

154590

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HİLBERT UZAYINDA LİNEER OPERATÖRLERİN
YARI GRUPLARI ve BAZI UYGULAMALARI**

Matematikçi Reyhan GÖÇMEZ MUTLU

FBE Matematik Mühendisliği Ana Bilim Dalında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU (YTÜ)

Doç. Dr. Ömer Cök



Prof. Dr. Mehmet
Bayramoğlu



Prof. Dr. Neziye

Yahnioğlu

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
KISALTMA LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1 GİRİŞ.....	1
2 LİNEER OPERATÖRLERİN YARI GRUPLARI	2
2.1 Yarı Grupların Tanımı ve Bazı Özellikleri.....	2
2.2 Ekspansiyel Büyüme Özelliği	4
2.3 Rezolvent.....	5
3 YARI GRUPLARIN INFINİTESİMAL GENERATOR OPERATÖRÜNE GÖRE OLUŞTURULMASI	10
4 HİLBERT UZAYLARINDA YARI GRUPLAR.....	13
4.1 Dissipatif Yarı Gruplar	13
5 KOMPAKT YARI GRUPLAR.....	17
5.1 Hilbert-Schmidt Yarı Grupları	22
6 ANALİTİK (HOLOMORFİK) YARI GRUPLAR	24
7 YARI GRUPLARA BAZI ÖRNEKLER.....	29
8 SONUÇLAR	36
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ	38

SİMGE LİSTESİ

A	Verilen D uzayı üzerindeki infinitesimal generator operatörü
I	Banach uzayında birim operatör
$R(\lambda, A)$	A kapalı operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen rezolvent kümesi
$T(t)^*$	Hilbert uzayında iç çarpım
$S(x_k; \varepsilon)$	x_k merkezli ve ε yarıçaplı küre



KISALTMA LİSTESİ

con	Sabit
H.S.	Hilbert-Schmidt yarı grubu
Re λ	λ özdeğerinin reel kısmı
Sup	Supremum



ÖNSÖZ

Bu tez, bir parametreye bağlı yarı grupların özelliklerinden elde edilen soyut sonuçların, bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerine çözüm olanağı sağladığını göstermek amacıyla hazırlanmıştır.

Bu tezin hazırlanması sürecindeki büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu'na ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



ÖZET

Bu çalışmada bir parametreye bağlı yarı grupların özellikleri incelenmiştir.Özel olarak kompakt, Hilbert-Schmidt tipli ve analitik yarı gruplar dikkate alınmıştır.Yarı grupların yardımı ile bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözüm formülleri elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: **Banach uzayı, Hilbert uzayı, lineer operatör, kapalı operatör, yarı grup.**



ABSTRACT

The properties of one parameter semigroups were studied in this thesis. Especially compact, Hilbert-Schmidt typed and analytic semigroups were taken into consideration. The solution formulas of some partial differential equations were obtained with using properties of semigroups.

Keywords: Banach space, Hilbert space, linear operator, closed operator, semigroup.



1. GİRİŞ

Matematik ve fizikte kullanılan çok sayıda kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü problemi bir parametreye bağlı yarı grupların incelenmesine indirgenir. Bundan dolayı bu alanda çok sayıda araştırma yapılmış ve çeşitli kitaplar yazılmıştır. Bu tez çalışmasında Banach ve Hilbert uzaylarında verilmiş bir parametreye bağlı yarı grupların özellikleri incelenmiştir. Esas üzerinde durduğumuz yarı gruplar kompakt, Hilbert-Schmidt tipinde ve analitik yarı gruplar olmuştur. Elde edilen soyut sonuçlar çeşitli kısmi türevli diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerine uygulanmıştır. Bu konu çok sayıda çalışmada yer almıştır



2. LİNEER OPERATÖRLERİN YARI GRUPLARI:

2.1 Yarı Grupların Tanımı ve Bazı Genel Özellikleri:

$t \geq 0$ olmak üzere $T(t)$ bir H Banach uzayını kendi içine götüren bir lineer sınırlı operatör ailesini gösterebiliriz. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, $T(t)$ 'ye, lineer sınırlı operatörlerin yarı grubu ya da kısaca yarı grup denir:

i) $T(0) = I$ (Burada I , H 'de birim operatörü gösteriyor.)

ii) $T(t_1+t_2) = T(t_1)T(t_2) = T(t_2)T(t_1)$

iii) $t \rightarrow 0+$ iken $\|T(t)x - x\| \rightarrow 0$

Eğer $\forall x \in H$ için yukarıdaki (iii) koşulu sağlanıyorsa, $T(t)$ yarı grubu başlangıç noktasında kuvvetli süreklidir ya da kısaca kuvvetli süreklidir denir.

Not: $\forall x \in H$ için $t \rightarrow 0+$ iken $T(t)x \rightarrow T(0)x$ ise, $T(t)$ 0'da kuvvetli süreklidir denir.

Zaten yarı grup olma özelliğinden, başlangıç noktasında kuvvetli sürekli olma özelliği her $t \geq 0$ için sağdan kuvvetli sürekli olmayı gerektirir. Bunun için $\Delta > 0$ iken

$$T(t+\Delta)x - T(t)x = T(t)[T(\Delta)x - x]$$

olduğunu göz önüne alalım. Şimdi bir $L > 0$ seçelim. H 'de verilen herhangi bir x için (iii)'den,

$$\|T(t)x\| \leq c, \quad t \leq \Delta \text{ olacak şekilde bir } \Delta \text{ bulabiliriz. } t \leq L \text{ olacak şekilde her } t \text{ için,}$$

$$t = k\Delta + r, \quad k \leq (L/\Delta), \quad r < \Delta$$

öyle ki;

$$\|T(t)x\| \leq \|T(\Delta)^k T(r)x\| \leq \|T(\Delta)^k\| c < \infty \text{ ya da}$$

$$\forall x \text{ için } \sup_{0 \leq t \leq L} \|T(t)x\| < \infty$$

ve böylece, düzgün sınırlılık ilkesi gereği,

$$\sup_{0 \leq t \leq L} \|T(t)\| < M < \infty$$

ya da $\|T(t)\|$ sınırlı aralıklarda sınırlıdır diyebiliriz. Böylece, $0 \leq t \leq L$ ve yeterince küçük Δ için,

$$\|T(t)x - T(t-\Delta)x\| = \|(T(t-\Delta))[T(\Delta)x - x]\| \leq M \|T(\Delta)x - x\| \rightarrow 0 \text{ olur.}$$

H 'nin, üzerinde $T(t)$ 'nin diferansiyellenebilir olduğu yoğun bir alt uzayını bulabiliriz. İlk olarak, sabit bir $x \in H$ ve sabit $t > 0$ için,

$$y = \int_0^t T(\eta)x d\eta \quad (\text{Burada integral Riemann anlamındadır.})$$

$$\begin{aligned}
T(\Delta)y-y &= \int_0^t (T(\eta+\Delta)x-T(\eta)x)d\eta = \int_0^{t+\Delta} T(\eta)x d\eta - \int_0^t T(\eta)x d\eta \\
&= \int_t^{t+\Delta} T(\eta)x d\eta - \int_0^\Delta T(\eta)x d\eta = \int_0^\Delta T(\eta)(T(t)x)d\eta - \int_0^\Delta T(\eta)x d\eta \quad \text{olur.}
\end{aligned}$$

Şimdi her x için,

$$\left\| \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta T(\eta)x d\eta - x \right\| = \left\| \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta [T(\eta)x - x] d\eta \right\| \leq \sup_{0 < \eta < \Delta} \|T(\eta)x - x\| \rightarrow 0$$

Böylece $\frac{T(\Delta)y - y}{\Delta} \rightarrow T(t)x - x$ olması gerekir.

D , her x elemanı için $\frac{[T(\Delta)x - x]}{\Delta}$ yakınsak olacak şekilde, bir alt uzay olsun. D üzerinde,

infinitesimal generator adı verilen aşağıdaki A operatörünü tanımlayalım:

$$Ax = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{T(\Delta)x - x}{\Delta} \quad (2.11)$$

Bu A operatörünün lineer olduğu açıktır. Şimdi D 'nin H 'de yoğun olduğunu gösterelim:

$$D \text{ 'nin } \int_0^t T(\eta)x d\eta \quad (2.12)$$

şeklinde elemanlar içerdiğini göstermiştik. Buradan, D 'nin, bu tür elemanların oluşturduğu lineer alt uzayı içerdiği görülür. Bu taktirde,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(\eta)x d\eta = x \quad \text{olur.}$$

Böylece, D 'nin H 'de yoğun olduğu sonucu elde edilir. Buna ek olarak D içindeki bir x için,

$T(t)x$ 'in kuvvetli diferansiyellenebilir olduğu ve

$$\frac{d}{dt} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x \quad \text{olduğu görülür.}$$

2.2 Eksponensiyel Büyüme Özelliği:

Şimdi, $\|T(t)\|$ için, karakteristik büyüme özelliği kavramını tanıtacağız.

$w(t) = \log \|T(t)\|$, $t \geq 0$ olsun. O zaman, yarı grup özelliğinden,

$w(t_1+t_2) \leq w(t_1) + w(t_2)$ bulunur. Bu ise, $w(t)$ 'nin subadditive olmasını gerektirir.

$w_0 = \inf_{t \geq 0} \frac{w(t)}{t}$ şeklinde tanımlayalım. O zaman $w_0 = -\infty$ olabilir.

Öncelikle w_0 'ın sonlu olduğunu varsayalım. O zaman, verilen her $\varepsilon > 0$ için bir a bulabiliriz,

öyle ki; $\frac{w(a)}{a} \leq w_0 + \varepsilon$ olsun.

Her pozitif t sayısını $0 \leq r < a$ iken, k bir pozitif tam sayı olmak üzere, $t = ka + r$ şeklinde yazalım. O zaman, $\forall k > k_0(\varepsilon)$

$$\frac{w(t)}{t} = \frac{w(ka+r)}{ka+r} \leq \frac{kw(a)}{(ka+r)} + \frac{w(r)}{(ka+r)} \leq \frac{w(a)}{(a+\frac{r}{k})} + \frac{w(r)}{t} \leq w_0 + \varepsilon + \frac{w(r)}{t}, \forall k > k_0(\varepsilon) \quad (2.21)$$

Görüldüğü gibi, kuvvetli süreklilik, $\|T(t)\|$ 'nin her sonlu aralıkta sınırlı olmasını gerektirir. Böylece, bir M_ε seçebiliriz, öyle ki;

$$w(t) \leq \log M_\varepsilon + t(w_0 + \varepsilon), \quad t \leq \max(a, k_0(\varepsilon)) \quad \text{olsun.}$$

Burada, a 'nın seçimi ε 'a bağlı olduğundan, ε indisi, sabitin ε 'a bağlı olduğunu gösterir.

Böylece, her t için,

$$\frac{w(t)}{t} \leq \frac{(\log M_\varepsilon)}{t} + w_0 + \varepsilon \quad \text{olur. Buradan,} \quad (2.22)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t} \leq w_0 + \varepsilon \quad \text{olur. } \varepsilon \text{ keyfi olduğundan, } \frac{w(t)}{t} \geq w_0 \text{ olur. Bu ise,}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t} = w_0 \quad \text{olmasını gerektirir.} \quad (2.23)$$

Şimdi de $w_0 = -\infty$ olduğunu varsayalım. O zaman verilen her N tam sayısı için, bir a bulabiliriz, öyle ki;

$$\frac{w(a)}{a} \leq -N \quad \text{olsun. Daha önce de söylediğimiz gibi,}$$

$$\frac{w(t)}{t} \leq -N + \frac{(\log M_N)}{t} \quad \text{sınırlaması vardır.} \quad (2.24)$$

Böylece her N tam sayısı için,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t} \leq -N \quad \text{olduğunu gösterir.} \quad (2.25)$$

Eğer w sonlu ise o zaman,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için, } \|T(t)\| \leq M_\varepsilon \exp(t(w_0 + \varepsilon)) \quad (2.26)$$

eksponensiyel büyüme sınırlandırılması elde edilir.

w_0 'ın sonlu olmadığı durumlarda, (2.24)'den, her N için, bir M_N vardır, öyle ki,

$$\|T(t)\| \leq M_N \exp(-N) \quad \text{olur.} \quad (2.27)$$

(2.26) sınırlandırması, $\|T(t)\| \leq M \exp(w_0 t)$ şeklinde kesinleştirilemez.

$w_0 = -\infty$ olabileceğini bir örnek ile gösterelim:

Örnek : $[0,1]$ aralığında sürekli ve 1 noktasında değeri 0 olan fonksiyonların sınıfını göz önüne alalım. Bu sınıf Sup normu altında bir Banach uzayıdır :

$$\|f\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|.$$

Aşağıdaki şekilde bir $T(t)$ yarıgrubu tanımlayalım:

$$T(t) = g; \quad g(s) = \begin{cases} f(s+t), & 0 \leq s+t \leq 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

O zaman, $T(t)$ 'nin kuvvetli sürekli, ve $t > 1$ için $\|T(t)\| = 0$ olduğu kolayca görülür.

