “düzgün süreklilik” ve “düzgün yakınsaklık” kavramlarını genelleştirmek için topolojik yapılar da yetersiz kalmaktadır. Çünkü bu kavramlar uzayın farklı noktalarında komşulukların büyüklüklerine göre karşılaştırılabilir olmasını gerektirir. Bilindiği gibi metrik uzaylarda bu yapılabilir. Gerçekten bir metrik uzayda farklı noktaların ε -komşulukları aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için “eşit büyüklükte” kabul edilebilir. Oysa genel topolojik uzayda bu mümkün değildir. Bu durum yukarıdaki kavramları genelleştirmek için topolojik uzay yapısından daha genel olan ve “düzgün yapı” adı verilen yeni bir yapıya gereksinme gösterir.

Düzgün süreklilik ilk olarak Heine tarafından Öklit uzayı üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar için, düzgün yakınsaklık ise bundan önce (yayınlanmayan konferanslarda) Weierstrass tarafından tanımlanmıştı. Düzgün süreklilik metrik uzaylar için Frechet ve Hausdorff tarafından tanımlandı ve 1920 lerde topolojinin ilk yıllarındaki gelişimini paylaşan pek çok çalışmada kompakt uzaylar üzerinde sürekli fonksiyonların düzgün sürekli olduğu gerçeğinin üstü ta ki Weil, 1937’de düzgün uzayların genel kavramlarını ortaya çıkarana kadar kapalıydı. Çevreleyenler aracılığı ile yaklaşım Weil tarafından kullanıldı ve Bourbaki tarafından geliştirildi. Bir diğer yaklaşım ise, Tukey tarafından, düzgün yapı tanımlamada düzgün örtüleri baz olarak kullanarak geliştirilmiştir.

2. KÖŞEĞEN DÜZGÜNLÜKLER.

Düzgün uzaylar, düzgün süreklilik, düzgün yakınsaklık ve benzeri kavramlar için taşıyıcıdırlar. Bu bölümde düzgün uzay tanımı ve bazı temel özellikleri verdikten sonra düzgün süreklilik kavramı tanıtılacak ve süreklilik ile karşılaştırılacaktır.

2.1. Tanım a) X bir küme olmak üzere $X \times X$ in $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ ile gösterilen alt kümesine $X \times X$ in köşegeni denir.

b) $U \subset X \times X$ bir alt küme ise, X in her A altkümesi için $U[A]$ kümesi

$$\{y \mid (x, y) \in U, A \text{ daki bir } x \text{ için}\}$$

olarak tanımlanır, ve eğer x, X de bir nokta ise,

$$U[x] = U[\{x\}]$$

dir.

c) $U \subset X \times X$ bir alt küme ise

$$U^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in U\}$$

ile tanımlanır.

Eğer $U = U^{-1}$ ise bu U kümesine simetrik denir.

d) U ve V , $X \times X$ in alt kümeleri iseler

$$U \circ V = \{(x, y) \mid \text{bir } z \text{ için, } (x, z) \in V \text{ ve } (z, y) \in U\}$$

ile tanımlanır.

2.2. Uyarılar $U, V, W \subset X \times X$ olsun.

a) $(U^{-1})^{-1} = U,$

b) $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1},$

c) X in her A altkütmesi için $(U \circ V)[A] = U[V(A)]$ dır.

d) Bileşke işlemi birleşme özelliğine sahiptir, yani, $U \circ (V \circ W) = (U \circ V) \circ W$ dir (fakat genelde değişmeli değildir) ve dolayısıyla aşağıdaki gibi devam eden bileşke işlemlerinde parantez kullanılmayabilir.

$$U^n = U \circ \dots \circ U \text{ (n değişken)}$$

$$U^2 = U \circ U$$

$$U^{n+1} = U^n \circ U \text{ (n=1,2,...)}$$

e) $U \subset V \Rightarrow U^{-1} \subset V^{-1}$ ve $U \circ W \subset V \circ W$ dir.

Son olarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

2.3. Önerme V simetrik ise, $V \circ U \circ V = \bigcup \{V[x] \times V[y] \mid (x, y) \in U\}$ dir.

İspat. $V \circ U \circ V$, $(u, x) \in V$, $(x, y) \in U$ ve $(y, v) \in V$ olacak şekilde tüm (u, v) ikililerinin kümesidir. V simetrik olduğundan ,bu küme, $(x, y) \in U$ için $u \in V[x]$ ve $v \in V[y]$ olacak şekilde bütün (u, v) ikililerinin kümesidir de denilebilir. Oysa, ancak ve ancak $(u, v) \in V[x] \times V[y]$ ise $u \in V[x]$ ve $v \in V[y]$ dir, dolayısıyla $V \circ U \circ V = \{(u, v) : (u, v) \in V[x] \times V[y] \text{ } U \text{ daki bir } (x, y) \text{ için}\} = \bigcup \{V[x] \times V[y] : (x, y) \in U\}$ olur.

2.4. Tanım X bir küme olsun. $X \times X$ in alt kümelerinin aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\mathcal{U}$ topluluğuna X üzerindeki köşegen düzgünlüğü ya da çevreleyen denir.

a) $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \Delta \subset U$

b) $U, V \in \mathcal{U} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}$

c) $U \in \mathcal{U} \Rightarrow V \circ V \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

d) $U \in \mathcal{U} \Rightarrow V^{-1} \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ vardır.

$$\text{e) } U \in \mathcal{U}, U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}$$

$\mathcal{U}$, X üzerinde bir düzgünlük olmak üzere $(X, \mathcal{U})$ ikilisine, diğer bir ifade ile, üzerinde bir düzgünlük verilen bir X kümesine bir düzgün uzay denir.

2.5. Tanım $\mathcal{U}$ düzgünlüğü ancak ve ancak

$$\bigcap \{U \mid U \in \mathcal{U}\} = \Delta$$

ise ayırgan adını alır. X kümesine de ayrılmıştır denir.

Örneğin, düzgün yapı ρ sözde metriği tarafından belirlenmiş olsun, Bu durumda, yapı ancak ve ancak $\rho^{-1}(0) = \Delta$ ise ayırgandır, yani, ancak ve ancak ρ bir metrik ise ayırgandır.

2.6. Tanım $\mathcal{U}$ düzgünlüğünün $\mathcal{B}$ alt ailesi ancak ve ancak $\mathcal{U}$ nun her elemanı $\mathcal{B}$ nin bir elemanını içeriyor ise $\mathcal{U}$ için bir tabandır. Başka bir deyişle, $\mathcal{B}$, ancak ve ancak $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ ve her $U \in \mathcal{U}$ için $B \subset U$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ varsa $\mathcal{U}$ için bir tabandır.

2.7. Teorem $X \times X$ in altkümelerinin boş olmayan bir $\mathcal{B}$ ailesi ancak ve ancak aşağıdaki koşulları sağlar ise X üzerinde bir düzgünlüğün tabanıdır;

- a) $\mathcal{B}$ nin her elemanı Δ köşegenini içerir;
- b) $\mathcal{B}$ nin iki elemanın kesişimi bir elemanı kapsar.
- c) $U \in \mathcal{B}$ ise, $\mathcal{B}$ deki bir V için, $V \circ V \subset U$ dir;
- d) $U \in \mathcal{B}$ ise, U^{-1} $\mathcal{B}$ nin bir elemanını kapsar;

2.8. Tanım $\mathcal{P}$ alt ailesi ancak ancak $\mathcal{P}$ nin elemanlarının sonlu kesişimlerinin topluluğu, $\mathcal{U}$ için taban ise $\mathcal{U}$ için bir alt tabandır.

2.9. Teorem $X \times X$ in altkümelerinin bir $\mathcal{P}$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X deki bazı düzgünlükler için bir alt tabandır:

- a) $\mathcal{P}$ nin her elemanı Δ köşegenini içerir;

- b) $\mathcal{S}$ deki her U kümesi için , U^{-1} kümesi $\mathcal{S}$ nin bir elemanını kapsar;
 c) $\mathcal{S}$ deki her U kümesi için , $V \circ V \subset U$ olacak şekilde $\mathcal{S}$ de bir V vardır.

X in düzgünlüklerinin herhangi topluluğunun birleşimi X deki bir düzgünlük için alt tabandır.

İspat $\mathcal{S}$ nin elemanlarının sonlu kesişimlerinin bir $\mathcal{B}$ ailesinin taban için verilen koşulları sağladığını göstermeliyiz. Bu kolaylıkla şu gözlemden çıkar; Eğer, $U_1, \dots, U_n$ ve $V_1, \dots, V_n$, $X \times X$ in altkümeleri iseler, $U = \bigcap \{U_i : i = 1, \dots, n\}$ ve $V = \bigcap \{V_i : i = 1, \dots, n\}$ ise, her i için $V_i \subset U_i^{-1}$ (sırasıyla, $V_i \circ V_i \subset U_i$) olduğunda, $V \subset U^{-1}$ (veya, $V \circ V \subset U$) olur.

2.10. Örnekler

- a) $\mathbf{R}$ üzerindeki olağan düzgünlük, $\varepsilon > 0$ olmak üzere, taban olarak aşağıda verilen U_ε kümelerinin topluluğuna sahip olan düzgünlüktür

$$U_\varepsilon = \{(x, y) \mid |x - y| < \varepsilon\}$$

- b) Daha genel olarak, X kümesi üzerinde herhangi bir ρ metriği X üzerinde bir $\mathcal{U}_\rho$ metrik düzgünlüğünü üretir. Bu düzgünlük de aşağıda verilen U_ε^ρ , $\varepsilon > 0$, kümelerinin topluluğunu taban kabul eder

$$U_\varepsilon^\rho = \{(x, y) \in X \times X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$

Metriklerden bu kuralla üretilebilen düzgünlüklere metriklenebilirdir denir. Bunlar 4. kısımda karakterize edilmiştir.

Eğer (X, ρ) bir metrik uzay ise, X üzerinde ρ metriği ile 2ρ metriği aynı düzgün yapıyı üretirler. Böylece bir küme üzerinde farklı metriklerin aynı düzgün yapıyı üretebildikleri sonucu çıkartılır . Şu halde düzgün yapılar, metrik uzaylardan daha zayıf yapılardır.

- c) Herhangi X kümesi verilsin, $X \times X$ in Δ yı içeren bütün altkümelerinin $\mathcal{U}$ ailesi, X üzerinde bir düzgünlüktür ve buna ayırtık düzgünlük adı verilir. Bu ise, Δ tekil kümesinden oluşan topluluğu taban kabul eder. (Açıkça, ayırtık düzgün yapı, diğer bütün düzgün yapıları inceltir.)

d) Herhangi X kümesi verildiğinde, $X \times X$ tekil kümesinden oluşan topluluk X üzerinde bir düzgünlüktür ve apaçık (trivial) düzgünlük olarak adlandırılır.

e) Her $a \in \mathbf{R}$ için, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ nin

$$U_a = \Delta \cup \{(x, y) \mid x > a, y > a\}$$

altkümelerini gözönüne alalım. Buna göre, $a \in \mathbf{R}$ olmak üzere, U_a kümeleri, $\mathbf{R}$ üzerindeki bir düzgünlük için bir taban oluşturur

2.11. Uyarılar

a) X üzerinde her $\mathcal{U}$ düzgünlüğü için eğer $U \in \mathcal{U}$ ise, $U^{-1} \in \mathcal{U}$ olur. Çünkü her $U \in \mathcal{U}$ için $V^{-1} \subset U$ olacak şekilde bir V vardır. Buradan $V = (V^{-1})^{-1} \subset U^{-1}$ ve düzgünlük tanımının (e) koşulu gereğince $U^{-1} \in \mathcal{U}$ elde edilir.

b) Düzgünlük tanımındaki (c) ve (d) koşulları beraberce aşağıdaki koşula denktir:

$$U \in \mathcal{U} \Rightarrow V \circ V^{-1} \subset U \text{ olacak şekilde bir } V \in \mathcal{U} \text{ vardır.}$$

İlk önce (c) ve (d) nin sağlandığını varsayalım. Buradan $U \in \mathcal{U}$ ise $V_1 \circ V_1 \subset U$ olacak şekilde $V_1 \in \mathcal{U}$ ve $V_2^{-1} \subset V_1$ olacak şekilde $V_2 \in \mathcal{U}$ bulunur. Eğer $V = V_1 \cap V_2$ olarak tanımlanırsa $V \circ V^{-1} \subset U$ olduğu görülür.

Gerçekten;

$$\begin{aligned} (x, y) \in V \circ V^{-1} &\Rightarrow (x, z) \in V^{-1} \text{ ve } (z, y) \in V = V_1 \cap V_2 \text{ olacak şekilde } z \in X \text{ vardır} \\ &\Rightarrow (z, x) \in V = V_1 \cap V_2 \text{ ve } (z, y) \in V_1 \\ &\Rightarrow (x, z) \in V_2^{-1} \subset V_1 \text{ ve } (z, y) \in V_1 \\ &\Rightarrow (x, y) \in V_1 \circ V_1 \subset U \end{aligned}$$

Bundan sonra da yukarıdaki koşulun sağlandığını kabul edelim. $U \in \mathcal{U}$ için $V \circ V^{-1} \subset U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{U}$ mevcut olsun. Buradan $V^{-1} \subset U$ ve $W = V \cap V^{-1}$ olarak tanımlanırsa $W \in \mathcal{U}$ olup $W \circ W \subset U$ sağlanır. Gerçekten

$$\begin{aligned} (x, y) \in W \circ W &\Rightarrow (x, z) \in W \text{ ve } (z, y) \in W \text{ olacak şekilde } z \in X \text{ vardır} \\ &\Rightarrow (x, z) \in V^{-1} \text{ ve } (z, y) \in V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in V \circ V^{-1} \subset U$$

Böylece (c) ve (d) elde edilmiş ve ispat tamamlanmıştır.

c) $\mathcal{U}$ daki simetrik U kümeleri (yani, $U=U^{-1}$ olduğu kümeler) $\mathcal{U}$ için bir taban oluştururlar.

Gerçekten, eğer $V \in \mathcal{U}$ ise yukarıdaki (a) uyarısından dolayı $V^{-1} \in \mathcal{U}$ dır. Buradan $U=V \cap V^{-1} \in \mathcal{U}$ simetrik olup $U \subset V$ sağlanır.

Bir X kümesi üzerinde verilen her düzgün yapı X üzerinde bir topoloji üretir. Hatta farklı düzgün yapılar aynı topolojiyi üretebilirler.

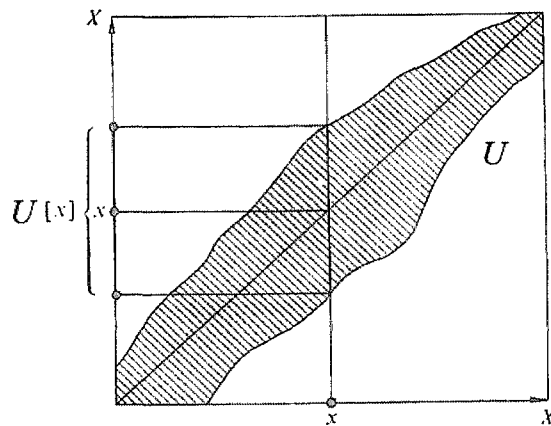
2.12. Tanım $x \in X$ ve $U \in \mathcal{U}$ için,

$$U[x] = \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$$

tanımlanmış olsun. (Şekil 2.1)

Bu X in aşağıdaki şekilde altkümelerine genelleştirilebilir:

$$\begin{aligned} U[A] &= \bigcup_{x \in A} U[x] \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in U \text{ bir } x \in A \text{ için}\} \end{aligned}$$



Şekil 2.1

2.13. Teorem $(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ise,

a) Her $x \in X$ için $\mathcal{D}_x = \{D[x] \mid D \in \mathcal{U}\}$ ailesi X i topolojik uzay yapan x noktasındaki komşuluk ailesini oluşturur.

b) Ancak ve ancak topoloji Hausdorff ise $\mathcal{U}$ ayırgandır.