2.3 Rezolvent :

$\operatorname{Re} \lambda > 0$ iken, her λ için, $\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$ integralini tanımlayabiliriz. (2.26)'dan, sonlu

w_0 ve keyfi ε için,

$$e^{-\operatorname{Re} \lambda t} \|T(t)x\| \leq \|x\| M_\varepsilon \exp(-\operatorname{Re} \lambda t) \quad \text{olur.} \quad (2.31)$$

Böylece H' 'yi,

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \operatorname{Re} \lambda > w_0 \quad (2.32)$$

bağıntısı yardımıyla kendi içine götüren, lineer ve sınırlı $R(\lambda)$ operatörünü tanımlayabiliriz.

Eğer $w_0 = -\infty$ ise, o zaman her λ için $R(\lambda)$ operatörü tanımlıdır. (2.31)'den, ε keyfi bir sayı, w_0 sonlu ve $\operatorname{Re} \lambda > w_0 + \varepsilon$ için,

$$\frac{\|R(\lambda)\|}{(\operatorname{Re} \lambda - w_0 - \varepsilon)} \leq M_\varepsilon \quad \text{şeklinde bir bağıntı elde edilir.} \quad (2.33)$$

w_0 'ın sonlu olmadığı durumda, (2.27)'den, keyfi N sayısı ve $\operatorname{Re} \lambda > -N$ olacak şekilde her λ için,

$$\frac{\|R(\lambda)\|}{N + \operatorname{Re} \lambda} \leq \frac{M_N}{N + \operatorname{Re} \lambda} \quad \text{bağıntısı elde edilir.} \quad (2.34)$$

Buradan, özellikle, her kuvvetli sürekli yarıgrup için, $\operatorname{Re} \lambda$ yeterince büyük olmak üzere her λ için $R(\lambda)$ tanımlıdır ve

$$\lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \infty} \|R(\lambda)\| = 0 \quad \text{dır.} \quad (2.35)$$

Bundan sonra $\forall \operatorname{Re} \lambda > w_0$ için $R(\lambda)$ operatörünün görüntü kümesinin A 'nın tanım kümesi $D(A)$ 'ya eşit olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki bağıntıyı hesaplayalım:

$$\begin{aligned} (T(\Delta) - I) R(\lambda) x &= \int_{\Delta}^{\infty} e^{-\lambda t} [T(t+\Delta)x - T(t)x] dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{\lambda \Delta} T(t) x dt - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt \\ &= - \int_0^{\Delta} e^{-\lambda t} T(t) x dt + (e^{\lambda \Delta} - 1) \int_{\Delta}^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt \end{aligned}$$

$\Delta \rightarrow 0$ iken $\frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} e^{-\lambda t} T(t) x dt \rightarrow x$ olduğunu biliyoruz. Buradan, $\Delta \rightarrow 0$ iken,

$$\frac{(T(\Delta) - I)}{\Delta} R(\lambda) x \rightarrow -x + \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) x dt$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bu ise, $R(\lambda)$ 'nın görüntü kümesinin A 'nın tanım kümesi tarafından kapsandığını, ve bunun yanı sıra

$$\lambda R(\lambda) x - A R(\lambda) x = x \quad \text{olduğunu gösterir.} \quad (2.36)$$

Yani, A 'nın görüntü kümesindeki bir x için,

$$\left[\frac{T(\Delta) - I}{\Delta} \right] R(\lambda) x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left[\frac{T(t+\Delta)x - T(t)x}{\Delta} \right] dt \quad \text{sonucuna ulaştık. Buradan,}$$

$$\frac{T(t+\Delta)x - T(t)x}{\Delta} = T(t) \left[\frac{T(\Delta)x - x}{\Delta} \right]$$

olur ve böylece her x için eşitliğin sol tarafı $t \geq 0$ olmak üzere $T(t)Ax$ 'e yakınsar. Çünkü

$$\left\| \frac{T(t+\Delta)x - T(t)x}{\Delta} - T(t)Ax \right\| = \left\| T(t) \left(\frac{T(\Delta)x - x}{\Delta} - Ax \right) \right\| \leq c \|T(t)\| \quad \text{'dir. Buradan,}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left(\frac{T(t+\Delta)x - T(t)x}{\Delta} \right) dt \quad \text{'nin} \quad \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)Ax dt = R(\lambda)Ax \quad \text{'e yakınsadığı görülür.}$$

Bu ise eğer x , A 'nın tanım kümesi $D(A)$ 'nın elemanı ise, $A R(\lambda) x = R(\lambda) A x$ olmasını gerektirir. Böylece (2.36)'dan, $R(\lambda) x - R(\lambda) A x = x$, $x \in D(A)$ ve, A 'nın tanım kümesinin $R(\lambda)$ 'nın görüntü kümesi tarafından kapsandığı sonucuna ulaşılır. Yani, $D(A) = R(\lambda)$ 'nın görüntü kümesi olur. Bu, ayrıca, A 'nın kapalı olduğunu göstermek için de yeterlidir.

Tanım 2.31: T bir sınırlı ve lineer operatör, $D(T)$ de T 'nin tanım kümesi olsun. Eğer, $x_n \rightarrow x$ ve $Tx_n \rightarrow y$ iken, $x \in D(T)$ ve $y = Tx$ ise, o zaman T 'ye kapalı operatör denir. T sınırlı bir operatör ve tanım kümesi kapalı ise T kapalı operatördür. Bütün uzayda tanımlı olan her sınırlı operatör kapalıdır, ancak tersi doğru değildir.

Eğer $x_n \in D(A)$ ve $Ax_n = y_n$; $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ ise, (2.36)'dan, $x_n = R(\lambda)(\lambda x_n - Ax_n)$ olur. Böylece, $x = R(\lambda)(\lambda x - y)$ (2.37)

olduğu görülür ve böylece $x \in D(A)$ olur. Ayrıca, (2.36)'dan,

$$x - \lambda R(\lambda)x = -A R(\lambda)x \text{ dir}$$

Buradan, (2.37)'yi de dikkate alarak, $R(\lambda)y = A R(\lambda)x = R(\lambda)Ax$, $x \in D(A)$ elde edilir.

Böylece $R(\lambda)(y - Ax) = 0$ olur. Fakat $0 \in R(\lambda)$ 'nin noktasal spektrumu içinde yer almaz. Eğer $R(\lambda)z = 0$ ise, o zaman (2.36)'dan $z = 0$ olur. Bu ise arzu edilen $y = Ax$ sonucunu verir.

(2.36) ve (2.37)'den, $R(\lambda)$ 'nin, A kapalı operatörünün rezolventi olduğu görülüyor. İleriki kısımlarda bunu belirtmek için $R(\lambda)$ yerine $R(\lambda, A)$ gösterimini kullanacağız.

A 'nın spektrumu $\text{Re } \lambda \leq w_0$ yarı düzlemi tarafından kapsanır. (2.31)'deki eksponensiyel formülü dikkate alınmazsa, rezolvent kümesi $\text{Re } \lambda > w_0$ yarı düzleminde daha büyük olurdu.

Şimdi rezolventin bazı önemli özelliklerini verelim. A 'nın rezolvent kümesi $\text{Re } \lambda > w_0$ yarı düzlemini kapsar. Böyle bir λ için, ayrıca:

$$1. R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt \text{ ve } \lim_{\text{Re } \lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad x \in H \text{ olur.} \quad (2.38)$$

Eğer $x \in D(A)$ ise, (2.36)'den, $\lambda R(\lambda, A)x - A R(\lambda, A)x = x$ olur ve soldaki ikinci terim (2.35)'den dolayı sıfıra gider. Ayrıca, (2.33) ve (2.34)'den, $\text{Re } \lambda$ yeterince büyük olmak üzere her λ için

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq M < \infty \text{ olur.} \quad (2.39)$$

A 'nın tanım kümesi H 'de yoğun olduğundan (2.38)'den (2.39) elde edilir.

2. $R(\lambda, A)x$, $x \in D(A)$ elemanlarının alt uzayı $D(A)$ 'da yoğundur.

$y \in D(A)$ olsun. O zaman, H 'deki bazı x 'ler için, $y = R(\lambda, A)x$ olduğunu biliyoruz. $D(A)$ H 'de yoğun bir küme olduğundan, $D(A)$ 'da, $x = \lim x_n$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi bulabiliriz. Bu ise, $y = \lim R(\lambda, A)x_n$ ve $x_n \in D(A)$ olmasını gerektirir. O zaman,

$R(\lambda, A)^n$ 'nin görüntü kümesi her n pozitif tam sayısı için yoğun olur. Bu ise, A^n 'in tanım kümesinin yoğun olduğunu gösterir. Çünkü A^n 'in tanım kümesi $R(\lambda, A)^n$ 'nin görüntü kümesini kapsar. Buradan,

$D_\infty = \bigcap_n D(A^n)$ 'nin (ya da $D[A^\infty] = \bigcap_n D(A^n)$) H 'de yoğun olduğunu gösterebiliriz. Bunun için,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \lambda > w_0, \quad x \in H \quad (2.310)$$

şeklindeki elemanlar sınıfını göz önüne alalım. Bu sınıfın yoğun olduğunu ve D_∞ tarafından kapsandığını gösterebiliriz:

$x \in D^\infty$ için $T(t)x$ 'in sonsuz diferansiyellenebilir olduğu açıktır.

3. $x \in D(A)$ için, $\lim_{\text{Re} \lambda \rightarrow \infty} (\lambda^2 R(\lambda, A)x - \lambda x) = Ax$ olur. Bu eşitlik $\lambda^2 R(\lambda, A)x - \lambda x = \lambda R(\lambda, A)Ax$ 'den ve (2.38)'den kolayca elde edilir.

4. Rezolvent eşitliği gereği $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\mu, A) R(\lambda, A)$ olur.

$$5. \quad \|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M(w)}{(\text{Re} \lambda - w)^n}, \quad \text{Re} \lambda > w > w_0 \text{ (Sınırlarımız var.)}$$

$$R(\lambda, A)^n x = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\lambda(r_1 + r_2 + \dots + r_n)} x T(r_1 + r_2 + \dots + r_n) x dr_1 dr_2 \dots dr_n$$

olduğu için, $\varepsilon = w - w_0$ seçersek, n 'den bağımsız bir M_ε sabiti için:

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq M_\varepsilon \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\text{Re} \lambda (r_1 + \dots + r_n) + w(r_1 + \dots + r_n)} dr_1 \dots dr_n = \frac{M_\varepsilon}{(\text{Re} \lambda - w)^n} \text{ olur.}$$

3.YARI GRUBUN İNFİNİTESTİMAL GENERATÖR OPERATÖRÜNE GÖRE OLUŞTURULMASI:

Herhangi $\lambda > w > w_0$ için, $\hat{T} = e^{-\lambda t} T(t)$ operatörü, $\hat{A} = A - \lambda I$ operatörü yardımıyla bir kuvvetli sürekli yarı gruptur. ($\hat{A}$ operatörü A operatörü ile aynı tanım kümesine sahiptir.) (2.26)'dan,

$$\|\hat{T}(t)\| \leq M e^{-\lambda t} e^{wt} \leq M \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$$\|T(t)\| \leq M < \infty \quad (3.1)$$

olacak şekilde bir $T(t)$ yarı grubuna sınırlı yarı grup denir. Bu durumda $w_0 \leq 0$ olur. Böylece $\text{Re} \lambda > 0$ olan her λ için rezolvent vardır ve buradan

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \quad \lambda > 0 \text{ olur.} \quad (3.2)$$

Eğer $M = 1$ ise, bu yarı gruba büzzen yarı grup denir.

Teorem 3.1 (Balakrishnan, 1976; Dunford vd., 1988; Hille vd., 1957): A , tanım kümesi H 'de yoğun bir D kümesi olan kapalı lineer bir operatör olsun. A 'nın bir kuvvetli sürekli büzzen yarı grubun infinitesimal generatör operatörü olması için gerek ve yeter koşul;

$$\forall \lambda > 0 \text{ için } \lambda \in A \text{'nin rezolvent kümesi içinde olması ve } \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \text{ olmasıdır.}$$

Uyarı : Teoremin ifadesi, $\forall \lambda > 0$ yerine, yeterince büyük her λ şekline de uyarlanabilir.

İspat : Teoremin gerekliliği zaten ispatlanmıştır. Bu nedenle biz teoremin yeterliliğini ispatlamalıyız. Yeterliliği, (3.2)'yi, $0 < M < \infty$ olacak şekilde keyfi M için genelleştirerek ispatlayacağız. Bunun için problemin bir ters Laplace dönüşümünü bulmak yeterlidir. Bunun için de sadece pozitif reel sayıların yarı eksen üzerinde direkt dönüşümün değerleri ile çalışmamız uygun olur.