İspat a) $\mathcal{D}_x$ ailesinin komşuluk ailesi özelliklerini sağladığını göstermek yeter:

i) $D[x] \in \mathcal{D}_x$ ise, $D \in \mathcal{U}$ ve $\Delta \subset D$ olduğundan $(x, x) \in D$ ve dolayısıyla $x \in D(x)$ dir.

ii) $D[x] \in \mathcal{D}_x$ ve $E \supset D[x]$ ise $E \in \mathcal{D}_x$ dir. Çünkü $D \in \mathcal{U}$ ve $F = D \cup \{(x, y) \mid y \in E\}$ olarak tanımlanırsa $F \supset D$ olduğundan $F \in \mathcal{U}$ ve $E = F[x]$ olduğu görülür.

iii) $D_1[x], D_2[x] \in \mathcal{D}_x$ ise, $D_1, D_2 \in \mathcal{U}$ ve $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{U}$ dur. Buradan

$D_1[x] \cap D_2[x] = (D_1 \cap D_2)[x]$ olduğu görülür. Gerçekten

$$y \in D_1[x] \cap D_2[x] \Leftrightarrow (x, y) \in D_1 \text{ ve } (x, y) \in D_2 \Leftrightarrow (x, y) \in D_1 \cap D_2$$

$$y \in (D_1 \cap D_2)[x].$$

Şu halde $D_1[x] \cap D_2[x] \in \mathcal{D}_x$ dir.

iv) $D[x] \in \mathcal{D}_x$ olsun. Buradan $D \in \mathcal{U}$ dur. Düzgün yapı tanımına göre $E \circ E \subset D$ olacak şekilde $E \in \mathcal{U}$ vardır. Buna göre $E[x] \in \mathcal{D}_x$ istenen özelliği sağlar. Çünkü $y \in E[x]$ ise, $(x, y) \in E$ dir. Buradan her $z \in E[y]$ için $(y, z) \in E$ ve dolayısı ile $(x, z) \in E \circ E \subset D$ dır. Şu halde $z \in D[x]$ dır.

Sonuç olarak $E[y] \subset D[x]$ olup (ii) şıkkı ile $D[x] \in \mathcal{D}_y$ elde edilir.

b) $\mathcal{U}$ nun ayırgan olduğunu düşünelim, yani $\bigcap \{D \mid D \in \mathcal{U}\} = \Delta$ olsun. $x, y \in X$ ve $x \neq y$ ise $(x, y) \notin \Delta$ ve hipoteze göre $(x, y) \notin D$ olacak şekilde bir $D \in \mathcal{U}$ vardır. $\mathcal{U}$ nun simetrik elemanları bir taban oluşturduğundan $E \circ E \subset D$ olacak şekilde $E = E^{-1}$ olan $E \in \mathcal{U}$ vardır. Buradan $E[x] \cap E[y] = \emptyset$ olduğu görülür. Çünkü eğer $z \in E[x] \cap E[y]$ olsaydı $(x, z) \in E$ ve $(y, z) \in E^{-1} = E$ olurdu. Bu ise $(x, y) \in E \circ E \subset D$ olduğundan $(x, y) \notin D$ ile çelişir.

Tersine olarak topoloji Hausdorff olsun. $(x, y) \notin \Delta$ ise $x \neq y$ olup $D[x] \cap E[y] = \emptyset$ olacak şekilde $D[x] \in \mathcal{D}_x$ ve $E[y] \in \mathcal{D}_y$ var olduğu sağlanır. Buradan $D, E \in \mathcal{U}$ ve dolayısı ile $D \cap E \in \mathcal{U}$ dır.

Fakat $(x,y) \notin D \cap E$ olduğundan $(x,y) \notin \bigcap \{D \mid D \in \mathcal{U}\}$ dır. Şu halde $\bigcap \{D \mid D \in \mathcal{U}\} = \Delta$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

2.14. Tanım Bir $\mathcal{U}$ köşegen düzgünlüğü ile birleşmiş topoloji, $\mathcal{U}$ tarafından üretilmiş düzgün τ_D topolojisi adını alır. Bir X topolojik uzayı üzerindeki topoloji, bir düzgünlükten bu yolla elde edildiği zaman, X e düzgünleştirilebilir bir topolojik uzay denir.

2.15. Örnek

a) $\mathbf{R}$ üzerinde olağan düzgünlükle üretilen topoloji olağan topolojidir.

b) Daha genel olarak, bir M metrik uzayı üzerindeki metrik düzgünlük kendi düzgün topolojisi için M üzerinde metrik topoloji üretir. Bu da, $x \in M$ için

$$U_\varepsilon^p[x] = \{y \mid (x, y) \in U_\varepsilon^p\} = \{y \mid p(x, y) < \varepsilon\} = D_\varepsilon(x)$$

gerçeğinden çıkar.

c) Bir X kümesi üzerindeki ayırtık düzgünlük ayırtık topoloji üretir.

d) Bir X kümesi üzerindeki apaçık (trivial) düzgünlük apaçık topoloji üretir.

e) $a \in \mathbf{R}$ için aşağıdaki kümelerden oluşan $\mathbf{R}$ nin düzgünlüğü için bir tabanı gözönüne alalım.

$$U_a = \Delta \cup \{(x, y) \mid x > a, y > a\}$$

Herhangi bir $x \in \mathbf{R}$ için, $a \geq x$ olduğunda $U_a[x] = \{x\}$ olup, sonuç olarak bu düzgünlük $\mathbf{R}$ üzerinde ayırtık topolojiyi üretir.

Bu örnek c) ile beraber, farklı düzgünlüklerin aynı topolojiyi oluşturduğunu gösterir (ya da farklı düzgünlüklerin aynı topolojinin oluşmasını sağladığını gösterir). Bu yüzden X üzerindeki bir düzgünlük X üzerinde gerçekten bir topolojiden daha fazla yapı belirtir.

2.16. Teorem $\mathcal{U}$ nun açık, simetrik elemanları $\mathcal{U}$ için bir taban oluşturur.

İspat. Bir açık, simetrik küme, açık bir kümeyi kendi tersiyle kesiştirerek bulunabilir. Bunun için açık kümelerin bir taban oluşturduğunu göstermek yeterlidir, bu amaçla $U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^\circ \in \mathcal{U}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $V \circ V \circ V \subset U$ olacak şekilde bir simetrik V alalım. Eğer $V \subset U^\circ$ olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış olacağız. $(x,y) \in V$ ise, o takdirde $V[x] \times V[y] \subset U$ dir, çünkü eğer $(w,z) \in V[x] \times V[y]$ ise, o zaman $(x,w) \in V$, $(y,z) \in V$ ve dolayısıyla $(x,y) \in V$ olduğundan $(w,z) \in V \circ V \circ V \subset U$ elde edilir. Böylece her $(x,y) \in V$ nin U tarafından kapsanan bir komşuluğu vardır. Dolayısıyla $V \subset U^\circ$ dır.

2.17. Tanım $(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $U \in \mathcal{U}$ için

$$U[A] = \bigcup_{x \in A} U[x] = \{y \in X \mid \exists x \in A : (x,y) \in U\}$$

şeklinde tanımlanan küme A kümesinin bir komşuluğudur. Bu komşuluğa A nın düzgün komşuluğu denir.

2.18. Teorem $(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın düzgün topolojiye göre $\bar{A}$ kaplamı, A nın düzgün komşuluklarının arakesitine eşittir, yani

$$\bar{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U[A]$$

dır.

İspat $x \in U[y] \Leftrightarrow y \in U^{-1}[x]$ ve her $U \in \mathcal{U}$ için $U^{-1} \in \mathcal{U}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \text{her } U \in \mathcal{U} \text{ için } U[x] \cap A \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \text{her } U \in \mathcal{U} \text{ için } \exists y \in A : y \in U[x]$$

$$\Leftrightarrow \text{her } U \in \mathcal{U} \text{ için } \exists y \in A : x \in U^{-1}[y]$$

$$\Leftrightarrow \text{her } U \in \mathcal{U} \text{ için } x \in U^{-1}[A]$$

$$\Leftrightarrow \text{her } U \in \mathcal{U} \text{ için } x \in U[A]$$

elde edilir.

Burada her düzgün uzay otomatik olarak bir topolojik uzay olacağından, sürekli fonksiyon kavramını verebiliriz. Düzgün süreklilik kavramını elde etmek için düzgün yapıları gördük ve artık düzgün sürekliliği tanımlayabiliriz.

2.19. Tanım $(X, \mathcal{U})$ ve $(Y, \mathcal{V})$ iki düzgün uzay olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu ancak ve ancak her $V \in \mathcal{V}$ için, $(x, y) \in U \Rightarrow (f(x), f(y)) \in V$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ var ise düzgün süreklidir. Eğer f bire-bir, üzerine ve f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de düzgün sürekli ise, f ye düzgün izomorfizma ve bu iki düzgün uzaya da düzgün izomorfik denir.

Yukarıdaki tanım yapılırken $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ düzgün yapıları yerine onların birer tabanı alınsaydı elde edilen ifade ilk tanıma denk olurdu.

2.20. Örnekler

a) (M, ρ) ve (N, σ) iki metrik uzay ve $f: M \rightarrow N$ bir fonksiyon ise, f , ancak ve ancak, her $\varepsilon > 0$ için, $(x, y) \in U_\delta^\rho \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U_\varepsilon^\sigma$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise (yani f , metrik uzay anlamında düzgün sürekli ise) $\mathcal{U}_\rho$ ve $\mathcal{U}_\sigma$ metrik düzgünlüklerine göre düzgün süreklidir.

Çözüm Her $U_\varepsilon^\sigma \in \mathcal{U}_\sigma$ için $(x, y) \in U_\varepsilon^\rho \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U_\varepsilon^\sigma$ olacak şekilde bir $U_\varepsilon^\rho \in \mathcal{U}_\rho$ vardır ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için, $(x, y) \in U_\varepsilon^\rho \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U_\varepsilon^\sigma$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise.

b) Bir ayırtık düzgün uzay üzerinden herhangi bir düzgün uzaya tanımlanmış her fonksiyon düzgün süreklidir.

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) metrik düzgün yapılaraya göre düzgün süreklidir.

2.21. Teorem Her düzgün sürekli fonksiyon süreklidir.

İspat. $(X, \mathcal{U})$ ve $(Y, \mathcal{V})$ iki düzgün uzay olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu düzgün sürekli bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. $V[f(x)], f(x)$ in Y deki düzgün topolojiyle herhangi bir komşuluğu ise $V \in \mathcal{V}$ ve f düzgün sürekli olduğundan, her $(x, y) \in U$ için $(f(x), f(y)) \in V$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Buradan kolayca $f(U[x]) \subset V[f(x)]$, dolayısıyla f, x de süreklidir.

2.22. Uyarı Sürekli her fonksiyonun düzgün sürekli olması gerekmez. Bilindiği gibi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu $\mathbf{R}$ üzerinde sürekli fakat düzgün sürekli değildir.



3. DÜZGÜN ÖRTÜLER.

X üzerinde herhangi bir düzgünlük, $X \times X$ e geçilmeden, X in her biri “aynı büyüklükteki” kümelerden oluşan örtülerinin listesini vererek tanımlanabilir. Bunun sonucu, düzgün uzaylar teorisine alternatif bir yaklaşımdır, ve bu bir önceki bölümde verilen yaklaşımdan biraz daha sık kullanılan daha uygun bir yaklaşımdır.

3.1. Tanım $(X, \mathcal{U})$ düzgün uzayının örtüsü ancak ve ancak, $U \in \mathcal{U}$ için, $\mathcal{D}_U = \{U[x] \mid x \in X\}$ biçiminde bir örtü tarafından inceltilir ise bir düzgün örtüdür.

3.2. Teorem $(X, \mathcal{U})$ düzgün uzayının bütün düzgün örtülerinin μ topluluğu aşağıdaki özellikleri taşır:

a) Eğer $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mu$ ise, bir $\mathcal{D}_3 \in \mu$ için, $\mathcal{D}_3^* < \mathcal{D}_1$ ve $\mathcal{D}_3^* < \mathcal{D}_2$ dir.

b) Eğer $\mathcal{D} < \mathcal{D}'$ ve $\mathcal{D} \in \mu$ ise $\mathcal{D}' \in \mu$ dür.

Tersine, X kümesinin örtülerinin a) ve b) yi sağlayan verilen herhangi bir örtü ailesi μ olsun. Bütün $U_D = \bigcup \{D \times D \mid D \in \mathcal{D}\}$ kümelerinin ailesi, $\mathcal{D} \in \mu$ için, X üzerindeki, düzgün örtüleri tam olarak μ nün elemanları olan, köşegen düzgünlüğü için bir tabandır.

İspat a) $\mathcal{D}_{U_1}$ ve $\mathcal{D}_{U_2}$ örtülerinin genel ağırlık merkezci inceltme sahip olduğunu göstermek yeterlidir ($\mathcal{D}$ ağırlık merkezci inceltiminin bir ağırlık merkezci inceltimi $\mathcal{D}$ yi yıldız-inceltir.)

$$U \circ U \subset U_1 \cap U_2$$

olacak şekilde simetrik $U \in \mathcal{U}$ seçelim. Buradan, her $x \in X$ için, $Y_1(x, \mathcal{D}_U) \subset D_1[x] \cap D_2[x]$ olur ve $\mathcal{D}_U, \mathcal{D}_{U_1}$ ve $\mathcal{D}_{U_2}$ nin ortak ağırlık merkezli inceltimi olur.

b) Düzgün örtü tanımından açıktır.

Böylece, düzgün örtüler çevreleyenleri kadar iyi bir düzgünlük tanımlarlar. Gerçekte bu ikisi arasındaki ilişkiye topolojik bir uzaydaki açık ve kapalı arasındaki ilişkilere yaklaşıldığı gibi yaklaşılmalıdır. Aslında “düzgün uzaylar” la ilgili literatürde çeşitli tanımlar vardır. Bu düzgün

uzayların yapısı öncelikle yukarıdaki (a) ve (b) yi sağlayan örtülerin topluluğudur (böyle bir topluluk genellikle örtü düzgünlüğü olarak adlandırılır). Bu nedenle düzgün uzay dendiğinde bu yapının içeriğinin çeşidine daha geniş bir çerçeveden bakmak gerekir. Farklı durumlarda, düzgünlükleri tanımlamak için hem örtüleri hem de çevreleyenleri tanımlamak yerinde olacaktır. Bu iki yönlü yaklaşımı aşağıdaki ifadeyle vurgulayabiliriz: Bundan böyle, X üzerindeki bir düzgünlük, ya X üzerinde köşegen düzgünlüğü ya da X üzerinde örtü düzgünlüğü anlamına gelir.

3.3. Tanım X üzerinde μ örtü düzgünlüğü için taban,

$$\mu = \{ \mathcal{D} \mid \mathcal{D}, X \text{ i örter ve bir } \mathcal{D}' \in \mu' \text{ için } \mathcal{D}' < \mathcal{D} \text{ dir} \}$$

olacak şekilde μ nin herhangi bir μ' alt topluluğudur. μ' , basitçe X üzerindeki düzgünlük için bir taban olarak adlandırılacaktır. Açıkça, μ' ancak ve ancak 3.2 nin (a) kısmını sağlıyor ise X üzerindeki bir düzgünlük için tabandır. μ örtü düzgünlüğü için alttaban, μ' nün elemanlarının bütün sonlu kesişimleri μ için bir taban oluşturacak şekilde μ nin herhangi bir μ' alttopluluğudur. Burada, X in $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{E}$ gibi iki örtüsünün kesişimi $\mathcal{D} \wedge \mathcal{E} = \{ D \cap E \mid D \in \mathcal{D}, E \in \mathcal{E} \}$ örtüsüdür.

3.4. Teorem a) Eğer $\mathcal{W}'$, $\mathcal{W}$ köşegen düzgünlüğü için bir taban ise $\{ \mathcal{D}_U \mid U \in \mathcal{W}' \}$, çevreleyenleri $\mathcal{W}$ nun elemanları olan örtü düzgünlüğü için bir tabandır.

b) Eğer μ' , μ örtü düzgünlüğü için bir taban ise, $\{ U_{\mathcal{D}} \mid \mathcal{D} \in \mu' \}$, düzgün örtüleri μ nün elemanları olan köşegen düzgünlük için bir tabandır.

3.5. Teorem ρ metriği ile üretilen düzgünlük ancak ve ancak X in, $\varepsilon > 0$ için, ε -küreleri ile oluşan $\mathcal{D}_{\varepsilon}^{\rho} = \{ D_{\varepsilon}^{\rho}[x] \mid x \in X \}$ örtüleri bir taban oluşturur ise metriklenebilirdir.

İspat $U_{\varepsilon}^{\rho} = \{ (x, y) \mid \rho(x, y) < \varepsilon \}$ kümeleri X üzerindeki çevreleyenler için bir taban oluşturur, böylece

$$U_{\varepsilon}^{\rho}[x] = \{ y \mid \rho(x, y) < \varepsilon \} = D_{\varepsilon}^{\rho}[x]$$

kümelerinden meydana gelen örtüler, X in düzgün örtüleri için bir taban oluşturur.