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Temel fikir $\lambda \rightarrow \infty$ iken D 'deki bir x için, $\lambda^2 R(\lambda, A) x - \lambda x \rightarrow Ax$ bağıntısını kullanmaktır. Bu bağıntı şu şekle uyarlanabilir:

$$\forall x \in D \text{ için } \|AR(\lambda, A)x\| = \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \frac{M\|Ax\|}{\lambda} \quad \text{ve}$$

$\lambda R(\lambda, A)x - R(\lambda, A)Ax = x$ olur. Buradan $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = 0$ olur.

D yoğun olduğundan ve $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq M$ olduğundan, yukarıda D'deki bir x için

yazılanlar, H'deki her x için doğru olur. Özellikle, D'deki bir x için,

$$\lambda^2 R(\lambda, A)x - \lambda x = \lambda [\lambda R(\lambda, A)x - x] = \lambda R(\lambda, A)Ax \rightarrow Ax, \quad \lambda \rightarrow \infty \text{ olur.}$$

$S_\lambda(t) = e^{t\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda t}$ olsun. Bu aslında operatör normuna göre sürekli bir yarı gruptur. O halde $\lambda \rightarrow \infty$ iken,

$$S_\lambda(t)x \rightarrow e^{At}x \sim T(t)x, \quad x \in D(A) \text{ olur. Şimdi bunu ispatlayalım:}$$

$$S_\lambda(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n} R(\lambda, A)^n t^n}{n!} \text{ olduğunu biliyoruz. Buradan,}$$

$$\|S_\lambda(t)\| \leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n} \frac{\|R(\lambda, A)^n t^n\|}{n!} t^n \leq e^{-\lambda t} M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2n} t^n}{n! \lambda^n} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} M = M,$$

$\forall \lambda > 0, t > 0$ olur.

Şimdi, $\lambda \rightarrow \infty$ iken, $S_\lambda(t)x$ 'in yakınsak olduğunu göstermek için, Dunford tasarımını kullanarak :

$$\begin{aligned} S_{\lambda_1}(t)x - S_{\lambda_2}(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds} (S_{\lambda_1}(s) S_{\lambda_2}(t-s)x) ds \\ &= \int_0^t S_{\lambda_1}(s) S_{\lambda_2}(t-s) (B(\lambda_1)x - B(\lambda_2)x) ds \end{aligned} \text{ eşitliğini yazalım. Buradan}$$

$B(\lambda)x = \lambda^2 R(\lambda, A)x - \lambda x$ olur. Buradan ise,

$$\|S_{\lambda_1}(t)x - S_{\lambda_2}(t)x\| \leq M^2 t \|B(\lambda_1)x - B(\lambda_2)x\| \text{ olur.}$$

Böylece A'nın tanım kümesi üzerinde, $S_\lambda(t)$ her kompakt t aralığında düzgün

yakınsaktır. A'nın tanım kümesi yoğun olduğundan ve $\|S_\lambda(t)\| \leq M$ olduğundan $S_\lambda(t)x$,

her x için, her kompakt t aralığında düzgün yakınsaktır. Bu limiti $T(t)x$ ile gösterelim. O

zaman, $T(t)$ lineer sınırlı operatör olmak zorundadır. Aslında, $\|T(t)\| \leq M$ ve $\forall \lambda > 0$

için, $S_\lambda(t)$ t'ye bağlı bir yarı grup olduğundan, $T(t)$ de t'ye bağlı bir yarı gruptur. Düzgün

yakınsaklıktan, $T(t)$ 'nin kuvvetli sürekli olduğu sonucu çıkar. Artık sadece A'nın

infinitesimal generatör olduğunu göstermemiz gerekiyor.

A', $T(t)$ yarı grubunun generatörü olsun. Öncelikle $S_\lambda(t)$ 'nin λ 'dan bağımsız olarak

sınırlandırılmış bir yarı grup olduğunu belirtelim. Böylece, $\mu > 0$ için,

$$R(\mu, A')x = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} T(t)x dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\mu t} S_{\lambda}(t)x dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R(\mu, B(\lambda))x \text{ olur. Buradan,}$$

$\mu R(\mu, B(\lambda))x - R(\mu, B(\lambda))B(\lambda)x = x$ ve böylece A 'nın tanım kümesindeki bir x için, $\lambda \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa,

$$\mu R(\mu, A')x - R(\mu, A')Ax = x \quad \text{ya da} \quad R(\mu, A')(\mu x - Ax) = x \text{ olur.}$$

$y \in H$ olsun. O zaman, $x = R(\mu, A)y$ A 'nın tanım kümesinde yer alır ve böylece

$$R(\mu, A')(\mu R(\mu, A)y - A R(\mu, A)y) = R(\mu, A)y \quad \text{ya da} \quad R(\mu, A')y = R(\mu, A)y, y \in H \text{ olur.}$$

Buradan $D(A) = D(A')$ olduğu görülür.

$$\mu R(\mu, A)x - A R(\mu, A)x = x$$

$$\mu R(\mu, A')x - A' R(\mu, A')x = x \text{ olduğu göz önüne alınırsa,}$$

$$(A - A')R(\mu, A')x = 0 \text{ ve böylece, } Ax = A'x, x \in D(A) = D(A') \text{ olur.}$$

4.HİLBERT UZAYLARINDA YARI GRUPLAR:

4.1 Dissipatif Yarı Gruplar:

Teorem 4.11: A, bir kuvvetli sürekli ve sınırlı yarı grubun infinitesimal generatör operatörü olsun.O zaman, $T(t)^*$ (Hilbert uzayında eşlenik operatör) da, A^* infinitesimal generatör operatörü yardımıyla bir kuvvetli sürekli ve sınırlı yarı gruptur.

İspat: A kapalı operatör olduğundan ve tanım kümesi yoğun olduğundan, A^* operatörünün kapalı olduğunu ve tanım kümesinin yoğun olduğunu biliyoruz.Ayrıca her n tam sayısı için, $R(\lambda, A^*)^n = (R(\lambda, A))^n$, $\lambda > 0$ olduğunu da biliyoruz.Buradan,

$$\|R(\lambda, A^*)^n\| = \|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \quad \lambda > 0 \quad \text{olur ve böylece, } A^*, \quad M \text{ sınırı ile bir}$$

sınırlı yarı grup oluşturur ve bu yarı grup kuvvetli süreklidir.Aslında Teorem 3.1'den bu yarı grubun, $\lim_{t \rightarrow 0} e^{(\lambda^2 R(\lambda, A^*)t - \lambda t)} x = \lim_{t \rightarrow 0} (e^{\lambda^2 R(\lambda, A)t - \lambda t})^* x = T(t)^* x$ özelliği vardır.

Uyarı : Yarı grubun sınırlı olması koşulu bu sonuç için geçerli değildir.Bu nedenle, $T(t)$, A generatörü yardımıyla oluşturulmuş herhangi bir kuvvetli sürekli yarı grup olsun.O zaman, A^* kapalı operatör olur ve tanım kümesi yoğun bir küme olur. A^* 'ın tanım kümesindeki bir x için, $T(s)^* A^* x$ operatörü her sınırlı aralıkta zayıf süreklidir.Böylece $\forall y \in D(A)$ için,

$$\left[\int_0^t T(s)^* A^* x ds, y \right] = \int_0^t [x, AT(s)y] ds = [x, T(t)y - y] = [T(t)^* x - x, y]$$

olur ya da $D(A)$ yoğun olmak üzere ,

$$\int_0^t T(s)^* A^* x ds = T(t)^* x - x \quad \text{ve buradan, } x \in D(A^*) \text{ için } t \rightarrow 0 \text{ iken } \|T(t)^* x - x\| \rightarrow 0$$

olur.Fakat, A^* 'ın tanım kümesi yoğundur, ve herhangi sınırlı aralık üzerinde sınırlıdır, ayrıca

$$\|T(t)^*\| = \|T(t)\| \text{ 'dir. Böylece } T(t)^* \text{ başlangıç noktasında (orjinde) kuvvetli süreklidir, ve } A^*$$

da onun generatör operatörüdür.Bir tarafın varlığı diğer tarafın varlığını gerektirdiğinden,

$$R(\lambda, A^*) = R(\bar{\lambda}, A)^* \text{ olur.}$$

Tanım 4.11: Tanım kümesi yoğun olan kapalı bir A operatörüne, eğer, $\forall x \in H$ için, $[Ax, x] + [x, Ax] \leq 0$ oluyorsa, dissipatif operatör denir.

Uyarı: A bir dissipatif operatör ise, A^* dissipatif olmak zorunda değildir.

Eğer bir yarı grubun infinitesimal generatör operatörü dissipatif ise, bu yarı grubun dissipatif olduğunu söyleyebiliriz.

Lemma 4.11 (Balakrishnan, 1976): $T(t)$, bir H Hilbert uzayında bir büzen yarı grup olsun. O zaman, $T(t)$ dissipatiftir.

İspat: A , $T(t)$ yarı grubunun infinitesimal generatör operatörü ve $x \in D(A)$ olsun. O

zaman, $h(t) = [T(t)x, T(t)x]$ t 'ye göre diferansiyellenebilir ve

$$h'(t) = [T(t)Ax, T(t)x] + [T(t)x, T(t)Ax] \text{ olur.}$$

$$h(t) \leq h(0) \text{ (büzen yarı grup.)}$$

Böylece $h'(0) \leq 0$ ya da $h'(0) = [Ax, x] + [x, Ax] \leq 0$ olur. Öyleyse A , dissipatiftir.

Açıkça görülüyor ki, eğer A bir kuvvetli sürekli yarı grubun infinitesimal generatör operatörü ise ve A dissipatif ise, o zaman, yukarıdaki ifadeyi ters çevirirsek, yarı grubun bir büzen yarı grup olması gerekir. $x \in D(A)$ ve $h(t)$ yukarıdaki şekilde tanımlanmış ise,

$$h'(t) = [AT(t)x, T(t)x] + [T(t)x, AT(t)x] \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \text{ olur.}$$

Görüldüğü gibi, eğer $T(t)$ A generatörü ile tanımlı bir kuvvetli sürekli yarı grup ise, $T^*(t)$ de A^* generatörü ile tanımlı bir kuvvetli sürekli yarı gruptur.

Bir dissipatif operatörün ne zaman bir infinitesimal generatör operatör olduğu önemli bir sorudur. Bunun için A 'nın dissipatif olduğunu ve bazı sıfırdan farklı x ve reel bir λ için :

$Ax = \lambda x$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $[Ax, x] + [x, Ax] = 2\lambda[x, x]$ olması, λ 'nın nonpozitif olmasını gerektirir. Ayrıca, pozitif bir λ için, eğer, $\lambda x - Ax = y$ ise, o zaman

$$[y, y] = [\lambda x - Ax, \lambda x - Ax] = \lambda^2 [x, x] - \lambda [Ax, x] - \lambda [x, Ax] + [Ax, Ax] \text{ ve böylece}$$

$$\lambda^2 [x, x] \leq [y, y] \text{ olur. Böylece eğer } \lambda > 0 \text{ } A \text{'nin rezolvent kümesinin içinde ise, o zaman}$$

$$x = R(\lambda, A)y \text{ olur. Buradan,}$$

$$\lambda^2 \|R(\lambda, A)y\|^2 \leq \|y\|^2 \text{ ya da } \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \text{ elde edilir.}$$

Böylece, eğer A 'nın rezolvent kümesi pozitif eksenî içeriyorsa, A bir büzen yarı grup oluşturur.

Teorem 4.12 (Balakrishnan, 1976; Davies, 1980): A dissipatif olsun ve $I - A$ 'nın görüntü kümesi tüm uzay olsun. O zaman A bir büzen yarı grup oluşturur.

İspat: $Ax = x$ olması $x = 0$ olmasını gerektirdiğinden, 1 , A 'nın rezolvent kümesi içinde yer alır. $0 \leq \lambda - 1$ olsun. O zaman, $[I + (\lambda - 1)R(1, A)]^{-1}$ 'in $0 \leq |\lambda - 1| < 1$ için Neumann açılımına sahip olduğunu belirtelim (Balakrishnan, 1976). Öyleyse, $R(\lambda, A) = R(1, A) [I + (\lambda - 1)R(1, A)]^{-1}$ olur.

Fakat λ rezolvent kümesinin içinde iken, $\|R(\lambda, A)\| \leq 1$ olduğunu biliyoruz. Böylece,

$0 \leq \frac{\mu}{\lambda} - 1 < 1$ için, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\mu - \lambda)^n R(\lambda, A)^n$, $\mu > \lambda$ serisi yakınsaktır. Buradan, λ ,

A 'nın rezolvent kümesi içinde ise, μ de A 'nın rezolvent kümesi içinde olmalıdır, ve

$0 \leq \mu - \lambda < \lambda$ olur. Böylece, rezolvent kümesi pozitif reel eksenini içerir ve

$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$ olur. Böylece, Hille-Yosida Teoremi gereğince A bir büzen yarı

grup oluşturur (Balakrishnan, 1976).