3.6. Teorem Eğer μ' , X üzerindeki μ örtü düzgünlüğü için bir taban ise $\mathcal{D} \in \mu'$ için $Y_1(x, \mathcal{D})$ kümeleri düzgün topolojide x noktasında bir komşuluk tabanı oluşturur.

İspat $\mathcal{U}$, μ ye karşı gelen köşegen düzgünlüğü olsun. $\mathcal{D} \in \mu'$ için $U_{\mathcal{D}}$ kümeleri $\mathcal{U}$ için bir taban oluşturur, böylece $U_{\mathcal{D}}[x]$ kümeleri, $\mathcal{D} \in \mu'$, düzgün topolojide x noktasında bir komşuluk tabanı oluşturur. Öte yandan

$$U_{\mathcal{D}}[x] = \{y \mid (x, y) \in U_{\mathcal{D}}\} = \{y \mid (x, y) \in D \times D \text{ bir } D \in \mathcal{D} \text{ için}\} = Y_1(x, \mathcal{D})$$

böylece teorem ispatlanmış olur.

Bu son teorem, X üzerindeki düzgünlüğün düzgün örtülerle ayrılabilme koşulunun aşağıdaki şekilde verilmesini sağlar: örtü düzgünlüğü ancak ve ancak, X de $x \neq y$ iken, $Y_1(x, \mathcal{D}) \cap Y_1(y, \mathcal{D}) = \emptyset$ olacak şekilde X in düzgün bir $\mathcal{D}$ örtüsü var ise ayrılmıştır denir. Böyle bir $\mathcal{D}$ örtüsünün yıldız inceltimi varsa bu başka bir şekilde de ifade edilebilir: bir örtü düzgünlüğü ancak ve ancak, X de $x \neq y$ iken, $x \notin Y_1(y, \mathcal{D}')$ olacak şekilde X in bir $\mathcal{D}'$ düzgün örtüsü var ise ayrılmıştır denir.

3.7. Teorem μ , X üzerinde örtü düzgünlüğü olsun. X in açık düzgün örtüleri μ için bir taban oluşturur.

İspat $\mathcal{U}$, X üzerinde μ ye karşı gelen köşegen düzgünlük olsun. $\mathcal{U}$ nun açık elemanları $\mathcal{U}$ için bir taban oluşturur, öyleyse, $\mathcal{U}$ daki açık U için, $\mathcal{D}_U$ örtüleri, μ için bir taban oluşturur. Öte yandan, $\mathcal{D}_U = \{U[x] \mid x \in X\}$ ve eğer U , $X \times X$ de açık ise, o zaman her $x \in X$ için $U[x]$, X de açıktır.

3.8. Teorem X ve Y düzgün uzaylar olsunlar. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu ancak ve ancak Y nin her $\mathcal{D}_1$ düzgün örtüsü için, $f(\mathcal{D}_0) = \{f(D) \mid D \in \mathcal{D}_0\}$ olmak üzere, $f(\mathcal{D}_0) < \mathcal{D}_1$ olacak şekilde X in bir $\mathcal{D}_0$ düzgün örtüsü varsa düzgün süreklidir (Dolayısıyla, ancak ve ancak Y nin her $\mathcal{D}$ düzgün örtüsü için, $f^{-1}(\mathcal{D})$ X in bir düzgün örtüsü ise f düzgün süreklidir.)

İspat $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunu düzgün sürekli ve $\mathcal{D}_0$ ı Y nin düzgün örtüsü olarak kabul edelim. V , $\mathcal{D}_V < \mathcal{D}_0$, olacak şekilde Y nin bir çevreleyeni ve U , $(x,y) \in U$ olduğunda $(f(x),f(y)) \in V$ olacak şekilde X in bir çevreleyeni olsun. Buradan kolaylıkla,

$$f(\mathcal{D}_U) < \mathcal{D}_V < \mathcal{D}_0$$

Karşıt olarak, teoremin koşullarının geçerli olduğunu kabul edelim. Y için herhangi bir V çevreleyeni verildiğinde, $U_{\mathcal{D}} \subset V$ olacak şekilde Y nin bir $\mathcal{D}_1$ düzgün örtüsü ve $f(\mathcal{D}_0) < \mathcal{D}_1$ olacak şekilde X in bir $\mathcal{D}_0$ düzgün örtüsü bulunur. Buradan kolaylıkla $(x,y) \in U_{\mathcal{D}}$, $(f(x),f(y)) \in U_{\mathcal{D}}$ i ve bu da $(f(x),f(y)) \in V$ yi gerektirir. Böylece f düzgün sürekli dir.

Bu noktada düzgün örtülerin çok önemli bir özelliğini (yıldız inceltiminin varlığını) çevreleyenin önemli bir özelliğine ($V \circ V \subset U$ olacak şekilde V nin varlığına) bağlayan teoremi verelim. Teorem bunların esasında aynı şeyler olduklarını söyler.

3.9. Teorem a) Eğer $U \circ U^{-1} \subset V$ ise, $\mathcal{D}_U$, $\mathcal{D}_V$ nin bir ağırlık merkezci l inceltimdir.

b) Eğer $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ nün bir yıldız inceltimi ise, $U_{\mathcal{D}} \circ U_{\mathcal{D}} \subset U_{\mathcal{D}'}$ dir.

İspat a) $U \circ U^{-1} \subset V$ olduğunu kabul edelim. $x \in X$ ve $U[y]$, $\mathcal{D}_U$ nun x i içeren herhangi bir elemanı olsun. $U[y] \subset V[x]$ olduğunu göstermek yeter. Fakat $z \in U[y]$ ise $(y,z) \in U$ dur ve $(y,x) \in U$ olduğundan $(x,y) \in U^{-1}$ elde edilir. Buradan $(x,z) \in U \circ U^{-1} \subset V$ ve dolayısıyla $z \in V[x]$ olur. Böylece $Yıl(x, \mathcal{D}_U) \subset V[x]$ dir.

b) $\mathcal{D}$ nin, $\mathcal{D}'$ yü yıldız incelttiğini varsayalım. $(x,y) \in U_{\mathcal{D}} \circ U_{\mathcal{D}}$ olsun. O zaman, $(x,z) \in D_1 \times D_1$ ve $(z,y) \in D_2 \times D_2$ olmak üzere $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ varolacak şekilde $(x,z) \in U_{\mathcal{D}}$ ve $(z,y) \in U_{\mathcal{D}}$ dir. Oysa $Yıl(D_1, \mathcal{D})$ x ve y nin ikisini de içerir ve bir $D' \in \mathcal{D}'$ de bulunur. Dolayısıyla $(x,y) \in D' \times D' \subset U_{\mathcal{D}'}$ olup, böylece $U_{\mathcal{D}} \circ U_{\mathcal{D}} \subset U_{\mathcal{D}'}$ olur.

İnce düzgünlükler ve ince uzaylara bir giriş yaparak bu bölümü bitirelim. Bu düzgünlükleri bağdaştırmak için bazı önbilgilere ihtiyacımız vardır. Önce, $n=1,2,...$ için $\mathcal{D}_{n+1}^* < \mathcal{D}_n$ olacak

şekilde örtülerin *normal dizisi* nin $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$ olduğunu ve *normal bir örtü* nün normal bir dizide yer alan bir $\mathcal{D}_1$ örtüsü olduğunu belirtelim.

3.10. Tanım X kümesinin örtülerinin bir ν ailesi ancak ve ancak ν deki her örtü, ν de bir yıldız inceltimine sahipse normal bir ailedir. O halde her normal dizi bir normal ailedir. Oysa bir örtü dizisi, normal dizi olmadan da normal bir aile olabilir (yani iki normal dizinin karışımı olarak).

3.11. Teorem X in örtülerinin her normal ailesi X üzerindeki bir düzgünlük için bir alt tabandır. Tersisi doğru değildir.

3.12. Teorem Eğer X düzgünleştirilebilir bir topolojik uzay ise, X üzerinde, X in topolojisine uygun, en ince bir düzgünlük vardır.

İspat $\{\mu_\alpha \mid \alpha \in A\}$, X in topolojisine uygun bütün örtü düzgünlüklerinin bir topluluğu olsun. Buradan $\mu_0 = \bigcup \{\mu_\alpha \mid \alpha \in A\}$ nın normal bir aile olduğu açıktır ve dolayısıyla X üzerindeki düzgünlük için her μ_α dan daha ince olan bir alt tabandır. Eğer μ nın X in topolojisi ile uygun olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur.

İlk olarak, daha ince düzgünlükler daha ince topolojiler ürettiklerinden, μ tarafından üretilen düzgün topolojinin orijinal topoloji tarafından kapsandığını göstermek yeterlidir. Fakat μ için bir alt taban, μ nın düzgün topolojisi için bir alt taban üretir, Bu da açıktır.

3.13. Tanım Eğer X , düzgünleştirilebilir bir topolojik uzay ise, 3.12 de oluşturulan düzgünlük, X üzerinde ince düzgünlük olarak adlandırılır, μ_F ile gösterilir. Bu düzgünlüğü sağlayan X , ince uzay olarak adlandırılır.

Aşağıdaki kavramları kullanarak topolojik uzayda ince düzgünlüğün özelliklerini daha ileri düzeyde açıklayabiliriz.

3.14. Tanım X topolojik uzayının açık bir $\mathcal{D}$ örtüsü, ancak ve ancak, açık örtüleri içeren $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$ normal dizisinde $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$ ise, normal açıktır. Her normal açık örtü bir açık normal örtüdür, ancak tersi doğru değildir.

3.15. Teorem μ_F , X üzerinde, X in tüm normal açık örtülerini taban kabul eden düzgünlüktür.

İspat Eğer μ , X üzerinde X in topolojisini veren herhangi bir düzgünlük ise, ve $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$ dizisi de X in açık örtülerinden oluşan herhangi bir normal dizi ise, $\mu \cup \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots\}$ topluluğu bir normal ailedir, dolayısıyla, X üzerinde aynı topolojiyi veren düzgünlük için alt tabandır. Buradan, X in açık örtülerinin her normal dizisinin ve dolayısıyla X in her normal açık örtüsünün μ_F tarafından kapsanması gerektiği sonucu çıkar.

Fakat, tersine, μ_F içindeki açık örtüler, μ_F için bir taban oluşturur, 3.7 ile, μ_F deki her açık örtü normal açıktır (3.7).

3.16. Sonuç Bir ön kompakt uzayda ince düzgünlük, tüm açık örtüler tarafından üretilir.

İspat Bir ön kompakt uzaydaki her açık örtü açık bir yıldız inceltimine sahiptir. Böylece her açık örtü normal olarak açıktır.

3.17. Sonuç a) $\mathcal{U}_F$ ince düzgünlüğü, her $n > 1$ için, $V_n \circ V_n \subset V_{n-1}$ olmak üzere köşegeni içeren açık kümelerin bir $V_1, V_2, \dots$ dizisinde $U = V_1$ olacak şekilde köşegenin tüm açık U komşulukları tarafından üretilir.

b) Bir ön kompakt uzayda ince düzgünlük, köşegenin tüm komşulukları tarafından üretilir.

3.18. Teorem İnce bir uzaydan düzgün uzaya sürekli her fonksiyon, düzgün süreklidir.

İspat X , μ_F ince düzgünlüğüne sahip ve $f : X \rightarrow Y$ olsun. Eğer $\mathcal{D}$, Y nin herhangi bir düzgün örtüsü ise $\mathcal{D}$ normal bir örtüdür ve dolayısıyla $f^{-1}(\mathcal{D})$ normal ve açıktır. Buradan $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mu_F$ olur. Böylece f düzgün süreklidir.

3.19. Teorem Bir kompakt T_2 -uzayı kendi topolojisine uygun bir tek düzgünlüğe sahiptir.

İspat X bir kompakt uzay, μ de X üzerindeki topolojiye uyan bir düzgünlük olsun. X in her açık $\mathcal{D}$ örtüsünün μ nün elemanı olacağını göstereceğiz, Öyle ki μ, μ_F ince düzgünlüğü olmalıdır.

Her $x \in X$ için, bir $D \in \mathcal{D}$ için $x \in D$ dir. D açık olduğundan, bir $\mathcal{D}_x \in \mu$ için $Y_1(x, \mathcal{D}_x) \subset D$ dir. $\mathcal{E}_x^* < \mathcal{U}_x$ olacak şekilde açık bir $\mathcal{E}_x \in \mu$ bulunur ve her x için, $\mathcal{E}_x$ in, x i

içeren bir E_x elemanını seçelim. Bunların sonlu bir sayıdaki kümesi yani $\mathcal{E}_{x_1}, \dots, \mathcal{E}_{x_n}$ ler X i örter. $\mathcal{F}$, karşılık gelen $\mathcal{E}_{x_1}, \dots, \mathcal{E}_{x_n}$ örtülerinin bir ortak yıldız inceltimi olsun. Eğer, $F \in \mathcal{F}$ ise, o takdirde bir x_i için $\mathcal{F} \prec \mathcal{D}$ olacak şekilde

$$F \subset \text{Yıl}(E_{x_i}, \mathcal{E}_{x_i}) \subset \text{Yıl}(x_i, \mathcal{D}_{x_i}) \subset D_{x_i}$$

dir.. Böylece $\mathcal{D} \in \mu$ olur.

3.20. Sonuç Kompakt bir T_2 -uzayı üzerinde her sürekli fonksiyon, düzgün süreklidir.



4. DÜZGÜN ÇARPIMLAR VE ALT UZAYLAR; ZAYIF DÜZGÜNLÜKLER.

Bu bölümde düzgün uzayların çarpımlarını ve alt uzaylarda düzgün yapılar için bilinen yapıları, çarpım yapılarından zayıf düzgünlüklere genelleştirmesi gibi vereceğiz.

4.1. Tanım Eğer, $\mathcal{U}$, X üzerinde köşegen düzgünlük ve $A \subset X$ ise, A üzerinde $\mathcal{U}$ vasıtasıyla üretilen göreceli düzgünlük, $U \in \mathcal{U}$ için, $U \cap (A \times A)$ kümelerinden meydana gelen düzgünlüktür. Bu düzgünlükteki A ya X in bir düzgün alt uzayı denir.

A üzerinde $\mathcal{U}$ vasıtasıyla üretilen göreceli düzgünlük aslında A üzerinde köşegen düzgünlüktür.

X in bir A alt uzayında düzgün örtüleri tanımlamak için, aşağıdaki kavrama ihtiyacımız vardır. Eğer $\mathcal{D}$, X kümesinin altkümelerinin herhangi bir topluluğu ve $A \subset X$ ise A üzerinde $\mathcal{D}$ nin izi, A nın alt kümelerinin

$$\{D \cap A \mid D \in \mathcal{D}\}$$

şeklindeki topluluğudur.

4.2. Teorem X in düzgün örtülerinin A üzerindeki izleri, A nın düzgün örtüleri için bir taban oluşturur.

İspat $\mathcal{D}$, X in düzgün örtüsü ise, bir $U \in \mathcal{U}$ için, $\{U[x] \mid x \in X\}$, $\mathcal{D}$ yi inceltir. Buna göre,

$$\{[U \cap (A \times A)][x] \mid x \in A\}$$

sınıfı da, A üzerindeki $\mathcal{D}$ nin izini inceltir. O halde bu ifade A nın bir düzgün örtüsüdür.

Tersine, eğer $\mathcal{D}'$, A nın bir düzgün örtüsü ise, bir $U \in \mathcal{U}$ için,

$$\{[U \cap (A \times A)][x] \mid x \in A\}$$

ifadesi $\mathcal{D}'$ yü inceltir. Buna göre, $\{U[x] \mid x \in X\}$, X in, düzgün bir örtüsü olup, bunun A üzerindeki izi $\mathcal{D}'$ yü inceltir.

4.3. Teorem X in düzgün bir A alt uzayı üzerindeki topoloji, alt uzay topolojisidir.

İspat $U \in \mathcal{U}$ ve $a \in A$ için,

$$[U \cap (A \times A)][a] = U[a] \cap A$$

olduğunu belirtmek yeterlidir.

Böyle bir düzgünlüğün topolojisi çarpım topolojisi olacaktır. Buna göre, düzgün uzayların çarpımı üzerinde bir düzgünlük tanımlama problemine dönelim.

4.4. Tanım Her $\alpha \in A$ için X_α bir küme ve $X = \prod X_\alpha$ ise, α ıncı ikili izdüşüm, $P_\alpha(x, y) = (\pi_\alpha(x), \pi_\alpha(y))$ ile tanımlanan $P_\alpha : X \times X \rightarrow X_\alpha \times X_\alpha$ tasviridir.

4.5. Teorem Eğer $\mathcal{U}_\alpha$, her $\alpha \in A$ için, X_α üzerinde bir köşegen düzgünlük ise, $i=1, \dots, n$ için $U_{\alpha_i} \in \mathcal{U}_{\alpha_i}$ olmak üzere,

$$P_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap P_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

kesişimi, $\prod X_\alpha$ üzerinde $\mathcal{U}$ düzgünlüğü için bir taban oluşturur. Buradaki topoloji $\prod X_\alpha$ üzerindeki çarpım topolojisidir.

İspat a) $\Delta \subset P_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap P_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ dir.

b) $P_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap P_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ şeklindeki iki kümenin kesişiminin yine aynı şekilde olduğu açıktır.

c) $U = P_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap P_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ olsun. $i=1, \dots, n$ için $V_{\alpha_i} \circ V_{\alpha_i} \subset U_{\alpha_i}$ olacak şekilde $V_{\alpha_i} \in \mathcal{U}_{\alpha_i}$ bulunur. $V = P_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \dots \cap P_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n})$ şeklinde olsun. Eğer, $(x, z) \in V \circ V$ ise,

$(x, y) \in V$ ve $(y, z) \in V$ olacak şekilde bir y bulunabilir. (x_α, y_α) ve (y_α, z_α) herbiri $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ için V_α nın elemanıdır ve dolayısıyla

$$(x_\alpha, z_\alpha) \in V_\alpha \circ V_\alpha \subset U_\alpha, \alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ için}$$

dir. Böylece $(x, z) \in U$ olup, dolayısıyla $V \circ V \subset U$ dur.

d) (c) de olduğu gibi, $V_{\alpha_i}^{-1} \subset U_{\alpha_i}$ ($i=1, \dots, n$) ise, $V^{-1} \subset U$ olur.

Sonuç olarak, çarpım düzgünlüğünün çarpım topolojisini verdiğini göstermek için, eğer $U = P_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap P_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ ise, $x \in \prod X_\alpha$ için,

$$U[x] = \{y \mid (x, y) \in U\}$$

$$= \{y \mid (x_{\alpha_i}, y_{\alpha_i}) \in U_{\alpha_i}, (i=1, \dots, n)\} = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}[x_{\alpha_i}])$$

olduğunu belirtelim.

4.6. Tanım 4.5 te kurulan düzgünlük, $\prod X_\alpha$ üzerindeki çarpım düzgünlüğüdür ve $\prod X_\alpha$ da, $\alpha \in A$ için, X_α çarpan uzaylarından oluşan çarpım uzayıdır.

Çarpım uzayı üzerindeki düzgün örtüleri belirlemeden önce, bir X kümesinden X_α topolojik uzaylarına, $\alpha \in A$, tasvirlerin bir topluluğu ile üretilmiş zayıf topolojiye benzer düzgünlüğü tanımlamak uygun olacaktır; yani, bir X kümesinden X_α düzgün uzaylarına, $\alpha \in A$, tasvirlerin topluluğu ile üretilen zayıf düzgünlüğü vermek uygun olacaktır.

4.7. Tanım X bir küme ve $X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha$ köşegen düzgünlüğüne sahip bir uzay olmak üzere, her $\alpha \in A$ için, $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ olsun. Her $\alpha \in A$ için de

$$F_\alpha(x, y) = (f_\alpha(x), f_\alpha(y))$$

olacak şekilde

$$F_\alpha : X \times X \rightarrow X_\alpha \times X_\alpha$$

tanımlanmış olsun. $i=1, \dots, n$ için $U_{\alpha_i} \in \mathcal{U}_{\alpha_i}$ olmak üzere,

$$F_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap F_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

şeklindeki kümeler topluluğu, X üzerindeki düzgünlük için bir tabandır. Bu, X üzerinde f_α tasvirleriyle üretilen zayıf düzgünlük olarak adlandırılır. Bunun düzgünlük için bir taban olduğunun ispatı 4.5 deki gibidir. Aynı yolla, zayıf düzgünlükle üretilen topolojinin, f_α tasvirleri ile üretilen zayıf topoloji olduğu ispatlanabilir.

$\prod X_\alpha$ üzerindeki çarpım düzgünlüğü, π_α izdüşüm tasvirleriyle üretilen zayıf düzgünlüktür.

4.8. Teorem $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ tasvirleri vasıtasıyla üretilen zayıf düzgünlük, her f_α yı düzgün sürekli yapan en zayıf düzgünlüktür.

İspat Eğer $U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ ise $F_\alpha^{-1}(U)$ zayıf düzgünlüğün bir elemanı ve eğer $(x, y) \in F_\alpha^{-1}(U)$ ise $(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) \in U$ olduğundan, f_α nın düzgün sürekli olduğu açıktır.

$\mathcal{U}$, X_α üzerinde zayıf düzgünlük ve $\mathcal{U}'$ her f_α düzgün sürekli olacak şekilde herhangi bir düzgünlük olsun. $F_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap F_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ kesişiminin daima $\mathcal{U}'$ nün elemanı olacağını göstereceğiz. Her $i=1, \dots, n$ için $(x, y) \in V_{\alpha_i}$ ise $(f_{\alpha_i}(x), f_{\alpha_i}(y)) \in U_{\alpha_i}$ olacak şekilde bir $V_{\alpha_i} \in \mathcal{U}'$ varolacaktır. O halde, $V_{\alpha_i} \subset F_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ ve dolayısıyla

$$V_{\alpha_1} \cap \dots \cap V_{\alpha_n} \subset F_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap F_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

olup, bu son küme iddia edildiği gibi $\mathcal{U}'$ ye aittir.

4.9. Teorem Eğer X , $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ tasvirlerinin ürettiği zayıf düzgünlüğe sahip ise, ancak ve ancak, her α için, $f_\alpha \circ f$, düzgün sürekli ise $f : Z \rightarrow X$ düzgün sürekli dir.

İspat Eğer f , düzgün sürekli ise, her α için, $f_\alpha \circ f$ de düzgün sürekli. Çünkü bileşke işlemi düzgün sürekliliği korur.

Her α için, $f_\alpha \circ f$ nın düzgün sürekli olduğunu varsayalım. $U \in \mathcal{U}(Z)$ olsun. O takdirde F_{α_i} , f_{α_i} ile birleşmiş tasvir ve $U_{\alpha_i} \in \mathcal{W}_{\alpha_i}$ (X_{α_i} üzerindeki düzgünlük) iken, U , $F_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap F_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ şeklindeki bir kümeyi içerir. Oysa her $i=1, \dots, n$ için $f_{\alpha_i} \circ f$ düzgün sürekli olduğundan

$$(x, y) \in W_i \Rightarrow (f_{\alpha_i} \circ f(x), f_{\alpha_i} \circ f(y)) \in V_{\alpha_i}$$

olacak şekilde bir $W_i \in \mathcal{W}(Z)$ vardır. Böylece, $(x, y) \in W_i$ için, $(f(x), f(y)) \in F_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i})$ dir

ve dolayısıyla, eğer, $(x, y) \in W = \bigcap_{i=1}^n W_i$ ise, o zaman $(f(x), f(y)) \in \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) \subset U$ dir.

Bu da f nin düzgün sürekli olduğunu kanıtlar.

4.10. Sonuç a) $\prod X_\alpha$ üzerindeki çarpım düzgünlüğü, her bir π_α izdüşümünü düzgün sürekli yapan en zayıf düzgünlüktür.

b) $f: Z \rightarrow \prod X_\alpha$ tasviri, ancak ve ancak, her α için $\pi_\alpha \circ f$, düzgün sürekli ise, düzgün sürekli.

Aynen zayıf topolojilerde olduğu gibi, daha çok tasvir topluluklarıyla üretilmiş zayıf düzgünlükler çarpım düzgünlüklerinin alt uzaylarıdır. Bilindiği gibi, bir $f_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ tasvir topluluğuyla belirtilen $e: X \rightarrow \prod X_\alpha$ değerlendirme tasviri $[e(x)]_\alpha = f_\alpha(x)$ şeklindedir. Yani, e tasviri $\pi_\alpha \circ e = f_\alpha$ bağıntısıyla tanımlıdır.

4.11. Teorem e değerlendirmesi, ancak ve ancak, f_α tasvirleri, X içindeki noktaları ayırıyorsa ve X bu noktalarla verilen zayıf düzgünlüğe sahip ise, düzgün bir izomorfizmadır.

Burada, bir çarpım uzayı üzerinde ya da zayıf düzgünlükteki düzgün örtülerin çarpan uzaylarının düzgün örtülericinsinden belirlenmesi problemini ele alacağız. Bunun için, zayıf düzgünlüklerin ya da çarpımın örtü tanımının açıklanması gerekir.

4.12. Teorem $f_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ tasvirleriyle meydana getirilen X kümesi üzerindeki zayıf düzgünlük, $\alpha \in A$ ve X_α nın bir düzgün örtüsü $\mathcal{D}$ olmak üzere, düzgün örtüler için bir alttaban olarak,

$$f_\alpha^{-1}(\mathcal{D}) = \{f_\alpha^{-1}(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$$

ters görüntülerine sahiptir.

İspat X üzerindeki zayıf düzgünlük, tüm f_α ları düzgün sürekli yapan en zayıf (en kaba) düzgünlüktür. Yani, her bir $f_\alpha^{-1}(\mathcal{D})$ yi düzgün örtü yapan en zayıf düzgünlüktür. Böylece eğer, $f_\alpha^{-1}(\mathcal{D})$, X üzerindeki bir düzgünlük için bir alt taban oluşturursa, bu zayıf düzgünlük olmalıdır. Oysa, $\mathcal{D}_1^* < \mathcal{D}_2 \Rightarrow f_\alpha^{-1}(\mathcal{D}_1)^* < f_\alpha^{-1}(\mathcal{D}_2)$ olduğundan, $f_\alpha^{-1}(\mathcal{D})$ örtüleri bir normal bir aile oluşturur ve dolayısıyla 3.11 den, X üzerindeki bir düzgünlük için bir alt tabandır.

4.13. Sonuç Düzgün uzayların bir $\prod X_\alpha$ çarpımı üzerinde düzgün örtüler için bir taban aşağıdaki şekilde elde edilen tüm örtülerden meydana gelir: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ seçelim ve $\mathcal{D}_i$ her i için X_{α_i} nin düzgün bir örtüsü olsun. Buna göre $\prod X_\alpha$ nın örtüsü tüm $\prod D_\alpha$ kümeleri ile oluşur. Burada $D_{\alpha_i} \in \mathcal{D}_i$, $i=1, \dots, n$ ve aksi halde $D_\alpha = X_\alpha$ dir.

5. DÜZGÜNLEŞEBİLME VE DÜZGÜN METRİKLENEBİLME.

Burada hangi topolojilerin düzgünlüklerden ve hangi düzgünlüklerin metriklerden geldiği şeklindeki zor ama önemli iki soruyu ele alacağız

Aşağıdaki yardımcı teorem düzgünleştirilebilirlik ve düzgün metriklenebilirlik için ölçütün genelleştirilmesine temeldir.

5.1. Önerme $\mathcal{D}$, X düzgün uzayı üzerinde düzgün bir örtü ise, her $\varepsilon > 0$ ve $\mathcal{E}_1 < \mathcal{D}$ için $\mathcal{E}_\varepsilon = \{D_\rho(x, \varepsilon) \mid x \in X\}$ düzgün bir örtü olacak şekilde X üzerinde bir ρ sözde metriği vardır. Ayrıca, ρ , 1 ile sınırlı olarak alınabilir.

İspat Önce, örtülü düzgünlüğü tanımını kullanarak, $\mathcal{D}$ “altında” bir normal dizi kurulabilir:

$$\dots^* < \mathcal{D}_1^* < \mathcal{D}_0^* < \mathcal{D}.$$

Bu normal dizi ile ρ sözde metriğini birleştirerek yardımcı teoremin kapsamı ρ tarafından kolayca sağlanır. Her x ve $\varepsilon \leq 1$ için $D_{\rho^*}(x, \varepsilon) = D_\rho(x, \varepsilon)$ olduğundan, $\min(\rho, 1) = \rho^*$ konularak bir ρ bulunur.

X üzerinde bir düzgünlük oluşturan düzgün örtülerin topluluğu böylelikle X üzerindeki sözde metriklerin bir topluluğuna neden olur. Bundan başka, sözde metriklerin bu topluluğu orijinal düzgünlüğü yeniden örtmede kullanılabilir. Böylece, X üzerindeki sözde metriklerin belli bir topluluğu düzgün yapılar oluşturmaya sahip çıkabilir.

Herhangi bir düzgün örtü altında bulunan normal diziye benzer köşegen, herhangi bir $U \in \mathcal{U}(X)$ tarafından kapsanan $\dots \subset U_2 \subset U_1 \subset U$ bileşke dizisidir. Burada her n için $U_n \circ U_n \subset U_{n-1}$ dir. Böyle bir dizi tamamen benzer bir yolla bir sözde metrik üretmek için kullanılabilir.

Burada artık düzgünleştirilebilirlik ile ilgili teoremi ispatlayabiliriz. Bir düzgün uzayın tanımı kullanarak limite götürmek uygun bir yol olacaktır; Biri örtü düzgünlükleri kullanarak, diğeri köşegen düzgünlükleri kullanarak ispatlanacaktır.

5.2. Teorem Bir topolojik uzay ancak ve ancak tam düzenli ise düzgünleştirilebilir.

İspat $\Rightarrow$: μ , X üzerinde topoloji üreten bir örtü düzgünlüğü olsun ve A , X içinde kapalı bir küme ve $x \notin A$ olsun. Bir $\mathcal{D} \in \mu$ için, $Y_1(x, \mathcal{D}) \cap A = \emptyset$. d , 5.1 de olduğu gibi $\mathcal{D}$ ile birleşmiş (1 ile sınırlı) sözde metrik olsun. O halde

$$D_d(x, 1) \cap A = \emptyset$$

olur. $f: X \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = d(A, x)$ fonksiyonu olsun. Buradan f , X üzerinde düzgün süreklidir ve $f(A) = 0, f(x) = 1$ dir. Böylece X tam düzenlidir.

$\Leftarrow$: X in tam düzenli olduğunu varsayalım. S , X üzerinde sürekli reel-değerli fonksiyonların topluluğu olsun. $f \in S$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$U_{f, \varepsilon} = \{(x, y) \in X \times X \mid |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}$$

olsun ve $\mathcal{U}, f_1, \dots, f_n \in S, \varepsilon_i > 0$ olmak üzere,

$$U_{f_1, \varepsilon_1} \cap \dots \cap U_{f_n, \varepsilon_n}$$

şeklindeki kümelerin topluluğunu taban kabul eden çevre düzgünlüğü olsun (entourage uniformity). Gerçekte, $\mathcal{U}$ görünüşte, X üzerinde reel değerli sürekli fonksiyonların topluluğu tarafından üretilen zayıf düzgünlüktür. Burada sadece, $\mathcal{U}$ nun X üzerinde sağ topoloji ürettiğini göstermeliyiz. Burada zayıf bir düzgünlük ile birleşmiş topolojinin zayıf topoloji olduğunu göstereceğiz. X üzerindeki orijinal topolojide A nın kapalı olduğunu varsayalım ve $x \notin A$ olsun. $f(x) = 0, f(A) = 1$ olacak şekilde $f \in S$ bulalım. $V = U_{f, 1/2}$ olsun. O zaman, eğer $z \in V[x]$ ise, $f(x) - f(z) < \frac{1}{2}$ ve dolayısıyla $|f(z)| < \frac{1}{2}$ olacak şekilde $(x, z) \in V$ dir. Buradan $V[x] \cap A = \emptyset$ sonucu çıkar. Dolayısıyla, A düzgün topolojide kapalıdır. Böylelikle olağan topoloji düzgün topolojiden daha küçüktür.

Karşıt olarak, X üzerindeki orijinal topolojide, düzgünlük için tabana ait her V ve her $x \in X$ için, $V[x]$ in açık olduğunu göstermek yeterlidir. Oysa, $V = U_{f_1, \varepsilon_1} \cap \dots \cap U_{f_n, \varepsilon_n}$ ve buradan

$$V[x] = U_{f_1, \varepsilon_1}[x] \cap \dots \cap U_{f_n, \varepsilon_n}[x]$$

olup, sadece $U_{f_k, \varepsilon_k}[x]$ nın X içinde açık olduğunu kontrol etmek gerekir.

$$U_{f_k, \varepsilon_k}[x] = \{y \mid |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon_k\} = f_k^{-1}(f_k(x) - \varepsilon_k, f_k(x) + \varepsilon_k)$$

olduğundan, istenen sonuç f_k nın sürekliliğinden çıkar.