Eğer A dissipatif ise, A^* dissipatif olmak zorunda değildir.

Teorem 4.13 : A tanım kümesi yoğun olan kapalı bir operatör olsun. A ve A^* 'ın dissipatif olduğunu kabul edelim. O zaman A ve A^* birer büzen yarı grup oluştururlar.

İspat : Eğer A dissipatif ise, $(I - A)$ 'nın görüntü kümesinin kapalı olduğunu ispatlamalıyız.

$x_n \in D(A)$ için $x_n - Ax_n = y_n$ ve $y_n \rightarrow y$ olsun. O zaman,

$$[y_n - y_m, y_n - y_m] = [x_n - x_m - A(x_n - x_m), x_n - x_m - A(x_n - x_m)]$$

$$= [\|x_n - x_m\|^2 - \{[A(x_n - x_m), x_n - x_m] + [x_n - x_m, A(x_n - x_m)]\} + [A(x_n - x_m), A(x_n - x_m)]]$$

ve A 'nın dissipatif olmasından dolayı, küme parantezi içindeki toplam negatif olmalıdır ve böylece,

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq \|y_n - y_m\|^2 \quad \text{ya da } x \text{ bir Cauchy dizisi olduğundan, } x \text{ limitinin}$$

$x - Ax = y$ denklemini sağlaması gerekir. Buradan, $(I - A)$ 'nın görüntü kümesinin kapalı olduğu sonucu çıkar. Bu görüntü kümesinin tüm uzay olmadığını farz edelim. O zaman, A 'nın tanım kümesindeki her x için, $[x - Ax, z] = 0$ olacak şekilde bir z elemanı bulabiliriz.

Öyleyse $\forall x \in D(A)$ için, $[Ax, z] = [x, z]$ olur. Fakat bu, z 'nin A^* 'ın tanım kümesi içinde yer almasını ve $A^* z = z$ olmasını gerektirir. Fakat A^* dissipatif olduğundan bunun olması mümkün değildir. Öyleyse, $(I-A)$ 'nın görüntü kümesi tüm uzaydır ve böylece Teorem 4.12 sağlanır.

Sonuç 4.11: A 'nın tanım kümesi yoğun olan kapalı lineer bir operatör olduğunu varsayalım ve

$$[Ax, x] + [x, Ax] = 0, \quad \forall x \in D(A)$$

$$[A^* x, x] + [x, A^* x] = 0, \quad \forall x \in D(A^*) \quad \text{olsun.}$$

O zaman, A , normu koruyan bir grup oluşturur.

İspat : Teoremden, A 'nın bir $T(t)$ yarı grubunu oluşturduğunu biliyoruz. Yine aynı teoremden $(-A)$ ve $(-A^*)$ dissipatif olduğundan, $(-A)$ da bir yarı grup oluşturur. Bu yarı grubu $S(t)$ ile gösterelim. O zaman, $\forall x \in D(A)$ için, $T(t)x$, A 'nın tanım kümesi içinde yer alır ve böylece $S(t)$ 'nin de tanım kümesi içinde yer alır. Buradan,

$$\frac{d}{dt}(S(t)T(t)x) = S(t)T(t)Ax - S(t)AT(t)x = 0 \quad \text{ya da} \quad S(t)T(t)x = x \quad \text{ve,}$$

$$\frac{d}{dt}(T(t)S(t)x) = -T(t)S(t)Ax + T(t)S(t)Ax = 0 \quad \text{ya da} \quad T(t)S(t)x = x \quad \text{olur. Buradan,}$$

$$S(t) = T(t)^{-1} \quad \text{olur.}$$

$T(-t) = T(t)^{-1}$ şeklinde tanımlayarak, $-\infty < t < +\infty$ olacak şekilde bir parametrelili bir $T(t)$ grubu elde ederiz. $x = S(t)T(t)x$ olduğundan, $S(t)$ ve $T(t)$ büzen yarı grup olmak zorundadır. Bu ise,

$$\|x\| \leq \|S(t)T(t)x\| \leq \|T(t)x\| \leq \|x\|$$

olmasını gerektirir. Öyleyse, $T(t)$, $\|T(t)x\| = \|x\|$ eşitliğini koruyan normdur.

5.KOMPAKT YARI GRUPLAR :

Buraya kadar genel olarak kümelerin içinde yarı grupları inceledik.Eğer bu kümeleri özelleştirirsek, ve örneğin operatörün kompakt olduğunu düşünersek, ya da bir Hilbert-Schmidt operatörü olduğunu düşünersek, uygulamalarda sık sık karşılaşıldığı üzere, bu özellik bir sürü önemli özelliği de beraberinde getirir (Balakrishnan, 1976).

Tanım 5.1 : Eğer $\forall t > 0$ için $T(t)$ operatörü kompakt ise, $T(t)$ operatörünün yarı grubuna kompakt yarı grup denir.Biz ayrıca operatörün kuvvetli sürekli olduğu durumu inceleyeceğiz.

Bir yarı grubun kompakt olması için gereken koşullarla başlamalıyız.

Teorem 5.1: C_0 sınıfının bir kompakt yarı grubu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i. $t > 0$ için $T(t)$ düzgün sürekli dir.
- ii. $A, \{ \varphi_k \}$ özvektörlerine karşı gelen $\{ \lambda_k \}$ noktalarının sayılabilir bir dizisinden ibaret saf noktasal spektruma sahiptir ve düzlemin sonlu noktası $\{ \lambda_k \}$ dizisinin limit noktası olamaz.
- iii. İntegralin düzgün operatör topolojisine göre mevcut olduğu yerde

$$R(\lambda, A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t) dt, \quad \text{Re} \lambda > w_0 \quad \text{olur.}$$
- iv. $T(t) \varphi_k = e^{\lambda t} k^t \varphi_k$
- v. $\forall \lambda \neq \lambda_k$ için, $R(\lambda, A)$ mevcuttur ve kompakttır ve

$$R(\lambda, A) \varphi_k = \varphi_k / (\lambda - \lambda_k) \text{ 'dır.}$$

İspat : Öncelikle düzgün sürekliliği ispatlayacağız.Bunun için, sabit $t > 0$ için, $\{T(t)x, \|x\|=1\}$ kümesinin, kompaktlık tanımı gereği, kompakt bir kapanışı vardır.Verilen bir $\varepsilon > 0$ için, bu küme, x_k merkezli ve ε yarıçaplı $S(x_k; \varepsilon)$, $k = 1, 2, \dots, n$ şeklinde sonlu sayıdaki küreler tarafından örtülebilir. $\|x\|=1$ olacak şekilde her x için, $(T(t+\Delta) - T(t))x = (T(\Delta) - I)T(t)x = (T(\Delta) - I)x_k + (T(\Delta) - I)(T(t)x - x_k)$ 'dır. Δ 'yı öyle seçelim ki; $\|(T(\Delta) - I)x_k\| < \varepsilon$, $k = 1, 2, \dots, n$ olsun ve $\|(T(\Delta) - I)(T(t)x - x_k)\| \leq M\varepsilon$, $M < \infty$ olduğundan $T(t)$ düzgün süreklidir.

$t > 0$ için $T(t)$ düzgün sürekli olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$, $L > 0$ için, $\int_{\varepsilon}^L e^{-\lambda t} T(t) dt$ integralini L

$(H; H)$ topolojisiinde bir Riemann integrali olarak tanımlayabiliriz. $(L(H; H))$: Düzgün operatör topolojisi.)

Kompakt operatörler uzayı düzgün operatör topolojisi altında kapalı olduğundan, bu şekilde tanımlanan operatör kompakt olacaktır. Ayrıca, $\|T(t)\|$ sınırlı aralıklar üzerinde sınırlı olduğundan, bu topolojide, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken, integral yakınsak olur ve eğer $\operatorname{Re} \lambda > w_0$ ise, aynı topolojide $L \rightarrow \infty$ iken integral yakınsaktır. Buradan (ii)'nin doğruluğu görülür. Ayrıca, $\operatorname{Re} \lambda > w_0$ için $R(\lambda, A)$ kompakttır. Rezolvent eşitliğinden, rezolvent kümesi içindeki her λ için $R(\lambda, A)$ kompakt olur.

λ 'nın A 'nın spektrumu içinde bir nokta olduğunu varsayalım ve φ de λ 'ya karşılık gelen özvektör olsun. Yani $A\varphi = \lambda\varphi$ olsun. O zaman A 'nın rezolvent kümesindeki herhangi bir μ için,

$$R(\mu, A)(\mu I - A)\varphi = \varphi = (\mu - \lambda)R(\mu, A)\varphi \quad \text{yazabiliriz ya da } \varphi \text{ 'nin } R(\mu, A) \text{ 'nın } \frac{1}{\mu - \lambda}$$

özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğunu söyleyebiliriz. Tersine γ 'nin A 'nın rezolvent kümesindeki bir μ için $R(\mu, A)$ 'nın bir özdeğeri olduğunu varsayalım. Buna karşı gelen özvektörü φ ile gösterirsek,

$$(\mu I - A)R(\mu, A)\varphi = \varphi = \mu\gamma\varphi - \gamma A\varphi \quad \text{ya da ,}$$

γ sıfır olamayacağından, φ A 'nın $\frac{\mu\gamma - 1}{\gamma}$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür.

Şimdi, boş kümeden farklı olan rezolvent kümesindeki herhangi bir μ için, $R(\mu, A)$ kompakttır ve spektrumunda sayılabilir sayıda sıfır olmayan nokta olmalıdır. Bu noktaları γ_k

ile gösterelim ve $\gamma_k = \frac{1}{\mu - \lambda_k}$ olsun.

O zaman, tüm γ_k 'lar A 'nın spektrumu içindedir ve $\{\gamma_k\}$ düzlemin sonlu parçasında bir yığılma noktasına sahip olamayacağından, sıfırdan başka, $\{\gamma_k\}$ düzlemin sonlu parçasında bir yığılma noktasına sahip değildir. Bu şekilde tanımlanan $\{\gamma_k\}$ 'nın boş küme olması gerektiği kolayca görülüyor. Biz, $\forall k$ için $\lambda = \lambda_k$ şeklindeki her λ 'nın A 'nın rezolvent kümesi içinde olduğunu göstermeliyiz. Bunun için, öncelikle, $R(\mu, A)$ 'nın

spektrumunun $\{0; [1/(\mu - \lambda_k)]\}$ 'yı kesinlikle içerdiğini belirtmeliyiz. Böylece eğer $\lambda \neq \mu$ ise,

$\frac{1}{\mu - \lambda}$ bu küme içinde değildir. Öyleyse,

$[I - (\mu - \lambda)R(\mu, A)] = [I - (\mu - \lambda)R(\mu, A)]$ sınırlı bir terse sahiptir. O zaman, rezolvent eşitliğinden,

$$(I - (\mu - \lambda)R(\mu, A))^{-1} R(\mu, A) \quad (5.1)$$

ifadesi $R(\lambda, A)$ 'ya eşit olur. Aslında, (4.1)'deki operatörü L ile gösterirsek, A 'nın tanım kümesindeki bir x için,

$$\begin{aligned} L(\lambda I - A)x &= L((\mu I - A)x + (\lambda - \mu)x) \\ &= (I - (\mu - \lambda)R(\mu, A))^{-1} (I - (\mu - \lambda)R(\mu, A))x = x \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Herhangi bir $x \in H$ için,

$$(\lambda I - A)Lx = (\mu I - A + \lambda - \mu)R(\mu, A)(I - (\mu - \lambda)R(\mu, A))^{-1}x = x \quad \text{olur.}$$

Buradan şu sonuç çıkar :

A 'nın spektrumu ya boş kümedir ya da düzlemin sonlu kısmında yığılma noktasına sahip olmayan ve sayılabilir sayıda noktalar içeren bir saf nokta spektrumuna sahiptir. Eğer $\{\lambda_k\}$ A 'nın spektrumundaki noktaları ve $\{\varphi_k\}$ da bunlara karşılık gelen özfonksiyonların kümesini gösterirse,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\exp(\lambda^2 R(\lambda, A)t - \lambda t)] \varphi_k = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left[\exp\left(\frac{\lambda - \lambda_k t}{(\lambda - \lambda_k)}\right) \right] \varphi_k = e^{\lambda_k t} \varphi_k$$

olduğundan $T(t) \varphi_k = e^{\lambda_k t} \varphi_k$ olur.