Tam düzenlilik içinde yer almayan herhangi bir ayırma aksiyomunu, düzgün uzayları karakterize etmek için kullanacağız. Örneğin, her sözde metrik uzay düzgünleştirilebilir, yani, tam düzenlidir, fakat bu uzayların mertik olmayan örnekleri T_0 bile değildir. Böylece, herhangi bir uzay üzerindeki aşık(trivial) topoloji düzgünleştirilebilir.

5.1 önermesine göre, bir düzgünlüğün tabanının her elemanı sözdemetrik ile belirtilebilir. Eğer ilgilenilen sayılabilir çoklukta sözde metrik varsa, bunların birleşiminin sonucu hala bir sözde metrik olur ve sorudaki tam düzgünlüğü belirler.

5.3. Teorem X üzerinde bir μ düzgünlüğü ancak ve ancak sayılabilir bir tabana sahipse, sözde metriklenebilir

İspat Eğer ρ , μ düzgünlüğünü veren bir sözde metrik ise, $\mathcal{D}_n = \{D_\rho(x, 1/2^n) \mid x \in X\}$ olmak üzere, $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots\}$, μ için sayılabilir bir tabandır.

Karşıt olarak, $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots\}$, μ için bir taban olduğunu varsayalım. Ortak yıldız inceltimleri alınarak, $\dots^* < \mathcal{D}_2^* < \mathcal{D}_1$ yazılabilir. 5.1 deki gibi, d_n , $\mathcal{D}_n$ ile birleşmiş sözde metrik ve $d_n \leq 1$ olsun.

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x, y)}{2^n}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan d , X üzerinde sözde metrik ve $\{D_d(x, 1/2^n) \mid x \in X\} < \{D_{d_n}(x, 1) \mid x \in X\}$ dir. Bu nedenle her n için $\mathcal{D}_n$ örtüsü d tarafından üretilen μ_d düzgünlüğüne ait olur. Böylece $\mu \subset \mu_d$ dir.

Her $\varepsilon > 0$ için, $\{D_d(x, \varepsilon) \mid x \in X\} \in \mu$ olduğunu gösterirsek ispatı yapmış olacağız. N yeteri kadar büyük olmak üzere, $\sum_{n=N+1}^{\infty} (1/2^n) < \varepsilon/2$ alalım. Bundan sonra, 5.1 deki gibi her n için, d_n tarafından üretilen düzgünlük, μ içinde yer alır. Öyle ki, her n için $\{D_{d_n}(x, 2^n \varepsilon / (4N)) \mid x \in X\}$, μ ye ait olur. $\mathcal{D}$ bu N örtülerinin ortak bir inceltimi olsun. $D \in \mathcal{D}$ verildiğinde X içindeki $x_1, \dots, x_N$ için,

$$D \subset \bigcap_{n=1}^N D_{d_n} \left(x_n, \frac{2^n \varepsilon}{4N} \right)$$

olur ve $x \in D$ ise bilinen işlemlerle,

$$\bigcap_{n=1}^N D_{d_n} \left(x_n, \frac{2^n \varepsilon}{4N} \right) \subset D_d(x, \varepsilon)$$

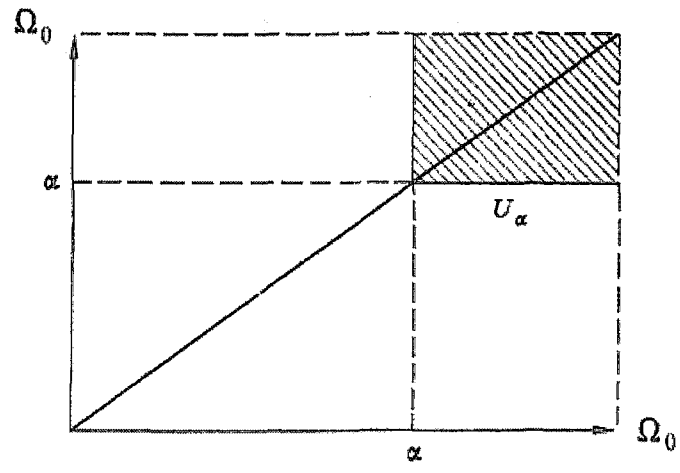
olduğu gösterilir. Buradan da $\mathcal{D} \subset \{D_d(x, \varepsilon) \mid x \in X\}$ elde edilir.

5.4. Sonuç Bir düzgünlük ancak ve ancak ayrılmış ise ve sayılabilir bir tabana sahip ise metriklenelirdir.

5.5. Örnek Oldukça önemli bir örnek, sayılabilir sıralı sayılarında bulunabilir. Her $\alpha \in \Omega_0$ için,

$$U_\alpha = \{(x, y) \mid x = y \text{ veya } x > \alpha, y > \alpha\}$$

dir (şekil 5.1). O halde $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Omega_0\}$ metriklenemez bir düzgünlük için bir tabandır fakat, bu topoloji ayırtık topolojidir. Gerçekte eğer $\beta < \alpha$ ise, $U_\alpha[\beta] = \{\beta\}$ dir.



Şekil 5.1

6. TAM DÜZGÜN UZAYLAR; TAMLAMA.

Tamlık kavramı metrik uzaylardan düzgün uzaylara kolaylıkla taşınabilir. Bunun için, Cauchy dizisi kavramını genelleştirmek gerekir.

6.1. Tanım $X, \mathcal{U}$ köşegen düzgünlüğüne sahip olsun. X deki bir (x_λ) ağı ancak ve ancak her $U \in \mathcal{U}$ için, $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0$ iken, $(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) \in U$ olacak şekilde bir $\lambda_0 \in \Lambda$ var ise $\mathcal{U}$ -Cauchy (veya sadece Cauchy) dir. Buna karşılık gelen örtü tasviri aşağıdaki gibidir;

Ancak ve ancak her $\mathcal{D}$ düzgün örtüsü için $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0$ iken, x_{λ_1} ve x_{λ_2} birlikte $\mathcal{D}$ nin bir elemanının içinde olacak şekilde bir $\lambda_0 \in \Lambda$ var ise $(x_\lambda), \mu$ -Cauchy (veya sadece Cauchy) dir.

6.2. Teorem Her yakınsak ağ Cauchy dir.

İspat $x_\lambda \rightarrow x$ ve $U \in \mathcal{U}$ ise, $V \circ V \subset U$ olacak şekilde simetrik $V \in \mathcal{U}$ alalım. O takdirde $\lambda \geq \lambda_0$ için $(x_\lambda), V[x]$ in içinde yer alır denir. Eğer $\lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0$ ise, o zaman $(x_{\lambda_1}, x) \in V$ ve $(x_{\lambda_2}, x) \in V$ dir. Buradan da $(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) \in V \circ V \subset U$ elde edilir.

6.3. Tanım Bir X düzgün uzayındaki her Cauchy ağı yakınsarsa, X bir tam düzgün uzaydır.

Böyle tanımlanan tamlık kavramı metrik uzaylar için verilen tanıma uygundur. Eğer X, ρ metriği tarafından üretilen, metriklenebilir bir düzgün uzay ise, X içindeki (x_n) dizisi, ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için, $n_1, n_2 \geq n_0$ iken, $\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 var ise 6.1 e göre Cauchy dir.

6.4. Teorem ρ metriği tarafından üretilen $\mathcal{U}$ düzgünlüğüne sahip X uzayı ancak ve ancak ρ bir tam metrik ise tamdır.

İspat $\mathcal{U}$ tam ise, her Cauchy ağı, dolayısıyla her Cauchy dizisi yakınsar, böylece ρ tamdır.

Karşıt olarak, ρ nin tam ve (x_λ) nın X üzerinde Cauchy ağı olduğunu varsayalım. $\lambda, \lambda' \geq \lambda_1$ iken, $\rho(x_\lambda, x_{\lambda'}) < 1$ elde edilecek şekilde $\lambda_1 \in \Lambda$ seçelim. $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ alınarak, $\lambda, \lambda' \geq \lambda_n$ iken, $\rho(x_\lambda, x_{\lambda'}) < 1/n$ elde edilecek şekilde λ_n yı $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ den daha büyük seçelim. Buradan

$x \in X$ için $x_{\lambda'} \rightarrow x$ olur. Fakat (x_{λ}) nin terimleri (x_{λ_n}) nin terimlerine artıklı olarak yakındır. Bu nedenle $x_{\lambda} \rightarrow x$ elde edilir.

X üzerinde metriklenebilir bir topoloji verildiğinde, X bu topoloji ile tam metriklenebilir (ölçülebilir) olmasa bile bu topolojiyle uyuşan daima bir tam düzgünlük varolacaktır.

Burada tam düzgün uzayların bazı elemanter özelliklerini açıklayacağız. Bunlar tam uzayların kompakt uzaylara benzemesini sağlar. Gerçekten, kompakt uzayların pek çok elemanter özelliği aynı zamanda tam uzaylarda da bulunur.

6.5. Teorem a) Bir tam X uzayının kapalı bir A alt kümesi, tamdır.

b) Bir X Hausdorff düzgün uzayının tam bir A alt uzayı, kapalıdır.

İspat. a) A içindeki bir (x_{λ}) Cauchy ağı, X içinde Cauchy dir dolayısıyla yakınsar. Bu ağın X deki limiti, kapalı A kümesinin elemanı olacaktır. Bu nedenle A tamdır.

b) $x \in X$ e yakınsayan A daki bir (x_{λ}) ağı A da Cauchy dir ve bir $y \in A$ limit noktasına sahiptir. X Hausdorff olduğundan, limit tektir, buradan $x=y$ dir. O halde A kapalıdır.

6.6. Teorem Düzgün uzayların bir boş olmayan çarpımı ancak ve ancak her çarpan uzayı tam ise tamdır.

İspat $\prod X_{\alpha}$ nın tam olduğunu varsayalım. Her X_{α} çarpımın kapalı bir alt uzayına homeomorfiktir ve böylece tamdır (6.5).

Diğer yandan, her $\alpha \in A$ için X_{α} bir tam uzay olduğunu varsayalım. Buradan çarpım içindeki Cauchy ağının X_{α} içine izdüşümü, X_{α} da Cauchy dir ve böylelikle bir x_{α} noktasına yakınsar. Orijinal ağ buradan, $\alpha \in A$ için, çarpım içindeki α nıncı koordinatı x_{α} olan noktaya yakınsar.

Kompaktlık ve tamlık arasındaki benzerlik tasvir özelliklerine genişletilemez. Gerçekten, bir tam uzayın düzgün sürekli görüntüsünün tam olması gerekmez.

Bundan sonra düzgün uzayın kompaktlığı ve tamlığı arasındaki farkları inceleyebiliriz.

6.7. Tanım X üzerindeki bir $\mathcal{U}$ düzgünlüğü ancak ve ancak her $U \in \mathcal{U}$ için (her bir k için), $D_k \times D_k \subset U$ olacak şekilde X in sonlu bir $\{D_1, \dots, D_n\}$ örtüsü varsa tümel sınırlıdır. Başka bir deyişle, X üzerindeki bir μ örtü düzgünlüğü ancak ve ancak μ sonlu örtülerden oluşan bir tabana sahipse tümel sınırlıdır. Eğer X tümel sınırlı bir düzgünlüğe sahipse, tümel sınırlı düzgün uzay adını alır.

6.8. Önerme X , ancak ve ancak, X içindeki her ağın bir Cauchy alt ağı varsa, tümel sınırlıdır.

İspat (x_λ) tümel sınırlı X uzayında bir ağ olsun. Herhangi bir $U \in \mathcal{U}$ verildiğinde, $D_U \times D_U \subset U$ ve (x_λ) genellikle D_U içinde olacak şekilde bir $D_U \subset X$ kümesi vardır. Ancak ve ancak $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ve $D_{U_1} \supset D_{U_2}$ ise $(\lambda_1, U_1) \leq (\lambda_2, U_2)$ ile yönlendirilmiş küme $\Gamma : \{(\lambda, U) \mid U \in \mathcal{U} \text{ ve } x_\lambda \in D_U\}$ olsun. Her $(\lambda, U) \in \Gamma$ için $x_{(\lambda, U)} = x_\lambda$ tanımlansın. Buna göre $(x_{(\lambda, U)})$, (x_λ) nın bir alt ağıdır ve $U_0 \in \mathcal{U}$ verildiğinde, $(\lambda_0, U_0) \in \Gamma$ olacak şekilde $\lambda_0 \in \Lambda$ seçelim. O takdirde, $(x_{(\lambda, U)})$, (x_λ) nın bir Cauchy alt ağı olacak şekilde

$$(\lambda, U), (\lambda', U') \geq (\lambda_0, U_0) \Rightarrow (x_\lambda, x_{\lambda'}) \in D_U \times D_{U'} \subset D_{U_0} \times D_{U_0} \subset U_0$$

dir. Diğer yandan, eğer X tümel sınırlı değilse, o zaman her k için $D_k \times D_k \subset U$ olmak üzere X in hiçbir sonlu $\{D_1, \dots, D_n\}$ örtüsü varolmayacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ kümesi vardır. Buna göre, eğer $V \circ V \subset U$ ise, her $x \in X$ için $V[x] \times V[x] \subset U$ olduğu gerçeğinden hareketle hiçbir sonlu $V[x_1], \dots, V[x_n]$ dizisinin X i örtmediği sonucu çıkar. O takdirde herhangi bir $i < n$ için $x_n \notin V[x_i]$ olacak şekilde $x_1, x_2, \dots$ dizisini tümevarımla kurabiliriz. (x_n) böylece hiçbir Cauchy alt ağına sahip olamaz.

6.9. Teorem Bir X düzgün uzayı, ancak ve ancak, tam ve tümel sınırlı ise, kompaktır.

İspat Eğer X kompakt ve (x_λ) , X de bir Cauchy ağı ise, (x_λ) nın bir x yığılma noktası vardır ve bu ağ Cauchy olduğundan, (x_λ) , x e yakınsayacaktır. Böylelikle X tam olur. Her ağ yakınsak olduğundan, dolayısıyla Cauchy dir, alt ağıdır, X de tümel sınırlıdır.

Bir tam ve tümel sınırlı uzayın kompakt olduğunu göstermek için, her ağın yakınsak bir alt ağ olan (tamlığın gereği) bir Cauchy alt ağına (tümel sınırlılığın gereği) sahip olduğunu belirtelim.

6.10. Teorem Bir X düzgün uzayının bir A alt kümesinden bir tam düzgün Y uzayına düzgün sürekli bir fonksiyon, $\overline{A}$ ye genişletilebilir.

İspat Her $x \in \overline{A}$ için, A içindeki bir (x_λ) Cauchy ağı x e yakınsar. $(f(x_\lambda))$ ağı yine bir Cauchy ağıdır, ve dolayısıyla Y içinde örneğin y ye yakınsar. Bu durumda $f(x)=y$ tanımlanmış olsun.

f in düzgün sürekli olduğunu göstermek için, $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ sırasıyla, X ve Y üzerinde düzgünlükler ve $V' \in \mathcal{V}$ olsun. $V \circ V \circ V \subset V'$ olacak şekilde simetrik $V \in \mathcal{V}$ alalım. Burada x ve y , A nın noktaları ve $(x,y) \in U$ ise, $(f(x), f(y)) \in V$ olacak şekilde açık bir $U \in \mathcal{U}$ kümesi bulunur. Eğer x ve y , $\overline{A}$ nin noktaları ve $(x,y) \in U$ ise $(f(x), f(y)) \in V'$ olduğunu iddia ediyoruz. Bu da, $\overline{A}$ üzerinde f in düzgün sürekliliğini gösterecektir.

A kümesinde sırasıyla x ve y noktalarına yakınsayan (x_λ) ve (y_μ) ağları bulunur. U açık ve $(x,y) \in U$ olduğundan, sonuçta, $(x_\lambda, y_\mu) \in U$ ve böylece $((f(x_\lambda), f(y_\mu))) \in V$ olur. Fakat, $f(x_\lambda)$, $f(x)$ e yakınsadığından, sonuçta, $f(x_\lambda) \in V[f(x)]$ ve böylece $(f(x_\lambda), f(x)) \in V$ olur. Benzer şekilde $(f(y_\mu), f(y)) \in V$ olur. Buradan da $(f(x), f(y)) \in V \circ V \circ V \subset V'$ olduğu sonucu çıkar.

Bundan sonra her düzgün uzayın sözde metrik uzayların bir çarpımı içine düzgün gömülebildiğini ispatlayacağız.

6.11. Teorem Her düzgün X uzayı sözde metrik uzayların bir çarpımı içine gömülebilir ve çarpanlar eğer X ayrılmış ise metrik yapılabilir.

İspat $\mu = \{ \mathcal{D}_\alpha \mid \alpha \in A \}$, X üzerinde, bir örtü düzgünlüğü olsun. Burada μ yü ayırgan kabul ediyoruz. Her bir $\mathcal{D}_\alpha$ düzgün örtüsü ile, önerme 5.1 göz önüne alınarak bir d_α sözde metriği birleşsin ve X_α , (X, d_α) sözde metrik uzayını gösterebilir. X_α^* , X_α nın metrik özdeşleşmesi, özdeşleşme tasviri h_α ve $[e(x)]_\alpha = h_\alpha(x)$ değerinde $e : X \rightarrow \prod X_\alpha^*$ tanımlayalım. μ ayırgan olduğundan, x ve y gibi herhangi iki farklı nokta bir d_α metriğine pozitif uzaklıktadır, ve dolayısıyla e bire-bir dir. e nin herhangi bir izdüşüm tasviriyle bileşkesi düzgün süreklidir

ve böylece e düzgün süreklidir. Son olarak, e^{-1} in düzgün sürekli olduğunu göstermek için, U_α, μ ile birleşmiş, X üzerinde köşegen düzgünlüğünün bir elemanı olsun. Eğer d_α, U_α ile birleşmiş sözde metrik ise, O zaman $\{(x, y) \in X \times X \mid d_\alpha(x, y) < 1\} \subset U_\alpha$ olduğunu belirtelim. Eğer

$$T_\alpha = \{(x_\alpha, y_\alpha) \in X_\alpha^* \times X_\alpha^* \mid d_\alpha^*(x_\alpha, y_\alpha) < 1\}$$

olarak alırsak, T_α, X_α^* üzerindeki metrik düzgünlüğünün elemanıdır, ve böylece

$$T = P_\alpha^{-1}(T_\alpha) = \{(x, y) \in \prod X_\alpha^* \times \prod X_\alpha^* \mid d_\alpha^*(x_\alpha, y_\alpha) < 1\}$$

$\prod X_\alpha^*$ üzerindeki düzgünlüğün elemanı olur. Fakat

$$e^{-1}(T) = \{(x, y) \in X \times X \mid d_\alpha(x, y) < 1\} \subset U_\alpha$$

dir. Bu da, e^{-1} in düzgün sürekliliğini verir.

6.12. Teorem Eğer Y yoğun bir alt uzay olarak X i içeren herhangi bir tam uzay ise o takdirde, $\hat{X}$ ve Y , X i noktasal sabit kabul eden bir izomorfizma altında düzgün izomorfiktir, anlamında her düzgün X uzayı bir tam düzgün $\hat{X}$ uzayının yoğun bir alt uzayı olarak düzgün görülebilir ki bu tektir. Ayrıca, ancak ve ancak, X ayrılmış ise $\hat{X}$ da ayrılmıştır.

İspat X sözde metrik uzayların bir çarpımı içine gömülebilir, $X \subset \prod X_\alpha$ ve her X_α nın, bir $\hat{X}_\alpha$ sözde metrik tamlaması vardır. Buradan X in $\prod \hat{X}_\alpha$ içindeki kaplaması yoğun altuzay olarak X i içeren bir tam düzgün uzaydır. Bundan başka, her X_α , eğer X ayrılmış ise metrik yapılabilir ve sonuçta X in çıkan tamlaması Hausdorff ve dolayısıyla da ayrılmış olacaktır. Tekliğini ispatlayalım. Eğer Y, X in herhangi bir tamlaması ise, o takdirde $i: X \rightarrow X$ özdeşlik tasviri düzgün sürekli $I: \hat{X} \rightarrow Y$ ve $J: Y \rightarrow \hat{X}$ genişlemeleri vardır (6.10 dan). Bundan da I nın, Y ile $\hat{X}$ nın düzgün izomorfizmasını gerektirdiği sonucu çıkar.

6.13. Teorem Tümel sınırlı bir düzgün uzayın tamlaması kompaktır.

İspat Gerçekten, bir Y düzgün uzayı yoğun tümel sınırlı bir X alt uzayını kapsadığında Y nin tümel sınırlı olduğu gösterilebilir.

$\mathcal{D}$, Y nin herhangi bir düzgün örtüsü, $\mathcal{E}$ de, $\mathcal{D}$ nin bir açık yıldız inceltimi olsun Yine $\mathcal{F}'$, $\mathcal{E}$ nin X üzerindeki izini inceltir, X in bir sonlu düzgün örtüsü olsun. Burada $\{\bar{F} \mid F \in \mathcal{F}'\}$ in Y nin $\mathcal{D}$ yi inceltir bir düzgün örtüsü olduğunu göstermek yeter.

İlk olarak, düzgün örtü olduğunu gösterelim. $\mathcal{F}$, X üzerindeki izi $\mathcal{F}'$ olan Y nin düzgün bir örtüsü olsun ve $\mathcal{F}$ nin bir açık bir $\mathcal{F}_0$ inceltimi bulunsun. Her $F_0 \in \mathcal{F}_0$ açık olduğundan, $F_0 \subset \overline{F_0 \cap X}$ ve bir $F \in \mathcal{F}'$ için her bir $\overline{F_0 \cap X}$, $\bar{F}$ tarafından kapsanır. Böylelikle, F_0 , $\{\bar{F} \mid F \in \mathcal{F}'\}$ yü inceltir. Bu da Y nin bir düzgün örtü olduğu gösterilir.

İkinci olarak, $\{\bar{F} \mid F \in \mathcal{F}'\}$ $\mathcal{D}$ yi inceltir. Çünkü $F \in \mathcal{F}$ verilediğinden, $E \in \mathcal{E}$ ve $D \in \mathcal{D}$ için, $F \subset E$ ve $Y_1(E, \mathcal{E}) \subset D$ elde edilir ve buradan, $\bar{F} \subset D$ sonucu çıkar.

Böylece, tümel sınırlı düzgün bir uzayın düzgün tamlaması, gerçekten, X in bir kompaktlaştırılmasıdır (ki bu tek düzgünlüğü X üzerindeki düzgünlüğe kısıtlar). Tersine, X in herhangi bir BX kompaktlaştırılması tek bir düzgünlüğe sahiptir (tümel sınırlı), böylece verilen düzgünlük X üzerindeki bir tümel sınırlı düzgünlüğe yükselir.

7. YAKINLIK UZAYLARI.

Bu bölümdeki temel amaç, X kümesi üzerinde yakınlık denilen yeni bir “yakınlık bağıntısı” vermek ve X üzerindeki yakınlıklar ile X üzerinde tümel sınırlı düzgünlükler arasında bire bir eşleme kurmaktır.

7.1. Tanım X bir küme ve δ , X in A , B ve C alt kümeleri için, aşağıdakileri sağlayan $\mathcal{R}(X)$ üzerinde bir ikili bağıntı olmak üzere, bir yakınlık uzayı (X, δ) çiftidir:

P-1) $\emptyset \delta A$

P-2) Her $a \in A$ için, $a \delta a$ dır,

P-3) $A \delta B$ gerektirir $B \delta A$,

P-4) Ancak ve ancak $A \delta B$ ya da $A \delta C$ ise $A \delta (B \cup C)$ dir,

P-5) $A \delta B$ gerektirir $C \cap D = \emptyset$ ve $A \delta (X - C)$, $B \delta (X - D)$ olacak şekilde $C, D \subset X$ vardır.

Bu uzay eğer aşağıdaki ek aksiyomu sağlıyorsa, ayrılmıştır denir.

P-6) $a \delta b$ gerektirir $a = b$.

Pratikte, X yakınlık uzayı ve δ , X üzerinde yakınlık olarak bilinir. $A \delta B$, “ A yakın B ” diye okunur. Ya da daha açık olarak A, B ye δ yakındır denir.

7.2. Örnekler a) Herhangi bir X kümesinde, ancak ve ancak A ve B nin her ikisi de boş değilse, $A \delta B$ tanımlanabilir. Bu da X üzerinde bir yakınlık tanımlar. Bu yakınlığa apaçık yakınlık denir.

b) Herhangi bir X kümesinde, ancak ve ancak $A \cap B \neq \emptyset$ ise $A \delta B$ tanımlanır. Bu ifade, X üzerinde her zaman bir yakınlık tanımlar, bu yakınlığa ayırtık yakınlık adı verilir.

c) Herhangi bir X normal topolojik uzayında, ancak ve ancak $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ ise $A \delta B$ tanımlanır. Bu da X üzerinde, elemanter yakınlık adı verilen bir yakınlık verir. Ancak ve ancak X, T_0 ise ayrılmış uzaydır. İleride görüleceği gibi, tüm yakınlıklar elemanter yakınlıklar olarak elde edilebilir.

d) $\mathcal{U}$ köşegen düzgünlüklü bir X uzayında, ancak ve ancak bir $U \in \mathcal{U}$ için $U[A] \cap U[B] = \emptyset$ ise, $A \delta B$ tanımlanır. Başka bir değişle, $V \circ V \subset U$ olacak şekilde $V \in \mathcal{U}$ elemanlarının varlığından, yukarıdaki tanım, ancak ve ancak bir $U \in \mathcal{U}$ için $U[A] \cap B = \emptyset$ ise $A \delta B$ şeklinde ifade edilebilir.

Eğer X üzerinde bir μ örtü düzgünlüğü verilmişse tanım, ancak ve ancak bir $\mathcal{U} \in \mu$ için, $Y_1(A, \mathcal{U}) \cap Y_1(B, \mathcal{U}) = \emptyset$ ise $A \delta B$ şeklini alır. Başka bir değişle, $\mathcal{U}' < \mathcal{U}$ olacak şekilde $\mathcal{U}'$ elemanlarının varlığından tanım, ancak ve ancak, bir $\mathcal{U} \in \mu$ için, $Y_1(A, \mathcal{U}) \cap B = \emptyset$ ise $A \delta B$ olarak yazılabilir.

Bu yollardan herbiri ile elde edilebilen yakınlık düzgünleştirilebilir yakınlık adını alır. Daha sonra görüleceği gibi, tüm yakınlıklar düzgünleştirilebilirdir.

Her iki halde bir düzgünlük tarafından üretilmiş yakınlık ancak ve ancak düzgünlüğün kendisi ayrılmış ise ayrılmıştır.

e) (d) nin özel bir hali olarak, bir X metrik uzayında bir yakınlık, ancak ve ancak $d(A, B) = 0$ olduğunda $A \delta B$ tanımlanırsa elde edilir. Bir yakınlık metrik uzaydan bu tarzda elde edilebildiğinde, metriklenebilir adını alır. Metriklenebilir yakınlıklar daima ayrılabilir. Bunların ayrılmaz karşılıkları sözde metriklenebilir yakınlıklardır. Bunların tanım ve özellikleri açıkça metriklenebilir yakınlıklarinkine benzer.

7.3. Tanım Bir (X, δ) yakınlık uzayında, ancak ve ancak $A \delta (X - B)$ ise $A \subset\subset B$ şeklinde yazılır. $A \subset\subset B$ iken, B ye, A nın bir yakınlık komşuluğudur (p -komşuluğu, δ -komşuluğu) denir.

7.4. Teorem Yakınlık komşulukları, herhangi $A, B, C \subset X$ için, aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$P-1)' \quad \emptyset \subset\subset A,$$

$$P-2)' \quad A \subset\subset B \text{ ise } A \subset B \text{ dir,}$$

$$P-3)' \quad \text{Ancak ve ancak } A \subset\subset B \text{ ve } A \subset\subset C \text{ ise, } A \subset\subset (B \cap C) \text{ dir}$$

$$P-4)' \quad \text{Eğer, } A \subset\subset B \text{ ise, bir } C \text{ için, } A \subset\subset C \subset\subset B \text{ dir,}$$

ve bir ayrılmış uzayda

$P-5)$ ' Eğer $a \neq b$ ise $a \subset\subset X - \{b\}$ dir.

Tersine, $\subset\subset$ bağıntısı bir X kümesinin, $P-1)$ ' den $P-4)$ ' e kadar özelliklerini sağlayan altkümeleri arasındaki bağıntıdır. Ancak ve ancak $A \subset\subset X - B$ ise, $A \delta B$ dir vasıtasıyla X üzerinde δ yakınlığını tanımlayabiliriz, ve A nın δ ya bağlı yakınlık komşulukları kesinlikle $A \subset\subset B$ deki B kümeleri olacaktır. Bundan başka, δ , ancak ve ancak $P-5)$ ' sağlanır ise ayrılmış olacaktır.

7.5. Teorem Herhangi bir (X, δ) yakınlık uzayında:

- a) $A \delta B$ ve $A \subset C, B \subset D$ ise $C \delta D$ dir,
- b) $A \cap B \neq \emptyset$ ise $A \delta B$ dir,
- c) $A \subset\subset B \subset C$ ise $A \subset\subset C$ dir.

İspat (a) şıkkı P-3) ten, (b)şıkkı, (a) ve P-2) den ve (c) şıkkı da $P-3)$ ' den elde edilir.

7.6 Tanım Bir (X, δ) yakınlık uzayında $\overline{A} = \{x \mid x \delta A\}$ tanımlansın. Sonuç, $P(X)$ üzerinde bir kaplama operatörüdür. Böylece, X üzerinde verilen bir topoloji δ tarafından üretilmiş topoloji adını alır. Topolojileri yakınlıklardan bu yolla türetilen topolojilere, yakınlılaştırılabilir denir.

Bir δ tarafından üretilmiş topolojide, bir x noktasının D komşulukları kesin olarak x in yakınlık komşuluklarıdır; yani, $x \subset\subset D$ olduğu D kümeleridir. Bu genel olarak doğru değildir, bununla birlikte, bir A kümesinin komşulukları A nın yakınlık komşuluklarıdır.

Bir (X, δ) yakınlık uzayı üzerinde bir topoloji gözönüne alındığında bu topoloji, δ tarafından üretilen topolojiyi olarak kabul edilir.

7.7. Teorem a) Ancak ve ancak, $A \delta B$ ise, $\overline{A} \delta \overline{B}$ dir.

b) $A \subset\subset B$ ise, $\overline{A} \subset B^\circ$ dir; tersi doğru değildir.

İspat. a) $A\delta B$ ise teorem 7.5 den $\overline{A}\delta\overline{B}$ dir. Öte yandan, $\overline{A}\delta\overline{B}$ olduğunu varsayalım. O zaman $A\subset\subset X-B$ olup, dolayısıyla $C\subset X$ için $A\subset\subset C\subset\subset X-B$ olur. Buna göre $\overline{A}\subset C\subset\subset X-B$ olup, böylece $\overline{A}\delta B$ olur. Aynı tarzda işlemler $A\delta B$ olduğunu gösterir.

b) Eğer, $A\subset\subset B$ ise, o takdirde bir C için $A\subset\subset C\subset\subset B$ ve dolayısıyla $\overline{A}\subset C\subset B^\circ$ olup, böylece $\overline{A}\subset B^\circ$ dir. Tersisi doğru değildir, düzlem üzerinde olağan metrikle üretilen yakınlık için bile tersi doğru değildir. A , $\{(x,0) \mid x \geq 1\}$ kümesi, B de $x>0$ ve $|y|<1/x$ olan (x,y) noktalarının kümesi olsun. Bu durumda $\overline{A}\subset B^\circ$, oysa $d(A, X-B)=0$ olup, böylece $A\subset\subset B$ olduğu doğru değildir.

7.8. Teorem Bir düzgünlük vasıtasıyla üretilmiş bir yakınlık tarafından üretilen topoloji, düzgün topolojidir.

İspat $\mathcal{U}$, X üzerinde bir köşegen düzgünlüğü olsun. O takdirde D kümesi, X in bir düzgün komşuluğu olur

$$\Leftrightarrow \text{bir } U \in \mathcal{U} \text{ için } U[x] \subset D$$

$\Leftrightarrow$ bir $V \in \mathcal{U}$ için $V[x] \cap V[X-D] = \emptyset$ (Burada $V \circ V \subset U$ olacak şekilde V simetrik alınıyor),

$$\Leftrightarrow \text{Eğer } x \subset\subset D \text{ ise } \mathcal{U} \text{ tarafından üretilmiş bir yakınlıkta } X\delta(X-D),$$

$$\Leftrightarrow D, x \text{ in bir yakınlık komşuluğudur.}$$

7.9. Tanım Eğer, (X, δ) ve (Y, δ') yakınlık uzayları ise, bir $f: X \rightarrow Y$ tasviri ancak ve ancak, X içinde $A\delta B$ olduğunda Y içinde $f(A)\delta'f(B)$ oluyorsa, bir yakınlık tasviridir. (p -tasviri, δ -tasviri).