Sonuç olarak, $T(t)$ kompakttır ve $T(t)$ 'nin spektrumu sıfır hariç tüm noktaları içerir. Ayrıca, bu spektrum sayılabilir bir küme olmalıdır. Böylece $t_0 > 0$ 'ı sabitleyebiliriz ve γ $T(t_0)$ 'ın spektrumunda sıfırdan farklı bir nokta olsun. O zaman, γ bir özdeğer olmak zorundadır. φ bu özdeğere karşılık gelen özvektör olsun. O zaman, $\forall t > 0$ için,

$$T(t_0)(T(t) \varphi) = T(t) T(t_0) \varphi = \gamma T(t) \varphi$$

olur ya da eğer $T(t_0)$ 'ın γ 'ye karşılık gelen özvektör uzayını $\sum$ ile gösterirsek, $\forall t$ için,

$T(t)$, $\sum$ 'yı kendi içine tasvir eder. Ancak $\sum$ sonlu boyutlu ve $T(t)$ kuvvetli sürekli

olduğundan, B , $\sum$ 'yı kendi içine götüren bir lineer sınırlı tasvir iken,

$$T(t) = e^{Bt}, \quad T(t)x = e^{Bt}x, \quad x \in \sum \quad \text{yazabiliriz. } \sum \text{ sonlu boyutlu olduğundan, } B\text{'nin}$$

spektrumu boş kümeden farklıdır. Ancak, eğer λ spektrum içinde bir nokta ise, o zaman,

$\sum$ 'nın içinde öyle bir ψ elemanı vardır ki;

$$T(t) \psi = e^{\lambda t} \psi, \quad t \geq 0 \quad (5.2)$$

olur ve $\gamma = e^{\lambda t_0}$ olur.

(5.2)'den, ψ 'nin A 'nın λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğunu biliyoruz. Bu taktirde;

$$T(t)\text{'nin sıfırdan farklı spektrumu} = \begin{cases} \exp[(A\text{'nin spektrumu})t] \\ \exp[(A\text{'nin noktasal spektrumu})t] \end{cases} \quad (5.3)$$

Kompakt bir operatörün spektrumu her zaman sıfırı içerdiğinden,

$$T(t)\text{'nin spektrumu} = \exp (A\text{'nin noktasal spektrumu}) t \cup \{ 0 \} \quad (5.4)$$

Uyarı : A 'nın tek noktasal spektruma sahip olması yarı grubun kompakt olduğu anlamına gelmez. Sadece A 'yı sınırlı kompakt bir operatör olarak almalıyız ve eğer A sınırlı ise ve uzay sonlu boyutlu değilse, e^{At} kompakt olamaz.

Sonuç 5.1: Bir H Hilbert uzayı üzerinde kuvvetli sürekli olan bir yarı grubun kompakt ve kendine eş olduğunu farz edelim. O zaman H ayrılabilir. Bunun yanı sıra eğer H sonlu boyutlu değilse, $\lambda_k \rightarrow -\infty$ olmak üzere $\{\lambda_k\}$ reel sayı dizisi vardır ve

$$A\text{'nin spektrumu} = A\text{'nin noktasal spektrumu} = \{\lambda_k\}$$

$$T(t)\text{'nin spektrumu} = \{e^{\lambda_k t}\} \cup \{0\} \quad \text{olur. Ayrıca,}$$

$$w_0 = \sup \lambda_k \quad \text{olur.} \quad (5.5)$$

İspat : $\mu > w_0$ olsun. O zaman, $R(\mu, A)$ kompakttır ve kendine eştir. Sıfır bir özdeğer olamaz. γ_k bir özdeğer olsun ve φ_k da buna karşılık gelen bir özvektör olsun.

$$R(\mu, A) \varphi_k = \gamma_k \varphi_k, \quad \gamma_k \text{ reel sayı.}$$

$$\gamma_k \text{ sıfır olamayacağından, } \gamma_k = \frac{1}{\mu - \lambda_k} \quad \text{yazarsak, } \lambda_k \text{ reel sayı olmak zorunda}$$

olduğundan ve λ_k 'lar A 'nın özdeğerleri olduğundan, $\lambda_k \leq w_0$ olur. Böylece $\{\lambda_k\}$ dizisinin tek yığılma noktası $-\infty$ dur. Bir kompakt operatörün sıfırdan farklı her özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon uzayı sonlu boyutlu olmalıdır ve γ_k 'lar sıfırdan farklı olduğundan H , $\{\varphi_k\}$ tabanına sahip ayrılabilir bir Hilbert uzayıdır. Böylece,

$$T(t)x = \sum_1^\infty e^{\lambda_k t} [x, \varphi_k] \varphi_k \quad \text{olur.} \quad (5.6)$$

Sıfırın $T(t)$ 'nin noktasal spektrumu içinde yer almadığını belirtelim. Tekrar bir j için $\sup \lambda_k = \lambda_j$ olur ve λ_j bir özdeğer olur.(5.6)'dan,

$$T(t)x = e^{\lambda_j t} \sum_1^{\infty} e^{(\lambda_k - \lambda_j)t} [x, \varphi_k] \varphi_k \quad \text{ve böylece,}$$

$$\|T(t)x\| \leq e^{\lambda_j t} \|x\| \quad \text{ya da } w_0 \leq \lambda_j \quad \text{olur. Ancak, } T(t) \varphi_j = e^{\lambda_j t} \varphi_j \text{ 'dir. Buradan}$$

$$\|T(t)\| \geq \exp(\lambda_j t); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|T(t)\|}{t} \geq \lambda_j \quad \text{ve böylece } w_0 = \lambda_j \text{ olur.}$$

Sonuç 5.2 : Eğer A bir yarı grup oluşturuyorsa ve $R(\lambda, A)$ rezolvent kümesi $\lambda > w_0$ için kompakt ve kendine eş ise, o zaman uzay ayrılabilir, yarı grup kompakt ve kendine eştir.

İspat : Sıfır $R(\lambda, A)$ 'nın bir özdeğeri olamayacağından, H uzayı ayrılabilir ve bu uzay $R(\lambda, A)$ 'nın özvektörlerinin ortonormal tabanı tarafından gerilir.

$$R(\lambda, A) \varphi_k = \gamma_k \varphi_k \quad \text{olur. O zaman } T(t)x = \sum_1^{\infty} e^{\lambda_k t} [x, \varphi_k] \varphi_k, \quad \text{ve eğer } H \text{ sonlu boyutlu}$$

değilse, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_k t} = 0, \quad t > 0$ olur. Bu ise, $T(t)$ 'nin kompakt olması anlamına gelir. $\{\lambda_k\}$ 'lar reel olmak zorunda olduğundan, $T(t)$ kendine eş olmalıdır.

Örnek 5.1 : H sonsuz boyutlu olsun. $T(t)$ kompakt ve kendine eş bir yarı grup olsun. O zaman λ_k 'lar reel sayılar ve $\{\varphi_k\}$ bir ortonormal taban iken

$$T(t)x = \sum_1^{\infty} e^{\lambda_k t} [\varphi_k, x] \varphi_k \quad \text{olduğunu biliyoruz.} \quad (5.7)$$

$\lambda_k \rightarrow -\infty$ olduğundan, $\forall t > 0$ için:

$$\sum_1^{\infty} |\lambda_k|^2 e^{2\lambda_k t} [\varphi_k, x]^2 \leq \|x\|^2 \sup |\lambda_k|^2 e^{2\lambda_k t} \leq \|x\|^2 \left[\frac{c_1}{t^2} + c_2 e^{\lambda t} \right]; \quad \gamma, c_1, c_2 \text{ pozitif sabitler}$$

olmak üzere. Böylece, $\forall t > 0$ için, $T(t)x$ A 'nın tanım kümesi içinde olur ve buradan $t > 0$ için $T(t)x$ kuvvetli diferansiyellenebilir olur ve özel olarak;

$$AT(t), \quad t > 0 \text{ operatörü } \|AT(t)\| = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \rightarrow 0 \text{ ile lineer sınırlı olur.}$$

Örnek 5.2 : Diğer yandan her kompakt $T(t)$ yarı grubunun, " $t > 0$ için $T(t)x$ kuvvetli diferansiyellenebilir" şeklinde bir özelliğe sahip olması gerekmediğini bir örnekle gösterebiliriz.

Bunun için $H = \ell_2$ alalım.

$$T(t)a = \{e^{-n^2 t + i e^{n^4 t}} a_n\}, \quad a = \{a_n\} \quad \text{şeklinde bir yarı grup tanımlayalım.} \quad (5.8)$$

O zaman, çarpanlar $\forall t > 0$ için sınırlı olduğundan $T(t)$ 'nin bir kompakt yarı grup olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan,

$$AT(t)a \sim \left\{ \left(-n^2 + i e^{n^4 t} \right) e^{-n^2 t + i e^{n^4 t}} a_n \right\} \quad \text{olur ve} \quad \sum_1^\infty \left(n^4 + e^{2n^4 t} \right) e^{-n^2 t} a_n^2$$

toplamı ℓ_2 'deki her a için sonlu olmak zorunda değildir. Böylece $\forall a \in H$ için $T(t)a$ A 'nın tanım kümesi içinde değildir. Böylece genel olarak $t > 0$ için $T(t)a$ kuvvetli diferansiyellenebilir değildir.

5.1 Hilbert-Schmidt Yarı Grupları :

Göz önüne aldığımız kompakt yarı grupların bir alt sınıfı doğal olarak Hilbert-Schmidt operatörlerinin de yarı grubudur.

Tanım 5.11 : Bir ayrılabilir Hilbert uzayında $T(t)$ operatörlerinin bir yarı grubuna, eğer $\forall t > 0$ için $T(t)$ bir Hilbert-Schmidt operatörü ise, bir Hilbert-Schmidt (H.S.) yarı grubu denir.

Biz çalışmamızda yarı grubun kuvvetli sürekli olduğunu varsayacağız.

Bir $T(t)$ yarı grubu için, $T > c > 0$ için $T(t)$ bir H.S., fakat $t < c$ için $T(t)$ bir H.S. olmaması mümkündür. Örneğin, $\{\phi_k\}$ bir ortonormal taban iken sadece

$$T(t)x = \sum_1^\infty e^{-t \log n} [x, \phi_k] \phi_k \quad \text{operatörünü tanımlamalıyız. Burada } c = \frac{1}{2} \text{ olduğu kolayca görülür.}$$

Eğer yarı grup kendine eş ve kompakt ise, ve aynı zamanda

$$\sum_1^\infty e^{\lambda_k t} < \infty, \quad \{\lambda_k\} = A \text{'nin spektrumu ; } t > 0 \text{ ise, yarı grubun bir H.S. olduğu açıktır. Kendine}$$

eş olma durumunda koşul ayrıca gereklidir. Kendine eş olma durumunda yarı grubun H.S. olması için rezolvent türünden bir yeter koşul bulabiliriz.

T bir kompakt operatör olsun. Bu taktirde $T^* T$ operatörü kendine eş ve nonnegatif bir kompakt operatördür.

Teorem 5.11 (Balakrishnan, 1976; Kato, 1980): H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. A , kuvvetli sürekli ve kendine eş olan ve rezolventi $R(\lambda, A)$ olan bir $T(t)$ yarı grubunun generatörü olsun. O zaman yarı grubun bir H.S. olması için bir yeter koşul, $\lambda > w_0$ için $R(\lambda, A)$ rezolventinin kendine eş ve H.S. olmasıdır.

İspat : $\lambda > w_0$ için $R(\lambda, A)$ 'nın kendine eş ve H.S. olduğunu farz edelim. $\{\varphi_k\}$, $R(\lambda, A)$ 'nın özvektörlerinin oluşturduğu tüm ortonormal sistemi ve μ_k da bunlara karşılık gelen özdeğerleri gösterebiliriz. Görüldüğü gibi, bu, $\mu_k = \frac{1}{\lambda - \lambda_k}$ iken $\{\varphi_k\}$ 'ların A 'nın λ_k özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri olduğunu belirtir. O zaman $\{\lambda_k\}$ reel olmalıdır ve rezolvent eşitliğinden, rezolventin kendisi rezolvent kümesi üzerinde bir H.S.'dir. Ayrıca,

$$T(t) \varphi_k = e^{\lambda_k t} \varphi_k \quad \text{ve} \quad \sum_1^\infty [T(t) \varphi_k, T(t) \varphi_k] = \sum_1^\infty e^{2\lambda_k t} \quad \text{dir.}$$

Fakat $R(\lambda, A)$ H.S. olduğundan, $\sum_1^\infty \frac{1}{(\lambda - \lambda_k)^2} < \infty$ ve λ_k sonunda negatif olduğundan,

$$\sum_1^\infty \lambda_k^{-2} > \infty \quad \text{olmalıdır ve böylece yeterince büyük } n \text{ için, } t' \text{ den bağımsız,}$$

$$\sum_n^\infty e^{2\lambda_k t} \leq \sum_n^\infty 2\lambda_k^{-2} t^{-2} < \infty \quad \text{ya da } T(t) \text{ H.S. olur.}$$

Bir yarı grubun H.S. olması için, rezolventin H.S. olması gerekmez. Ayrıca, rezolvent H.S. iken yarı grubun H.S. olması da gerekmez.

Sonuç olarak eğer bir $T(t)$ yarı grubu H.S. ise, o zaman bu yarı grup otomatik olarak nükleerdir. Her $T(t)$, $t > 0$ operatörü, iki H.S. operatörünün çarpımı şeklinde yazılabildiği için nükleerdir.

$$T(t) = T\left(\frac{t}{2}\right)T\left(\frac{t}{2}\right)$$

6. ANALİTİK (HOLOMORFİK) YARI GRUPLAR :

Lemma 6.1 : Bir $T(t)$ yarı grubunun kuvvetli diferansiyellenebilir olduğunu farz edelim. O zaman,

$$\forall t > 0 \text{ ve } \forall x \text{ için } T(t)x \in D(A^\infty) \text{ ve ayrıca,} \quad (6.1)$$

$$T(t)x, \quad \frac{d^n}{dt^n} T(t)x = A^n T(t)x \quad \text{ile sonsuz kuvvetli diferansiyellenebilirdir.} \quad (6.2)$$

İspat : $\forall t > 0$ için, $T(t + \Delta)x - T(t)x = (T(\Delta) - I)T(t)x$ olduğundan, verilen kuvvetli diferansiyellenebilir olma özelliğinden, $T(t)x$ 'in A 'nın tanım kümesine ait olduğu anlaşılır ve $d/dt T(t)x = AT(t)x$ olur. Tekrar, $T(t_0)x$ A 'nın tanım kümesine ait olduğundan, $0 < t_0 < t$ için $AT(t)x = AT(t - t_0)T(t_0)x = T(t - t_0)AT(t_0)x$ olur. Böylece $AT(t)x$ A 'nın tanım kümesine ait olur. Bu şekilde devam edersek, tümevarım yöntemi ile (6.1) ve (6.2)'yi elde ederiz.

Tanım 6.1: $T(\xi)$ operatörlerinin bir yarı grubuna eğer bu yarı grubun içinde tanımlı

bulunduğu bir $\theta_1 < \arg \xi < \theta_2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 < 0 < \theta_2 \leq +\frac{\pi}{2}$ bölgesi varsa ve aşağıdaki

koşullar sağlanıyorsa, $H(\theta_1, \theta_2)$ sınıflarının analitik (holomorfik) yarı grubu denir.

- i. $T(\xi_1 + \xi_2) = T(\xi_1)T(\xi_2)$
- ii. $\forall x \in H$ için $T(\xi)x$ verilen bölgede analiktir.
- iii. $\forall x \in H$ için her kapalı alt bölgede, $|\xi| \rightarrow 0$ iken $\|T(\xi)x - x\| \rightarrow 0$

Bir analitik yarı grup tanımlı olduğu bölgedeki her ξ için (6.1) ve (6.2) özelliklerine sahiptir.

Lemma 6.2 : Her kuvvetli sürekli, kompakt, kendine eş yarı grup, bölgedeki her ξ için $T(\xi)$ kompakt kalmak şartıyla $H(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ sınıfına ait analitik yarı gruplara kadar genişletilebilir.

İspat : $\{\phi_k\}$ bir ortonormal taban iken (5.7)'den

$T(t)x = \sum_1^{\infty} e^{\lambda_k t} [x, \varphi_k] p_k$ olur ve ispat kolayca anlaşılır.

Bölgedeki her ξ için $-\frac{\pi}{2} < \arg \xi < \frac{\pi}{2}$, $T(\xi)x = \sum e^{\lambda_k \xi} [x, \varphi_k] p_k$ operatörünü tanımlayalım. Eğer $\{\lambda_k\}$ bir sonlu dizi değilse, $\forall \xi$ için, $\lim_k \sup e^{\lambda_k v}$, $v = \operatorname{Re} \xi$ olduğundan, yukarıdaki $T(\xi)x$ operatörü bir kompakt operatör tanımlar. Ayrıca, açık aralıkta yarı grup özelliği sağlanır. Bunların dışında, ξ_n kapalı alt bölgede tanımlı bir dizi iken,

$$\|T(\xi_n)x - x\|^2 = \sum_1^{\infty} |e^{\lambda_k \xi_n} - 1|^2 [x, \varphi_k]^2 \quad \text{olsun.} \quad (6.3)$$

O zaman, eğer $\xi_n = |\xi_n| e^{i\psi_n}$ ise, $|\psi_n| < \theta < \frac{\pi}{2}$ olmalıdır.

$\xi_n \rightarrow 0$ olsun. O zaman (6.3)'deki her terimin sifıra gittiği açıktır. Buradan, eğer $\{\lambda_k\}$ 'ların sayısı sonlu değilse, bazı N tanesi hariç hepsinin negatif olması gerektiğinden,

$$|1 - e^{\lambda_k \xi_n}| \leq |1 + e^{\lambda_k |\xi_n| \cos \psi_n}| \leq |1 + e^{\lambda_k |\xi_n| \cos \theta}| \quad \text{olur. Bu ise, } \forall k > N \text{ için sınırlıdır. Bu ise}$$

(6.3)'ün sifıra gittiğini açıkça ispatlar.

Şimdi analitikliği ispatlayalım. Bunun için $x, y \in H$ olsun. O zaman $\forall n$ için ;

$$\sum_1^n e^{\lambda_k} [x, \varphi_k] \overline{[y, \varphi_k]} \quad (6.4)$$

toplamının verilen aralıkta analitik olduğu açıktır. K , verilen açık aralığın kompakt bir alt kümesini gösterebilir.

$$[T(\xi)x, y] \quad \text{olsun.} \quad (6.5)$$

K 'daki her ξ için (6.4), (6.5)'e yakınsar. $\forall \xi \in K$ için $\operatorname{Re} \xi \geq v > 0$ olduğundan bu yakınsamanın düzgün yakınsama olduğu anlaşılır. Böylece, λ_k 'yı negatif yapan yeterince büyük her n için

$$\sum_n^p |e^{\lambda_k \xi} [x, \varphi_k] \overline{[y, \varphi_k]}| \leq \sum_n^p |[x, \varphi_k]| [y, \varphi_k]$$

Böylece verilen açık aralıkta (6.5) analitik olur. Bölgemiz basit bağımlı olduğundan her x için $T(\xi)x$ analitik olur.

Her kompakt yarı grup bir analitik açılıma sahip olmak zorunda değildir. (5.2) örneğinde de görüldüğü gibi, bir kompakt yarı grubun kuvvetli diferansiyellenebilir olması da gerekmez.

Aslında bu örnekte tanımını biraz genişletirsek, lemmada yaptığımız gibi, böyle bir açılımın yalnızca $\operatorname{Re} \xi > 0$ için mümkün olduğunu, pozitif reel eksenini kapsayamayacağını görürüz.

Şimdi analitik yarı grupların önemli özelliklerini inceleyeceğiz:

Teorem 6.1 (Balakrishnan, 1976; Kato, 1980; Yosida, 1980) : $T(t)$ 'nin $H(\theta_1, \theta_2)$ türünden bir analitik yarı grup olduğunu varsayalım. O zaman öyle sonlu M ve $C > 0$ sabitleri bulabiliriz ki;

$$\|C^n t^n A^n T(t)\| \leq n! M; \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \forall n \geq 1 \quad (6.6)$$

İspat : $x, y \in H$ olsun. $\theta_1 < \theta_2$ olduğundan, $[T(\xi)x, y]$ 'nin analitik olduğu aralık, $\theta_1 < -\theta < \arg \xi < +\theta < \theta_2$, $\theta > 0$

şeklinde bir aralık içerir. x ve y 'den bağımsız olan bu aralığı S olarak, kapanışını da $\bar{S}$ olarak adlandıralım. O zaman herhangi sabit $t > 0$ için, t merkezli olan $t \sin \theta$ yarıçap çemberi analitiklik bölgesi tarafından tamamen kapsanır. Böylece Cauchy temsilinden, Γ çemberin çevresi olmak üzere,

$$[A^n T(t)x, y] = \frac{d^n}{dt^n} [T(t)x, y] = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{[T(\xi)x, y]}{(\xi - t)^{n+1}} d\xi \quad \text{olur (Balakrishnan, 1976).} \quad (6.7)$$

Analitik yarı grup tanımındaki (iii) koşulundan, $|\xi| \leq 2$; $\xi \in \bar{S}$ için $\|T(\xi)\|$ sınırlı olur. Bu sınırı M ile gösterelim. O zaman (5.7)'nin sağ tarafı:

$$n! \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[T(t + re^{i\theta})x, y]}{r^n} (\exp(-in\theta)) d\theta; \quad r = t \sin \theta \quad \text{şeklinde yazılabilir ve bu sağ taraf}$$

$$\left(\frac{n!M}{(t \sin \theta)^n} \right) \|x\| \|y\| \quad \text{ile sınırlıdır. Böylece } \|C^n t^n A^n T(t)\| \leq n!M, \quad C = \sin \theta \text{ olur. Teorem}$$

ispatlanmıştır.

Sonuç 6.1 : $T(t)$ analitik yarı grubunun kapalı alt aralıklar üzerinde sınırlı olduğunu varsayalım. O zaman öyle pozitif bir c sabiti bulabiliriz ki;

$$\forall t, \quad \|(ctAT(t))^n\| \leq M, \quad n \geq 1 \quad (6.8)$$

İspat : Öncelikle sınırlılığın bir sonucu olarak teoremin ispatındaki M 'nin, teoremin kapalı $\bar{S}$ aralığı için geçerli olacak şekilde seçilebileceğini belirtelim. Buradan (6.6)'yı her L için, M sabiti ile L 'den bağımsız olacak şekilde

$$\left\| (t \sin \theta)^n A^n T(t) \right\| \leq n! M, \quad 0 \leq t \leq L; \quad n \geq 1 \quad (6.9)$$

Buradan, (6.8)'de $c = \sin \theta$ alarak,

$$\left\| (t \sin \theta \sin \theta A)^n \right\| = \left\| (t \sin \theta)^n A^n T(nt) \right\| = \left\| \left(\frac{1}{n} \right) (nt \sin \theta)^n A^n T(nt) \right\| \leq \left(\frac{n!}{n^n} \right) M \quad \text{olur.}$$

Teorem 6.2 : $T(t)$ yarı grubunun kuvvetli diferansiyellenebilir olduğunu ve bazı c ve M sabitleri için,

$$\left\| (c t A T(t))^n \right\| \leq M, \quad n \geq 1, \quad t \geq 0 \quad (6.10)$$

bağıntısını sağladığını varsayalım. O zaman $T(t)$, $\theta = -\theta_1 = \theta_2 = \tan^{-1}(ce^{-1})$ olmak üzere $H(\theta_1, \theta_2)$ tipinde bir analitik açılıma sahiptir. Ayrıca analitiklik bölgesindeki her kapalı alt aralıkta yarı grup sınırlıdır.

İspat : $\theta = \tan^{-1}(ce^{-1})$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere S , $-\theta < \arg \xi < \theta$ bölgesini gösterebiliriz.

$$\xi = t + r e^{i\varphi}, \quad r = t \sin \nu, \quad 0 < \nu < \theta \quad (6.11)$$

olacak şekilde $\forall t$ ve $\forall \xi$ için, $n \geq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \left\| (\xi - t)^n A^n T(t) \right\| &= \left(\frac{1}{n!} \right) t^n (\sin \nu)^n \left\| A^n T(t) \right\| = \left(\frac{1}{n!} \right) (\sin \nu)^n \left\| \left(\frac{t}{n} A T\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n \right\| n^n \\ &= \left(\frac{1}{n!} \right) t^n (\sin \nu)^n \left\| A^n T(t) \right\| = \left(\frac{1}{n!} \right) (\sin \nu)^n \left\| \left(\frac{t}{n} A T\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n \right\| n^n \end{aligned}$$

(6.10)'dan dolayı:

$$\leq M \left(\frac{\sin \nu}{c} \right)^n \frac{n^n}{n!} \leq M \left(\frac{(\sin \nu)}{ce^{-1}} \right)^n \leq M \left(\frac{(\sin \theta)}{\tan \theta} \right)^n = M (\cos \theta)^n \quad (6.12)$$

Böylece $\sum_0^\infty (\xi - t)^n \frac{A^n(t)x}{n!}$ serisi operatör normuna göre yakınsak olur. (6.11)'i sağlayan

her ξ için:

$$T(\xi)x = \sum_0^\infty (\xi - t)^n \frac{(d^n/dt^n)T(t)x}{n!} \quad \text{olsun.} \quad (6.13)$$

(6.12)'den, $\|T(\xi)\| \leq M / (1 - \cos \theta)$ olduğunu biliyoruz. (6.12)'den (6.11) biçimindeki her kapalı dairede

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi-t)^n}{n!} [A^n T(t)x, y]$ serileri düzgün yakınsak olduğundan, $\forall x, y \in H$ ve (6.13) ile

tanımlanan $T(\xi)$ fonksiyonu için

$$[T(\xi)x, y] \quad (6.14)$$

S bölgesinde analitiktir. Böylece, (6.13) bağıntısı S bölgesinde analitik olur ve $T(\xi)x$ de aynı bölgede analitik olur. Son olarak, yarı grup olma özelliği üstel kuvvet serilerinin çarpımı yolu ile ispatlanabilir.