Başka bir deyişle, ancak ve ancak, Y içinde $C\subset\subset' D$ olduğu zaman X içinde $f^{-1}(C)\subset\subset f^{-1}(D)$ oluyorsa f bir p -tasviridir.

7.10. Teorem a) Her p -tasviri sürekli.

b) Her düzgün sürekli tasvir bir p -tasviridir.

İspat a) $f: X \rightarrow Y$ bir p -tasviri olsun. f in sürekli olduğunu göstermek için, her $A \subset X$ için, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ olduğunu göstermek yeter. Oysa, ancak ve ancak, $x\delta A$ ise $x \in \overline{A}$ dır ve eğer

$x \delta A$ ise o zaman $f(x) \delta f(A)$ olup, bu da $f(x) \in \overline{f(A)}$ gerektirir. Böylece $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ elde edilir.

b) $(X, \mathcal{U})$ ve $(Y, \mathcal{V})$ düzgün uzaylar olsun ve $f : X \rightarrow Y$ tasvirinin düzgün sürekli olduğunu varsayalım. Burada $C \subset\subset' B$ olsun. $V[C] \subset B$ olacak şekilde simetrik bir $V \in \mathcal{V}$ bulunur (Çünkü burada $C \delta Y - B$ olup, böylece bir V için $V[C] \cap (Y - B) = \emptyset$ dur). Eğer, $(x, y) \in U$ ise, o zaman f 'in düzgün sürekliliğinden dolayı $(f(x), f(y)) \in V$ olacak şekilde $U, \mathcal{U}$ nun bir elemanı olsun. $U[f^{-1}(C)] \subset f^{-1}(B)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Burada eğer $x \in U[f^{-1}(C)]$ ise, o zaman $y \in f^{-1}(C)$ için $(x, y) \in U$ dir. Buna göre $(f(x), f(y)) \in V$ ve $f(y) \in C$ olup, böylece $f(x) \in V[C] \subset B$ ve dolayısıyla $x \in f^{-1}(B)$ lur. Böylece $f^{-1}(C) \subset\subset f^{-1}(B)$ olacak şekilde $U[f^{-1}(C)] \subset f^{-1}(B)$ olur.

7.11. Teorem Eğer ν tümel sınırlı ise, bir $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ tasviri, ancak ve ancak, bir p -tasviri ise (üretilmiş yakınlıklara bağlı), düzgün süreklidir.

İspat f bir p -tasviri olsun. Y nin her sonlu düzgün η örtüsü için $f^{-1}(\eta) \in \mu$ olduğunu göstermek yeter. Çünkü bunlar, (Y, ν) için bir taban oluşturur.

η nin $\eta = \{N_1, N_2\}$ şeklinde iki elemanı olduğunu varsayarak başlayalım. Eğer

$$f^{-1}(\eta) \notin \mu$$

ise, her $\mathcal{D} \in \mu$ için, $D, X - f^{-1}(N_1)$ ve $X - f^{-1}(N_2)$ nin her ikisine de rastlayacak şekilde bir $D \in \mathcal{D}$ vardır (aksi halde $\mathcal{D} < f^{-1}(\eta)$ dır). Buradan, sonuç olarak

$$[X - f^{-1}(N_1)] \delta [X - f^{-1}(N_2)]$$

çıkar ve dolayısıyla f , bir p -tasviri olduğundan $(Y - N_1) \delta (Y - N_2)$ olur. Buna göre, Y nin her $\mathcal{F}$ düzgün örtüsü için $Y \setminus (Y - N_1, \mathcal{F}), Y - N_2$ ye rastlar. Bu ise imkansızdır. Böylece $f^{-1}(\eta) \in \mu$ olur.

Her sonlu düzgün örtünün, iki elemanlı düzgün örtülerin bir kesişimi tarafından inceltildiğini göstererek ispat tamamlanabilir. $\mathcal{D}' = \{D_1, \dots, D_n\}$ düzgün bir örtü olsun ve $\mathcal{D}'^* < \mathcal{D}$ olacak şekilde $\mathcal{D}'$ yi seçelim. $i = 1, \dots, n$ için

$$F_i = \bigcup \{D' \in \mathcal{D}' \mid Y \cap (D', \mathcal{D}') \subset D_i\}$$

olsun. Her bir $D' \in \mathcal{D}'$ bir F_i tarafından kapsandığından dolayı, $\bigcup_{i=1}^n F_i = Y$ elde edilir. Aynı zamanda her $i = 1, \dots, n$ için $F_i \subset D_i$ olup, böylece $\mathcal{F}_i = \{D_i, Y - F_i\}$ ifadesi her bir i için Y nin bir örtüsüdür. Ayrıca $\mathcal{D}' < \mathcal{F}_i$ olduğundan her bir $\mathcal{F}_i$ i Y nin bir düzgün örtüsüdür. Oysa, bu durumda,

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n T_i \mid T_i \in \mathcal{F}_i \right\} = \mathcal{F}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_n$$

İfadesi, Y nin bir düzgün örtüsüdür ve $\mathcal{F} < \mathcal{D}$ olur.

7.12. Tanım f ve f^{-1} in her ikisi de p -tasvirleri olacak şekilde, bire-bir ve üzerine bir f tasviri, bir p -izomorfizmasıdır. Bire-bir, üzerine bir $f : (X, \delta) \rightarrow (X, \delta')$ tasviri, kesin olarak, ancak ve ancak $f(A)\delta f(B)$ ise $A\delta'B$ olduğunda bir p -izomorfizmasıdır. Yani kesin olarak, ancak ve ancak $f(C) \subset\subset f(D)$ ise $C \subset\subset D$ olduğunda bir p -izomorfizmasıdır. Böyle tasvirlerle yakın izomorfizmalar ya da δ -izomorfizmaları adı da verilir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 7.10 un sonucu olarak elde edilir.

7.13. Teorem a) Her p -izomorfizması, bir homeomorfizmadır.

b) Her düzgün izomorfizma bir p -izomorfizmasıdır.

7.14. Tanım $\mathcal{D} = \{D_\alpha \mid \alpha \in A\}$, ancak ve ancak, her $\alpha \in A$ için $E_\alpha \subset\subset D_\alpha$ olacak şekilde X in bir $\mathcal{E} = \{E_\alpha \mid \alpha \in A\}$ örtüsü varsa, X yakınlık uzayının bir p -örtüsüdür. $\mathcal{E}$ ye $\mathcal{D}$ nin bir p -inceltimi denir.

7.15. Teorem Her yakınlık tümel sınırlı bir düzgünlük tarafından meydana getirilir.

İspat X üzerinde bir δ yakınlığı verildiğinde, X in tüm sonlu p -örtülerinin μ topluluğunun, X üzerindeki düzgünlük için bir taban olduğunu göstermek istiyoruz. Bununla birleşmiş yakınlık δ dır. Eğer böyle ise, üretilen örtüler sonlu olduğundan, düzgünlükler kolayca tümel sınırlı olacaktır.

Önce $\mathcal{D}_1$ ve $\mathcal{D}_2$, μ nün elemanları ise,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \wedge \mathcal{D}_2 = \{ D_1 \cap D_2 \mid D_1 \in \mathcal{D}_1, D_2 \in \mathcal{D}_2 \}$$

ve $\mathcal{D} < \mathcal{D}_1$, $\mathcal{D} < \mathcal{D}_2$ olur.

Buradan, $\mathcal{D} \in \mu$ verildiğinde, $\mathcal{F} < \mathcal{D}$ olacak şekilde $\mathcal{F} \in \mu$ yü bulmak istiyoruz. Bunun için $\mathcal{D}$ nin, bir ağırlık merkezli $\mathcal{F}$ inceltimini bulmak yeterlidir. $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ alalım ve $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$ de $\mathcal{D}$ nin bir p -inceltimi olsun. $i = 1, \dots, n$ için $E_i \subset\subset H_i \subset\subset G_i \subset\subset D_i$ olacak şekilde H_i ve G_i bulalım (7.4 kullanılacak), ve $A_i^1 = D_i^0$, $A_i^2 = X - \overline{E_i}$ alalım. O takdirde her bir i için, A_i^1 ve A_i^2 açıktır ve (7.7) den dolayı $A_i^1 \cup A_i^2 = X$ dir. $\mathcal{F}$, her ε_i 1 ya da 2 olmak üzere, $A_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap A_n^{\varepsilon_n}$ şeklindeki z^n açık kümeleri ile X in örtüsü olsun. Buna göre, $\mathcal{F}$, $Y_i^1 = G_i$ ve $Y_i^2 = G_i$ olmak üzere

$$\{Y_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap Y_n^{\varepsilon_n} \mid \varepsilon_i = 1 \text{ ya da } 2\}$$

örtüsü ile p -inceltim olduğundan bir p -örtüsüdür ve dolayısıyla $\mathcal{F} \in \mu$ olur. Bundan başka $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}$ nin bir ağırlık merkezli inceltimidir. Gerçekten, $x \in X$ verildiğinde bir i_0 için $x \in E_{i_0}$ olacak ve $\text{Yıl}(X, \mathcal{F}) \subset E_{i_0}$ olduğu gösterilebilir. Çünkü bir $F \in \mathcal{F}$ için $x \in F$ ise, o zaman F nin i_0 ıncı $A_{i_0}^{\varepsilon_{i_0}}$ çarpanı $X - E_{i_0}$ olamaz. Dolayısıyla $D_{i_0}^0$ olmalıdır. Böylece $F \subset D_{i_0}$ dır.

Son olarak, X üzerinde oluşan düzgünlüğün başladığımız δ yakınlığını verdiğini gösterelim. Bunun için, ancak ve ancak, X in sonlu bir $\mathcal{D}$, p -örtüsü için $\text{Yıl}(A, \mathcal{D}) \cap B = \emptyset$ ise $A \delta B$ olduğunu göstermek yeter.

Eğer $A\delta B$ ise o takdirde $A \subset\subset X - B$ ve dolayısıyla, $C_1, C_2, C_3, C_4 \subset X$ için

$$A \subset\subset C_1 \subset\subset C_2 \subset\subset C_3 \subset\subset C_4 \subset\subset X - B$$

dir. $\mathcal{D} = \{C_4, X - C_1\}$ olsun. Bu durumda $C_3 \subset\subset C_4$ ve $X - C_2 \subset\subset X - C_1$ olduğundan, $\mathcal{D}, X$ in bir p -örtüsüdür. Ayrıca, $Y_1(A, \mathcal{D}) \subset C_4$ olup, dolayısıyla $Y_1(A, \mathcal{D}) \cap B = \emptyset$ dur.

Karşıt olarak, sonlu bir $\mathcal{D}$, p -örtüsü için $Y_1(A, \mathcal{D}) \cap B = \emptyset$ olduğunu varsayalım. O takdirde eğer $\mathcal{E}, \mathcal{D}$ nin bir p -inceltimi ise $A \subset Y_1(A, \mathcal{E}) \subset Y_1(A, \mathcal{D}) \subset X - B$ ve dolayısıyla $A\delta B$ dir.

7.16. Sonuç Yakınlaştırılabilir topolojik uzaylar, kesin olarak tümel düzenli uzaylardır.

İspat Yakınlaştırılabilir uzaylar, Örnek 7.2(d) ile birlikte Teorem 7.15 den dolayı yakınlaştırılabilir uzaylarla çakışır.

7.17. Tanım X üzerinde bir δ yakınlığı verildiğinde onu üreten, 7.15 de oluşturulan tümel sınırlı düzgünlük μ_δ ile gösterilecektir (ya da karşılık gelen köşegen düzgünlük halinde $\mathcal{U}_\delta$ ile gösterilecektir).

7.18. Teorem μ_δ, δ yakınlığını veren yegane tümel sınırlı düzgünlüktür.

İspat Sonlu p -örtülerinin δ yı üreten herhangi bir tümel sınırlı μ düzgünlüğü için bir taban oluşturduğunu göstermek yeter. Sonlu düzgün örtüler, tümel sınırlılıktan dolayı μ için bir taban oluşturur. $\mathcal{D}$, herhangi bir sonlu düzgün örtü, $\mathcal{E}, \mathcal{D}$ nin sonlu yıldız inceltimi olsun ve her $E \in \mathcal{E}$ için $Y_1(E, \mathcal{E}) \subset D_E$ olacak şekilde $D_E \in \mathcal{D}$ seçelim. O takdirde $\mathcal{D}_0 = \{D_E \mid E \in \mathcal{E}\}$, $\mathcal{D}$ yi incelten sonlu bir örtüdür. Bu nedenle $\mathcal{D}_0$ ın bir p -örtüsü olduğunu göstermek yeter. Bunun için de her $E \in \mathcal{E}$ için $E \subset\subset D_E$ olduğunu göstermek yetiştir. Oysa, eğer $\mathcal{F}, \mathcal{E}$ nin herhangi bir yıldız inceltimi ise, o zaman $Y_1(E, \mathcal{F}) \cap Y_1(X - D_E, \mathcal{F}) = \emptyset$ dur. Sonuç olarak $E\delta(X - D_E)$ yani $E \subset\subset D_E$ çıkar.

7. 19. Teorem Eğer μ, δ yı meydana getiren herhangi bir düzgünlük ise, $\mu_0 \subset \mu$ dür.

İspat μ ve μ_δ nın her ikisi de aynı yakınlığı ürettiğinden, $i = (X, \mu) \rightarrow (X, \mu_\delta)$ özdeşlik tasviri bir p -tasviridir. Buna göre μ_δ tümel sınırlı olduğundan (7.11) den dolayı i , düzgün süreklidir. Böylece $\mu_0 \subset \mu$ dür.



7. YAKINLIK UZAYLARI.

Bu bölümdeki temel amaç, X kümesi üzerinde yakınlık denilen yeni bir “yakınlık bağıntısı” vermek ve X üzerindeki yakınlıklar ile X üzerinde tümel sınırlı düzgünlükler arasında bire bir eşleme kurmaktır.

7.1. Tanım X bir küme ve δ , X in A , B ve C alt kümeleri için, aşağıdakileri sağlayan $\mathcal{A}(X)$ üzerinde bir ikili bağıntı olmak üzere, bir yakınlık uzayı (X, δ) çiftidir:

P-1) $\phi \delta A$

P-2) Her $a \in A$ için, $a \delta a$ dır,

P-3) $A \delta B$ gerektirir $B \delta A$,

P-4) Ancak ve ancak $A \delta B$ ya da $A \delta C$ ise $A \delta (B \cup C)$ dir,

P-5) $A \delta B$ gerektirir $C \cap D = \phi$ ve $A \delta (X - C)$, $B \delta (X - D)$ olacak şekilde $C, D \subset X$ vardır.

Bu uzay eğer aşağıdaki ek aksiyomu sağlıyorsa, ayrılmıştır denir.

P-6) $a \delta b$ gerektirir $a = b$.

Pratikte, X yakınlık uzayı ve δ , X üzerinde yakınlık olarak bilinir. $A \delta B$, “ A yakın B ” diye okunur. Ya da daha açık olarak A, B ye δ yakındır denir.

7.2. Örnekler a) Herhangi bir X kümesinde, ancak ve ancak A ve B nin her ikisi de boş değilse, $A \delta B$ tanımlanabilir. Bu da X üzerinde bir yakınlık tanımlar. Bu yakınlığa apaçık yakınlık denir.

b) Herhangi bir X kümesinde, ancak ve ancak $A \cap B \neq \phi$ ise $A \delta B$ tanımlanır. Bu ifade, X üzerinde her zaman bir yakınlık tanımlar, bu yakınlığa ayırtık yakınlık adı verilir.

c) Herhangi bir X normal topolojik uzayında, ancak ve ancak $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \phi$ ise $A \delta B$ tanımlanır. Bu da X üzerinde, elemanter yakınlık adı verilen bir yakınlık verir. Ancak ve ancak X, T_0 ise ayrılmış uzaydır. İleride görüleceği gibi, tüm yakınlıklar elemanter yakınlıklar olarak elde edilebilir.

d) $\mathcal{U}$ köşegen düzgünlüklü bir X uzayında, ancak ve ancak bir $U \in \mathcal{U}$ için $U[A] \cap U[B] = \emptyset$ ise, $A \delta B$ tanımlanır. Başka bir deyişle, $V \circ V \subset U$ olacak şekilde $V \in \mathcal{U}$ elemanlarının varlığından, yukarıdaki tanım, ancak ve ancak bir $U \in \mathcal{U}$ için $U[A] \cap B = \emptyset$ ise $A \delta B$ şeklinde ifade edilebilir.