$|v_1|, |v_2| < \theta$ olmak üzere,

$$\xi_1 = t_1 + r_1 e^{i\xi_1}, \quad r_1 = t_1 \sin v_1$$

$$\xi_2 = t_2 + r_2 e^{i\xi_2}, \quad r_2 = t_2 \sin v_2 \text{ olsun. O zaman, (6.13)'den,}$$

$$\begin{aligned} T(\xi_1).T(\xi_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi_1-t_1)^n}{n!} \frac{(\xi_2-t_2)^m}{m!} A^{m+n} T(t_1+t_2)x \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\xi_1+\xi_2-(t_1+t_2))^p}{p!} A^p T(t_1+t_2)x \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

$$\text{Not : } \sum_{m+n=p} \frac{(\xi_1-t_1)^m}{m!} \frac{(\xi_2-t_2)^n}{n!} = \frac{(\xi_1+\xi_2-t_1-t_2)^p}{p!} \quad \text{eşitliğinden yararlandık.}$$

Uyarı : $T(t)$ analitik bir yarı grup iken, $t > 0$ için, $\frac{d^n}{dt^n} T(t)$ türevi $L(H, H)$ normunda vardır

ve $A^n T(t)$ 'ye eşittir. Özel olarak bu $T(t)$ 'nin $t > 0$ için düzgün sürekli olmasını gerektirir.

7.YARI GRUPLARA BAZI ÖRNEKLER (Balakrishnan, 1976) :

Örnek 7.1 : $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $f(0,y)$ veriliyor ve $t \geq 0$ olduğu biliniyor. $f(0,y)$

diferansiyellenebilir olmak üzere bu problem , $f(t,y) = f(0,y-t)$ gibi bir genel çözüme sahiptir.Bu örneği bir soyut kümede deneyelim.Öncelikle uygun bir fonksiyon uzayı seçmemiz gerekiyor.İki durum varsayalım:

(i) $H = L_2[-\infty, \infty]$ olsun. Operatör A olarak kabul edilirse, diferansiyel operatör $A \sim -\partial/\partial y$ olur.

A'nın tanım kümesi, $L_2[-\infty, \infty]$ dahil tüm $f(\cdot)$ fonksiyonlarının sınıfı olsun, öyle ki türevleri de $L_2[-\infty, \infty]$ 'a ait olsun.O zaman A yoğun tanım kümesine sahip kapalı lineer bir operatördür.A'nın spektrumunu bilmek çok önemlidir.Bunun için

$$f, g \in L_2[-\infty, \infty], \quad f \in D(A) \text{ için } \lambda f + f' = g$$

dekleminin çözümlenmesi ile uğraşalım.

$\lambda f = -f'$ iken, $f(y) = e^{-\lambda y} f(0) \notin L_2[-\infty, \infty]$ olur bu ise, A'nın noktasal spektrumunun boş olduğunu gösterir.Nonhomojen eşitliği düşünürsek, Fourier transformlarını kullanmak en iyi yoldur. $f(\cdot)$ 'nin Fourier transformunu $\psi_f(w)$ ile gösterirsek, bunun sadece

$\psi_f(w) = \psi_g(w) / \lambda + iw$ eşitliğini sağlaması gerekir.Bu ise λ 'nın reel kısmı sıfırdan farklı iken λ 'nın rezolvent kümesi içinde olduğunu gösterir.Diğer yandan, rezolvent kümesinin açık olması gerektiğinden, A'nın spektrumu sanal eksenden ibaret olmalıdır.Buradan,

$$\lambda > 0 \text{ için, } \|R(\lambda, A)g\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi_g(w)|^2}{\lambda^2 + w^2} dw \leq \frac{\|g\|^2}{\lambda^2} \text{ ya da } \|R(\lambda, A)g\| \leq \frac{\|g\|}{|\operatorname{Re} \lambda|} \text{ olur.}$$

Hille-Yosida teoremi A ve $-A$ için sağlanır.Bu nedenle A büzen operatörlerin bir yarı grubunu oluşturur.Şimdi yarı gruba yaklaşımın nasıl gerçekleştiğini gösterelim:

$e^{(\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I)t} f$, $t > 0$, $\lambda > 0$ 'ın Fourier transformu:

$$e^{(\lambda^2 [1/(\lambda - iw)]t - \lambda t)} \psi_f(w) = e^{-t[\lambda(iw + iw)]} \psi_{f(w)} \text{ 'dır ve } \lambda \rightarrow \infty \text{ iken, bu transformun}$$

$e^{-iwt} \psi_f(w)$ 'ya yaklaştığı açıktır.Böylece $T(t)$ yarıgrubu bizim istediğimiz gibi

$$T(t)f = g$$

$G(y) = f(y - t)$, $-\infty < y < \infty$ şeklinde tanımlanır.Burada $\dot{x}(t) = Ax(t)$ soyut eşitliği

A'nın tanım kümesinde verilen her $x(0)$ başlangıç noktası için tek çözüme sahiptir.A'nın

tanım kümesindeki $f(\cdot)$ için $f(y - t)$ fonksiyonu da A'nın tanım kümesindedir ve bu nedenle

$f(y-t)$ fonksiyonu mutlak sürekli ve y noktasında noktasal kısmi diferansiyel denklemi sağlanır. $R(\lambda, A)$ için

$$R(\lambda, A)f = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)f dt \quad \text{formülünün doğruluğunu gösterebiliriz.}$$

$R(\lambda, A)$ 'nın görüntü kümesi A 'nın tanım kümesi içinde olduğundan, buna karşılık gelen fonksiyon mutlak sürekli ve

$$R(\lambda, A)f = h \quad h(y) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(y-t) dt$$

olduğunu biliyoruz. Bunun ise önceki ile aynı sonucu verdiği kolayca görülüyor.

(ii) Şimdi farklı bir uzay ele alalım: $H = L_2 [0, \infty]$

Eğer (i)'deki gibi yaparsak ve tanım kümesi türevleri $H = L_2 [0, \infty]$ 'da yer alan $f(\cdot)$ fonksiyonlarından oluşan A operatörlerini $-\partial/\partial y$ olarak alırsak, $\lambda f + f' = 0$ gibi bir problem ile karşılaşırız.

Bu problem $f(y) = e^{-\lambda y} f(0)$ gibi bir çözüme sahiptir ve tüm pozitif λ değerleri için bu fonksiyon $L_2 [0, \infty]$ 'a aittir. Yani pozitif λ 'lar A 'nın özdeğerleridir. Böylece görüyoruz ki; eğer bir soyut Cauchy problemine karşılık gelen kısmi diferansiyel denkleme çözüm arıyorsak, $\partial/\partial y$ için bir sınırlama tanımlamak zorundayız. Genellikle, tanım kümesinin yoğun olması koşulu altında bile, bir çok kısıtlama olabilir. Böyle bir durumda eğer $f(0) = 0$ koşulunu eklersek, yukarıdaki çözümden kurtulmuş oluruz. Böylece,

$D(A) = \{ f \mid f(0) = 0 \text{ ve } f(\cdot), f'(\cdot) \in L_2 [0, \infty] \}$ olur. $D(A)$ 'nın yoğun olduğunu ve

$A \sim -\partial/\partial y$ operatörünün kapalı olduğunu biliyoruz. O zaman,

$\lambda f + f' = g$ şeklindeki bir denklem $\lambda > 0$ için

$$f(y) = \int_0^y e^{-\lambda(y-\xi)} g(\xi) d\xi, \quad 0 < y < \infty, \quad 0 < \lambda$$

gibi kesinlikle A 'nın tanım kümesi içinde yer alan tek bir çözüme sahiptir ve bunun Fourier transformu:

$$\psi_f(w) = \int_0^{\infty} e^{-iwy} f(y) dy = \frac{\int_0^{\infty} e^{-iwy} g(y) dy}{\lambda + iw}, \quad \lambda > 0$$

şeklindedir ve $\|f\| \leq \|g\|/\lambda$, $\lambda > 0$ olur. Şimdi Hille-Yosida teoremini uygulayabiliriz :

Öncelikle $R(\lambda, A)^n g$ 'nin Fourier transformunun

$$\frac{\int_0^{\infty} e^{-iwy} g(y) dy}{(\lambda + iw)^n} \quad \text{şeklinde olduğunu belirtelim. Ayrıca } \exp[\lambda^2 R(\lambda, A)t] g' \text{ nin Fourier}$$

transformu da

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-iwy} g(y) dy \right) e^{\lambda^2 t / \lambda + iw} \text{ şeklindedir.}$$

O zaman, $T(t)$, A operatörü ile oluşturulan yarı grup olmak üzere, $T(t)g$ 'nin Fourier transformunun

$$e^{-iwt} \int_0^{\infty} e^{-iwy} g(y) dy = \int_t^{\infty} e^{-iwy} g(y-t) dy \text{ olduğu kolayca görülür. Buradan}$$

$$h(y) = \begin{cases} g(y-t), & t \leq y \\ 0, & 0 \leq y \leq t \end{cases} \quad \text{iken} \quad T(t)g = h \quad \text{olur.}$$

Bu örneklerin her ikisinde de $f(y) = 0$, $y > \Delta$ aldığımızda, $\Delta > 0$ için,

$$\|T(\Delta) - I\| = \sup_{\|f\|=1} \|(T(\Delta) - I)f\| \geq \sqrt{2} \quad \text{olur. Bunun yanı sıra, benzer şekilde } \forall t > 0 \text{ için ve sabit } \Delta > 0 \text{ için, } \|T(t+\Delta) - T(t)\| \geq \sqrt{2} \text{ olur.}$$

Başka bir deyişle, $\forall t > 0$ için $T(t)$ düzgün sürekli değildir. O zaman özel olarak yarı grup kompakt değildir. Ayrıca her iki durumda da ((i) ve (ii) durumlarından söz ediliyor.) $\dot{x} = Ax$ denklemi, A 'nın tanım kümesinde olmayan bir $x(0)$ için çözüme sahip değildir. (ii) durumunda A 'nın spektrumu $\text{Re } \lambda \leq 0$ yarı düzlemidir. (Burada ayrıca, A ve A^* 'ın dissipatif olduğu da ispatlanabilir.)

Örnek 7.2 : (Isı Denklemi) Farz edelim ki; verilen $f(0, x)$ ve $t \geq 0$ için,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty \text{ ve } t \geq 0 \text{ için } f(t, \cdot) \in L_2[-\infty, \infty] \text{ olsun. Burada ilk olarak}$$

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad A \text{'nın tanım kümesi, } f'(\cdot) \text{ ve } f''(\cdot) \in L_2[-\infty, \infty] \text{ olacak şekilde tüm}$$

$f(\cdot) \in L_2[-\infty, \infty]$ fonksiyonlarını içersin. Bu ise,

$$\frac{f(L)^2}{2} = \int_0^L f(x) f'(x) dx + \frac{f(0)^2}{2} \quad \text{ve}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) f'(x) dx \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)^2 dx \quad \text{'den dolayı,}$$

$$f(-\infty) = f(+\infty) = 0 = f'(-\infty) = f'(+\infty)$$

olmasını gerektirir. Öyleyse bu tanım kümesi yoğundur. Öyleyse A kendine eştir ve kısmi integrasyon ile A 'nın dissipatif olduğu kolayca görülür. Bu ise A 'nın bir büzen yarı grup oluşturduğunu gösterir. Ayrıca kolay şekilde görülür ki:

$$e^{\lambda^2 R(\lambda, A)t} f = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda^{2n} R(\lambda, A)^n t^n}{n!} f \text{ 'in Fourier transformu:}$$

$$\left(\sum_0^{\infty} \frac{\lambda^{2n} t^n}{(\lambda + w^2)^n n!} \right) \psi_f(w) = e^{\lambda^2 t \lambda + w^2 t} \psi_f(w)$$

Öyleyse $T(t)$ yarı grubunun Fourier transformu:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{(\lambda^2 t \lambda + w^2 t) - \lambda t} \psi_f(w) = (e^{-t w^2}) \psi_f(w) \text{ şeklindedir. Buradan,}$$

$$G(t; x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \text{ iken,}$$

$$T(t)f = h, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t; y - x) f(y) dy \text{ olur.}$$

Eğer f nonnegatif ise, $T(t)f$ de öyledir. O zaman yarı grup pozitifliğini korur.