Eğer X üzerinde bir μ örtü düzgünlüğü verilmişse tanım, ancak ve ancak bir $\mathcal{U} \in \mu$ için, $Y_1(A, \mathcal{U}) \cap Y_1(B, \mathcal{U}) = \emptyset$ ise $A \delta B$ şeklini alır. Başka bir deyişle, $\mathcal{U}'^* < \mathcal{U}$ olacak şekilde $\mathcal{U}'$ elemanlarının varlığından tanım, ancak ve ancak, bir $\mathcal{U} \in \mu$ için, $Y_1(A, \mathcal{U}) \cap B = \emptyset$ ise $A \delta B$ olarak yazılabilir.

Bu yollardan herbiri ile elde edilebilen yakınlık düzgünleştirilebilir yakınlık adını alır. Daha sonra görüleceği gibi, tüm yakınlıklar düzgünleştirilebilir.

Her iki halde bir düzgünlük tarafından üretilmiş yakınlık ancak ve ancak düzgünlüğün kendisi ayrılmış ise ayrılmıştır.

e) (d) nin özel bir hali olarak, bir X metrik uzayında bir yakınlık, ancak ve ancak $d(A, B) = 0$ olduğunda $A \delta B$ tanımlanırsa elde edilir. Bir yakınlık metrik uzaydan bu tarzda elde edilebildiğinde, metriklenebilir adını alır. Metriklenebilir yakınlıklar daima ayrılabilir. Bunların ayrılmaz karşılıkları sözde metriklenebilir yakınlıklardır. Bunların tanım ve özellikleri açıkça metriklenebilir yakınlıklarınkine benzer.

7.3. Tanım Bir (X, δ) yakınlık uzayında, ancak ve ancak $A \delta (X - B)$ ise $A \subset\subset B$ şeklinde yazılır. $A \subset\subset B$ iken, B ye, A nın bir yakınlık komşuluğudur (p -komşuluğu, δ -komşuluğu) denir.

7.4. Teorem Yakınlık komşulukları, herhangi $A, B, C \subset X$ için, aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$P-1)' \emptyset \subset\subset A,$$

$$P-2)' A \subset\subset B \text{ ise } A \subset B \text{ dir,}$$

$$P-3)' \text{ Ancak ve ancak } A \subset\subset B \text{ ve } A \subset\subset C \text{ ise, } A \subset\subset (B \cap C) \text{ dir}$$

$$P-4)' \text{ Eğer, } A \subset\subset B \text{ ise, bir } C \text{ için, } A \subset\subset C \subset\subset B \text{ dir,}$$

ve bir ayrılmış uzayda

$P-5)$ Eğer $a \neq b$ ise $a \subset\subset X - \{b\}$ dir.

Tersine, $\subset\subset$ bağıntısı bir X kümesinin, $P-1)$ ' den $P-4)$ ' e kadar özelliklerini sağlayan altkümeleri arasındaki bağıntıdır. Ancak ve ancak $A \subset\subset X - B$ ise, $A \delta B$ dir vasıtasıyla X üzerinde δ yakınlığını tanımlayabiliriz, ve A nın δ ya bağlı yakınlık komşulukları kesinlikle $A \subset\subset B$ deki B kümeleri olacaktır. Bundan başka, δ , ancak ve ancak $P-5)$ ' sağlanır ise ayrılmış olacaktır.

7.5. Teorem Herhangi bir (X, δ) yakınlık uzayında:

- a) $A \delta B$ ve $A \subset C, B \subset D$ ise $C \delta D$ dir,
- b) $A \cap B \neq \emptyset$ ise $A \delta B$ dir,
- c) $A \subset\subset B \subset C$ ise $A \subset\subset C$ dir.

İspat (a) şıkkı P-3) ten, (b)şıkkı, (a) ve P-2) den ve (c) şıkkı da $P-3)$ ' den elde edilir.

7.6 Tanım Bir (X, δ) yakınlık uzayında $\bar{A} = \{x \mid x \delta A\}$ tanımlansın. Sonuç, $P(X)$ üzerinde bir kaplama operatörüdür. Böylece, X üzerinde verilen bir topoloji δ tarafından üretilmiş topoloji adını alır. Topolojileri yakınlıklardan bu yolla türetilen topolojilere, yakınlılaştırılabilir denir.

Bir δ tarafından üretilmiş topolojide, bir x noktasının D komşulukları kesin olarak x in yakınlık komşuluklarıdır; yani, $x \subset\subset D$ olduğu D kümeleridir. Bu genel olarak doğru değildir, bununla birlikte, bir A kümesinin komşulukları A nın yakınlık komşuluklarıdır.

Bir (X, δ) yakınlık uzayı üzerinde bir topoloji gözönüne alındığında bu topoloji, δ tarafından üretilen topolojiyi olarak kabul edilir.

7.7. Teorem a) Ancak ve ancak, $A \delta B$ ise, $\bar{A} \delta \bar{B}$ dir.

b) $A \subset\subset B$ ise, $\bar{A} \subset B^\circ$ dir; tersi doğru değildir.

8. KOMPAKTLIKLAR VE YAKINLIKLAR.

Burada temel amaç, bir X Tychonoff uzayı üzerindeki uygun yakınlıklar ile X in kompaktlaştırılmaları arasında bire-bir eşleme kurmaktır.

8.1. Teorem Bir kompakt Hausdorff uzayı, ancak ve ancak, $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$ ise $A \delta B$ elemanter yakınlığı ile verilen, bir tek yakınlık kabul eder.

İspat Böyle bir uzay, bir tek düzgünlükle düzgünleştirilebilirdir. Böylece, bu uzay bir tek δ yakınlığı ile yakınlaştırılabilir olacaktır.

Eğer $A \delta B$ ise o zaman $\overline{A} \delta \overline{B}$ (7.7) olur ve dolayısıyla $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ dur.

Karşıt olarak, $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ varsayalım. Her bir $x \in \overline{A}$ için $X - \overline{B}$ açıktır ve x i içerir. Böylece bir C_x açık kümesi için, $x \in C_x \subset X - \overline{B}$ dir. $x \in \overline{A}$ olmak üzere C_x kümeleri ile $\overline{A}$ nın örtüsü, örneğin $\overline{A} \subset C_{x_1} \cup \dots \cup C_{x_n} = C$ şeklinde sonlu bir altörtüye sahiptir. Burada her $i = 1, \dots, n$ için $C_{x_i} \subset X - \overline{B}$ olur. Öyleyse $C \subset X - \overline{B}$ olup dolayısıyla $\overline{A} \subset X - \overline{B}$ elde edilir. Böylece $\overline{A} \delta \overline{B}$ ve böylece (7.7 den) $A \delta B$ dir.

X herhangi bir Tychonoff uzayı olsun. O zaman X , kompakt Y uzayları içine değişik yollarla yoğun olarak gömülebilir. Böylece her bir Y uzayının bir tek yakınlığı vardır ve yakınlığın X e kısıtlaması, X üzerinde uygun bir yakınlık verir. Bu yakınlığı δ_Y ile göstereceğiz.

Karşıt olarak, X üzerinde herhangi bir uygun δ yakınlığı verildiğinde, bu δ yakınlığı, X üzerinde bir tek tümel sınırlı μ_δ düzgünlüğüne karşı gelir ve (X, μ_δ) nın X düzgün tamamlaması tam, tümel sınırlı düzgün uzay ve böylece X in bir kompaktlaştırılmasıdır. Bundan başka, (X, μ_δ) tek düzgünlüğü ile X in düzgün bir altuzayı olduğundan $\delta = \delta_X$ elde edilir.

8.2. Tanım δ yakınlığına karşılık gelen X in $\beta_\delta X$ tek kompaktlaştırılması, δ ya bağlı X in Samuel kompaktlaştırılması adını alır.

Böylece X üzerindeki yakınlıklar (ve dolayısıyla X üzerindeki tümel sınırlı düzgünlükler), X in kompaktlaştırılmaları ile bire-bir karşılık gelirler. Ayrıca 7.2 (c) deki iddianın kuruluş

yöntemi her yakınlığın bir elemanter yakınlığı olduğunu kanıtlar. Daha doğru bir ifade ile, her ayrılmış yakınlık, kompakt bir Hausdorff uzayı üzerinde bir elemanter yakınlığın kısıtlamasıdır.

8.3. Tanım δ_1 ve δ_2 aynı X kümesi üzerindeki yakınlıklar ise, ancak ve ancak, $A \delta_1 B$ iken $A \delta_2 B$ yi gerektirirse, δ_1 , δ_2 den daha incedir (ya da δ_2 , δ_1 den daha kabadır) denir. Doalyısıyla ince yakınlıklarda, birbirine yakın olan kümeleri için en güçlüdür.

Yakınlık komşulukları dili ile, ancak ve ancak, $A \subset\subset_2 B, A \subset\subset_1 B$ yi gerektirirse, $\subset\subset_1$, $\subset\subset_2$ den daha incedir.

8.4. Teorem X üzerindeki yakınlıkların her $\{\delta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ ailesi bir $\sup \bar{\delta}$ ve bir $\inf \underline{\delta}$ ya sahiptir.

İspat δ_λ yakınlığına karşı gelen p -komşuluk işlemini $\subset\subset_\lambda$ ile gösterelim. δ_λ yakınlıklarının $\inf$ nu tanımlamak için,

a) Ancak ve ancak, her $\lambda \in \Lambda$ için $A \subset\subset_\lambda B$ ise $A \subset\subset' B$ dir.

b) Ancak ve ancak, $C_0 = A$, $C_1 = B$ ve $s < t$, $C_s \subset\subset' C_t$ yi gerektirecek şekilde $[0,1]$ deki her bir ikili rasyonel s için bir $C_s \subset X$ kümesi varsa, $A \subset\subset B$ olsun.

Önce, eğer $A \subset\subset B$ ise o zaman $A \subset\subset' B$ ve dolayısıyla her λ için $A \subset\subset_\lambda B$ olur. Böylece $\subset\subset$ tüm δ_λ lardan daha kabadır. İkinci olarak, eğer, $\subset\subset^*$, tüm $\subset\subset_\lambda$ lardan daha kaba ise, o zaman $A \subset\subset^* B$ verildiğinde

$$A \subset\subset^* C_{1/2} \subset\subset^* B$$

olacak şekilde $C_{1/2}$ ve

$$A \subset\subset^* C_{1/4} \subset\subset^* C_{1/2} \subset\subset^* C_{3/4} \subset\subset B$$

olacak şekilde $C_{1/4}$ ve $C_{3/4}$ bulunabilir. Bu şekilde devam edilerek her bir ikili rasyonel sayısı için $s < t$ gerektirir $C_s \subset\subset^* C_t$, bu da $C_s \subset\subset' C_t$ gerektirecek şekilde bir C_s kümesi

elde edilir. Burada $C_0 = A$ ve $C_1 = B$ dir. Bundan $A \subseteq \subseteq B$ sonucu çıkar. Böylece $\subseteq \subseteq$ iddia edildiği gibi $\subseteq \subseteq_\lambda$ nın inf udur.

Sup ları elde etmek için, verilen aileden daha ince tüm yakınlıkların inf mu alınabilir (böyle daha ince bir yakınlık vardır: ayırtık yakınlık). Aşağıdaki şekilde apaçık bir yapı verelim.
Tanım:

a) Ancak ve ancak, bir $\lambda \in \wedge$ için $A \subseteq \subseteq_\lambda B$ ise $A \subseteq \subseteq'' B$ dir.

b) Ancak ve ancak, her i ve j için $A = \bigcup_{i=1}^m A_i$, $B = \bigcap_{j=1}^n B_j$ ve $A_i \subseteq \subseteq'' B_j$ olacak şekilde

$A_1, \dots, A_m$ ve $B_1, \dots, B_n$ kümeleri varsa, $\overline{A \subseteq \subseteq B}$ dir.

Burada $\overline{\subseteq \subseteq}$ nın X üzerinde bir p -komşuluk bağıntısı olduğunu belirtelim. Bunun δ_λ yakınlığının sup u olduğunu göstereceğiz.

Kuşkusuz bu, her δ_λ dan daha incedir. Çünkü, eğer herhangi bir λ için $A \subseteq \subseteq_\lambda B$ ise o zaman $A \subseteq \subseteq'' B$ ve dolayısıyla $\overline{A \subseteq \subseteq B}$ olur. Eğer $\subseteq \subseteq^*$ her δ_λ dan daha ince herhangi bir yakınlığı gösterirse ve eğer $\overline{A \subseteq \subseteq B}$ ise, o zaman her i ve j için $A_i \subseteq \subseteq'' B_j$ olmak üzere

$A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ ve $B = \bigcap_{j=1}^n B_j$ dir. Yani $\lambda_{ij} \in \wedge$ için $A_i \subseteq \subseteq_{\lambda_{ij}} B_j$ olup, böylece her i için

$A_i \subseteq \subseteq^* \bigcap_{j=1}^n B_j$ dir. Dolayısıyla, $A = \bigcup_{i=1}^m A_i \subseteq \subseteq^* B = \bigcap_{j=1}^n B_j$ elde edilir. Yani $A \subseteq \subseteq^* B$ olur.

Böylece $\overline{\subseteq \subseteq}$, her bir δ_λ dan daha ince en kaba yakınlığı gösterir.

8.5. Teorem Eğer, $\{\delta_\lambda \mid \lambda \in \wedge\}$, X üzerindeki bir τ topolojisi üreten X üzerindeki tüm yakınlıkların bir ailesi ise, o takdirde $\delta = \sup \delta_\lambda$ da τ yu üretir.

İspat D, x in bir $\bar{\delta}$ -komşuluğudur $\Leftrightarrow x \in \overline{D} \Leftrightarrow D = D_1 \cap \dots \cap D_n$. Burada $\lambda_j \in \wedge$ için $x \subseteq \subseteq_{\lambda_j} D_j \Leftrightarrow D = D_1 \cap \dots \cap D_n$ olup, burada her bir D_j, x in bir τ -komşuluğudur $\Leftrightarrow D, x$ in bir τ -komşuluğudur.

8.6. Tanım Tam düzenli (yakınlaştırılabilir) bir X topolojik uzayı verildiğinde X üzerindeki topolojiye uygun X üzerindeki en ince yakınlığa, X üzerindeki ince yakınlık denir.

8.7. Teorem Eğer δ_1 ve δ_2 , bir X Tychonoff uzayındaki uygun yakınlıklar ise o zaman, ancak ve ancak, $f|X$ özdeşlik olacak şekilde sürekli bir $f : \beta_{\delta_1} X \rightarrow \beta_{\delta_2} X$ fonksiyonu varsa, δ_1 , δ_2 den daha incedir (yani X in kompaktlaştırılmasının kümesi üzerindeki kısmi sıralamalarda $\beta_{\delta_1} X$, $\beta_{\delta_2} X$ den daha büyüktür).

İspat δ_1 , δ_2 den daha ince ise, $i : (X, \delta_1) \rightarrow (X, \delta_2)$ özdeşliği bir p -tasviridir. Böylece $i : (X, \mu_{\delta_1}) \rightarrow (X, \mu_{\delta_2})$ düzgün süreklidir ve böylece gerekli f tasviri veren, $\beta_{\delta_1} X$ ve $\beta_{\delta_2} X$ düzgün tamamlamalarına genişler.

8.8. Sonuç Eğer, δ bir X Tychonoff uzayı üzerinde ince düzgünlük ise o zaman $\beta_{\delta} X = \beta X$ dir.

KAYNAKLAR

Arhangel'skii, A., (1965), Pontryagin, L.S., General Topology I, Springer-Verlag

Dugundji, J., (1966), Topology, Allyn And Bacon, Inc., Boston.

Hocking, J.G., Young, G.S, (1961), Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London.

James, J.M., (1990), Introduction to Uniform Spaces, Cambridge University Press, New York.

Kelley, J.L., (1955), General Topology, D Van Nostrand Comp., Inc., New York.

Thron, W.J., (1966), Topological Structures, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Willard, S., (1970), General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Canada



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 09.04.1980

Doğum yeri Ankara

Lise 1993-1997 Kenan Evren Lisesi

Lisans 1997-2001 Mimar Sinan Üniversitesi Fen Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurum

2002-Devam ediyor Milli Eğitim Bakanlığı, Matematik Öğretmeni