Eğer $f(\cdot)$ nonnegatif ise ve $f(\cdot) \in L_1(-\infty, \infty)$ ise ve $g = T(t)f$ ise, $g(\cdot) \in L_1(-\infty, \infty)$ ve,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \text{ olur.}$$

Böyle bir yarı gruba transition yarı grubu denir. Bu yarı grup Markov proses teorisi için çok önemlidir (Balakrishnan, 1976). Ayrıca, $\forall f$ ve $\forall t > 0$ için $f \notin D(A)$ olmasına rağmen

$T(t)f \in D(A)$ ya da $T(t)f \in D(A^\infty)$ olur. Ayrıca,

$$\|T(t + \Delta)f - T(t)f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-2tw^2} \right) \left[e^{-\Delta w^2} - 1 \right]^2 |\psi_f(w)|^2 dw \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \|T(t + \Delta)f - T(t)f\| \rightarrow 0, \quad \forall t > 0 \text{ olur.}$$

A 'nın spektrumu tüm negatif yarı düzleme eşit olduğu halde, yarı grup kompakt değildir.

Örnek 7.3 : (Sıfır Potansiyelindeki Bir Tek m Kütle Parçası İçin Schrödinger Denklemini)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\int |\psi|^2 dx = 1,$$

Örnek 7.2'nin değişik bir halidir. $H = L_2(-\infty, \infty)$ ve

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ 'dir.}$$

$$\frac{h}{2m} = p \quad \text{dersek,}$$

$$A \sim i\hbar \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D(A) = \{f \mid f, f' \text{ 'ler mutlak sürekli ve } f', f'' \in H\}$$

O zaman $\forall f \in D(A)$ için $[Af, f] + [f, Af] = 0$ olur. Ayrıca $A^* = -A$ 'dır. Böylece Teorem 4.13'den, A bir büzen yarı grup oluşturur, aslında bir grup oluşturur.

$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{\lambda^2 R(A)t - \lambda^2 t} f \rightarrow T(t)f$ olduğunu biliyoruz.

$(e^{\lambda^2 R(A)t} f)$ 'in Fourier transformu $e^{(\lambda^2 t \lambda + i \lambda^2 t p)} \psi_f(w)$ şeklindedir. Buradan $T(t)$ 'nin

Fourier transformu:

$$e^{-i w^2 t} \psi_f(w) \text{ şeklindedir.}$$

$$\|T(t)f\| = \|f\|, \quad T(t)f = h,$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t; y-x) f(x) dx \quad \text{olduğunu zaten biliyoruz. Öyleyse artık } T(t) \text{ yarı grubu } t > 0$$

için düzgün sürekli değildir ve $\forall t > 0$ için sınırlı bir terse sahip olduğundan $T(t)$ kompakt değildir.

Sonsuz boyutlu bir Banach uzayında tanımlı bir lineer sınırlı opertörün tersi varsa bu operatör kompakt olamaz.

Örnek 7.4 : (En Basit Bir Boyutlu Dalga Denklemi)

$$f(0, x) = f_1(x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, x) = f_2(x) \quad \text{olmak üzere}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \text{ şeklindedir.}$$

$$f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in L_2[-\infty, \infty] \quad \text{olsun.}$$

$$\eta_1(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t}, \quad \eta_2(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \quad \text{diyelim. O zaman denklemi,}$$

$$\frac{\partial \eta_1(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial \eta_2(t, x)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta_2(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial \eta_1(t, x)}{\partial x} \quad \text{şeklinde düzenleyebiliriz.}$$

Buradan, $\eta(t, x)$, bileşenleri $\eta_1(t, x)$, $\eta_2(t, x)$ olan sütun vektörü göstermek üzere,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{iken,} \quad \frac{\partial \eta(t, x)}{\partial t} = A \eta(t, x) \quad \text{yazabiliriz.}$$

Böylece A operatörü, $H = L_2[-\infty, \infty] \times L_2[-\infty, \infty]$ Hilbert çarpım uzayında tanımlı, türevleri de H 'de olan $[\eta_1(x), \eta_2(x)]$ sütun fonksiyonlarının sınıfı üzerinde tanımlı olur. A dissipatiftir:

$$[Af, f] = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}, f_2 \right] + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}, f_1 \right] = 0 \quad \text{olduğundan,} \quad [Af, f] + [f, Af] \leq 0 \quad \text{'dır. Öyleyse, } D \sim \partial / \partial x$$

iken $\lambda f - Af = g$ fonksiyonu,

$$Df_1 = \lambda f_2 - g_2$$

$$Df_2 = \lambda f_1 - g_1 \quad \text{'e karşılık gelir.}$$

$\forall \lambda$ için bu bağıntının $\forall g \in H$ için H 'de bir tek çözüme sahip olduğu açıktır. Özellikle $(I - A)$ görüntü kümesi uzayın tamamına eşit ve A dissipatif olduğundan, Teorem 4.12 gereği A bir kuvvetli sürekli büzen yarı grup oluşturur.

$$\text{Yani } f \in D(A) \text{ için, } \frac{d}{dt} [T(t)f, T(t)f] = 0 \quad \text{olur.}$$

A 'nın tanım kümesi yoğun olduğundan, $\forall f \in H$ için $\|T(t)f\| = \|f\|$ olur. Bu ise, $T(t)$ 'nin bir izometri olduğunu gösterir. Yani, $\forall t$ için $T(t)$ bir sınırlı terse sahiptir. Buradan ya Fourier transformunu alarak ya da e^{At} 'yi hesaplayarak,

$$T(t) \eta = \begin{pmatrix} \frac{\eta_1(x+t) + \eta_1(x-t)}{2} + \frac{\eta_2(x+t) - \eta_2(x-t)}{2} \\ \frac{\eta_2(x+t) + \eta_2(x-t)}{2} + \frac{\eta_1(x+t) - \eta_1(x-t)}{2} \end{pmatrix} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 7.5 : (Kompakt Yarı Gruplar) $H = \ell_2$ (Kareleri toplanabilir dizilerin uzayı) olsun. Bir $\alpha \in \ell_2$ için, $\alpha = \{a_n\}$ diyelim. $\{\lambda_n\}$ herhangi bir sayı dizisi ve $-\epsilon < \operatorname{Re} \lambda_n \leq w < \infty$ olmak üzere $T(t)\alpha = \{e^{\lambda_n t} a_n\}$ şeklinde tanımlayalım. O zaman $T(t)$, $A\alpha = \{\lambda_n a_n\}$ olarak verilen A generatörü tarafından oluşturulan bir kuvvetli sürekli yarı gruptur.

$$[T(t)^* \alpha, b] = \sum e^{\bar{\lambda}_n t} a_n \bar{b}_n = \sum a_n (e^{\bar{\lambda}_n t} b_n) = [\alpha, T(t)b] \text{ olduğundan } T(t)^* T(t)\alpha = \{e^{\bar{\lambda}_n t} a_n\}$$

olur. Ayrıca, $v_n = \operatorname{Re} \lambda_n$ iken, $T(t)^* T(t)\alpha = \{e^{2v_n t} a_n\} = T(t)T(t)^* \alpha$ 'dır. $T(t)$ 'nin kompakt olması için gerek ve yeter koşul:

$$\limsup e^{v_n t} = 0, \quad t > 0 \text{ ya da } \limsup v_n = -\infty \text{ olmasıdır.}$$

$T(t)$ 'nin H.S. olması için gerek ve yeter koşul:

$$\forall t > 0 \text{ için } \sum_1^\infty e^{2v_n t} < \infty \text{ olmasıdır. Bu ayrıca yarı grubun nükleer olma koşuludur.}$$

($v_n = -\sqrt{n}$ alırsak kendisi H.S. olan fakat rezolventi olmayan bir yarı grup elde ederiz.)

Böylece her ayrılabilir Hilbert uzayı üzerinde kompakt ve H.S. yarı gruplar elde edebileceğimizi görüyoruz.

Kısmi diferansiyel denklemlerle oluşturulan kompakt yarı gruplar için daha çok uğraşmak gerekiyor. Bunun için herşeyden önce denklemin tanım kümesinin kompakt olması gerekir. Böylece $L_2[0, 2\pi] = H$ kabul edebiliriz ve denklem:

$$f(0) = f(2\pi)$$

$$f'(0) = f'(2\pi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad t > 0 \text{ şeklini alır.}$$

$$A \sim \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad A \text{'nin tanım kümesi :}$$

$$D = [f \mid f, f' \text{ mutlak sürekli, } f', f''(\cdot) \in L_2(0, 2\pi) \text{ ve } f(0) = f(2\pi); f'(0) = f'(2\pi)]$$

öyle ki $f \in D$ için;

$$[Af, f] = \int_0^{2\pi} f''(t)f(t)dt = - \int_0^{2\pi} f'(t)f'(t)dt = [f, Af] \leq 0$$

Bunun yanı sıra A 'nın kendine eş olduğunu biliyoruz. Böylece Teorem 4.13 gereği, A , kendine eş operatörlerin bir büzen tasvirini oluşturur. Verilen herhangi bir $g(\cdot) \in L_2(0, 2\pi)$ için,

$g_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} dx$ olsun. O zaman, Fourier katsayıları yardımıyla $f(\cdot)$ fonksiyonunu

tanımlarsak:

$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n}{1+n^2} e^{inx}$ olur. Seriler noktasal yakınsaktır ve $f(\cdot)$ 'nin A 'nın tanım kümesi içinde olduğu ve $f - Af = g$ olduğu önceden biliniyor. Eğer $\varphi_n(x) = e^{inx}$ ise, $\varphi_n(\cdot)$ A 'nın tanım kümesindedir ve, $T(t) \varphi_n = e^{-n^2 t} \varphi_n$, ve φ_n 'ler de A 'nın özfonksiyonlarıdır. O halde $\{\varphi_n\}$ 'yi bir ortonormal taban kabul ederek, $T(t)$ yarıgrupunun H.S. olduğu gösterilebilir.



SONUÇLAR

Sonuç 1: A 'nın tanım kümesi yoğun olan kapalı lineer bir operatör olduğunu varsayalım ve

$$[Ax, x] + [x, Ax] = 0, \quad \forall x \in D(A)$$

$[A^*x, x] + [x, A^*x] = 0, \quad \forall x \in D(A^*)$ olsun. O zaman, A , normu koruyan bir grup oluşturur.

Sonuç 2: Bir H Hilbert uzayı üzerinde kuvvetli sürekli olan bir yarı grubun kompakt ve kendine eş olduğunu farz edelim. O zaman H ayrılabilir. Bunun yanı sıra eğer H sonlu boyutlu değilse, $\lambda_k \rightarrow -\infty$ olmak üzere $\{\lambda_k\}$ reel sayı dizisi vardır ve

$$A\text{'nin spektrumu} = A\text{'nin noktasal spektrumu} = \{\lambda_k\}$$

$$T(t)\text{'nin spektrumu} = \{e^{\lambda_k t}\} \cup \{0\} \quad \text{olur. Ayrıca, } w_0 = \sup \lambda_k \text{ olur.}$$

Sonuç 3: Eğer A bir yarı grup oluşturuyorsa ve $R(\lambda, A)$ rezolvent kümesi $\lambda > w_0$ için kompakt ve kendine eş ise, o zaman uzay ayrılabilir, yarı grup kompakt ve kendine eştir.

Sonuç 4: $T(t)$ analitik yarı grubunun kapalı alt aralıklar üzerinde sınırlı olduğunu varsayalım. O zaman öyle pozitif bir c sabiti bulabiliriz ki; $\forall t, \quad \|(ctAT(t))^n\| \leq M, \quad n \geq 1$

KAYNAKLAR

Balakrishnan, A.V., (1976), "Applied Functional Analysis", Springer Verlag, New York.

Davies, E.B., (1980), "One-Parameter Semigroups", Academic Press, New York. 1

Davies, E.B., (1985), "Trace Properties of The Dirichlet Laplacian Math", z. 188, 245-251.

Dunford, N. ve Schwartz, J., (1988), "Linear Operators", V.I., Wiley, New York.

Hille, E. ve Phillips, R.C., (1957), "Functional Analysis and Semigroups", Collg. Publ. Amer. Math. Soc.

Kato, T., (1980), "Perturbation Theory For Linear Operators", Springer-Verlag, New York.

Simon, B., (1979), "Kato's Inequality and The Comparison of Semigroups", Journal of Functional Analysis 32,97-101.

Yosida, K., (1980), "Functional Analysis", Springer-Verlag, New York.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 09.09.1980

Doğum yeri Giresun

Lise 1994-1998 Pendik Süper Lisesi

Lisans 1998-1999 Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

1999-2002 Mimar Sinan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2002-2004 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Müh. Anabilim Dalı Matematik
Mühendisliği Programı

Çalıştığı kurum(lar)

2003-2004 İstek Özel Atanur Oğuz Okulları.