

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Serilerle Çözüm

Yüksek Lisans Tezi

Deniz Bozkuş

2004

29
18

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

SERİLERLE ÇÖZÜM

Matematikçi, Deniz BOZKUŞ

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında

Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Servet ES

İSTANBUL, 2004

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE VE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Yer No (DDC) : R/209/247

Kayıt No2477.....
Geldiği YerFen Bilimleri Ens.....
.....
Tarih8/3/2005.....
Fiyat6.95.....
Fatura No
Ayniyat No1/1.....
Ek

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



VIII-139

SERİLERLE ÇÖZÜM

Deniz BOZKUŞ

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında

Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Y. Doç. Dr. Servet ES
İz

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Servet ES

Y. Doç. Dr. Coşkun Güler

Doç. Dr. Mertala Bayram
AA Bayram

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. SERİLER.....	2
2.1. Bir Serinin Yakınsaklığı ve Iraksaklığı.....	3
2.2. Yakınsak Seriler İle İlgili Temel Teoremler.....	5
2.3. Özel Seriler.....	7
2.3.1. Geometrik Seri.....	7
2.3.2. p Serileri.....	8
2.4. Sabit Seriler İçin Yakınsaklık ve Iraksaklık Teorileri.....	8
2.4.1. Mukayese (Karşılaştırma) Testi.....	8
2.4.2. İntegral Testi.....	11
2.4.3. D'Alembert Oran Testi.....	14
2.4.4. Cauchy Oran Testi.....	16
2.4.5. $\frac{u_n}{v_n}$ Kuralı.....	18
2.4.6. Raabe Kuralı.....	21
2.4.7. Gauss Testi.....	22
2.5. Alterne Seriler.....	22
2.6. Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık.....	25
2.7. Mutlak Yakınsak Seriler Üzerine Teoremler.....	26
3. KUVVET SERİLERİ.....	27
3.1. D'Alembert Oran Testi.....	27
3.2. Cauchy Hadamard Teoremi.....	35
3.3. Kuvvet Serilerinin Türev ve İntegrali.....	43

4. FONKSİYONLARIN SERİYE AÇILIMI	52
4.1. Maclaurin Serisi	52
4.2. Binom Formülü	58
4.3. Taylor Serisi	59
5. SERİLERLE ÇÖZÜM	63
5.1. Adi Nokta Komşuluğunda Çözüm (Taylor Serisi Yöntemi)	65
5.2. Adi Nokta Komşuluğunda Çözüm (Belirsiz Katsayılar Yöntemi)	70
5.3. Tekil Nokta Komşuluğunda Çözüm (Frobenius Yöntemi)	86
5.3.1. İndisel Denklemin Köklerinin Eşit Olması Hali	102
5.3.2. İndisel Denklemin Köklerinin Arasındaki Farkın Bir Tamsayı Olması Hali	110
5.3.3. Sonsuzdaki Nokta	120
5.3.4. Bessel Denklemi ve Bessel Fonksiyonları	123
5.3.5. Bessel Fonksiyon Özellikleri ve Modifiye Bessel Fonksiyonları	130
5.3.6. Legendre Diferansiyel Denklemleri	134
KAYNAKLAR	138
ÖZGEÇMİŞ	139

SİMGE LİSTESİ

$\Rightarrow$	ise
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
Σ	Toplam Sembolü
$\mathbb{R}$	Reel (gerçek) Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}^+$	Sayma Sayılar Kümesi
$\lim$	limit
$\rightarrow$	yaklaşır
ε	epsilon
$n!$	n faktöriyel
$\int$	integral
tg	tanjant
∞	sonsuz
$\log$	logaritma
$\sin$	sinüs
f'	türev
$<$	küçük
$>$	büyük
$\leq$	küçük eşit
$\geq$	büyük eşit
$ $	mutlak değer

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Fonksiyon Eğrisi (İntegral Mevcutsa) 12

Şekil 2.2 Fonksiyon Eğrisi (İntegral Mevcut Değilse) 12

ÖNSÖZ

Çalışmam boyunca, tezimi yöneten ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç.Dr. Servet ES'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca beni bugünlerime getiren, manevi desteklerini her zaman hissettiğim anneme, babama ve canım kardeşime teşekkür ederim.

Üçüncü bölümde, kuvvet serileriyle ilgili tanımlar, kuvvet serilerinin yakınsaklığı ve ıraksaklığının bulunması ve kuvvet serilerinin türev ve integrali verilmiştir. Ayrıca bu konularla ilgili örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde fonksiyonların seriye açılımı ile ilgili Maclaurin serisi, Binom Formülü ve Taylor Serisinin genel ifadeleri ve bunların kullanımı ile ilgili örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin serilerle çözüm metodları, Bessel Denklemi, Bessel Fonksiyonları ve Modifiye Bessel Fonksiyonları ilgili tanımlar ve genel özellikler, Legendre Diferansiyel Denklemi ile ilgili tanımlar ve genel özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu konularla ilgili çeşitli örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: seriler, kuvvet serileri, fonksiyonların seriye açılımı, Taylor serisi, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin serilerle çözümü.

ÖZET

Bu tezde; seriler, kuvvet serileri ve serilerle çözüm konuları ele alınmıştır.

İkinci bölümde, serilerin yakınsaklığı ve ıraksaklığı, serilerin yakınsaklık ve ıraksaklık testleri, alterne seriler, mutlak ve şartlı yakınsaklık konuları incelenmiştir. Ayrıca bu konularla ilgili örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, kuvvet serileriyle ilgili tanımlar, kuvvet serilerinin yakınsaklığı ve ıraksaklığının bulunması ve kuvvet serilerinin türev ve integrali verilmiştir. Ayrıca bu konularla ilgili örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde fonksiyonların seriye açılımı ile ilgili Maclaurin serisi, Binom Formülü ve Taylor Serisinin genel ifadeleri ve bunların kullanımı ile ilgili örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin serilerle çözüm metodları, Bessel Denklemi, Bessel Fonksiyonları ve Modifiye Bessel Fonksiyonları ilgili tanımlar ve genel özellikler, Legendre Diferansiyel Denklemi ile ilgili tanımlar ve genel özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu konularla ilgili çeşitli örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: seriler, kuvvet serileri, fonksiyonların seriye açılımı, Taylor serisi, değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin serilerle çözümü.

Keywords: series, power series, series expansion of functions, Taylor Series, solutions linear differential equations with non constant coefficient with the help of series.

ABSTRACT

In this thesis series, power series and solutions with series are discussed .

In chapter 2, the convergentness and divergentness of power series, convergent and divergent tests of series, alternate series and absolutely convergent series and examples of these topics are given.

In chapter 3, definitions related with power series, deciding the convergentness or divergentness of power series, the derivative and integral of the power series are given.

In chapter 4, Maclaurin series about the expansion of the functions with power series, Binomial Formula and the general definition of Taylor Series and examples which show how to use these formulas are given.

In chapter 5, the methods of solving linear differential equations with non-constant coefficients with the help of power series, Bessel Equation and Modified Bessel Functions, the definitions and general properties of Bessel Functions and the definitions and general properties of Legendre Differential Equations are given. Moreover various examples related with these topics are given.

Keywords: series, power series, series expansion of functions, Taylor Series, solutions linear differential equations with non constant coefficient with the help of series.

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler teorisi, matematiği en önemli bölümlerinden biridir. Bu bölüm uygulamalı matematikte, mühendislikte, teorik ve deneysel fizikte, mekanikte, iktisat biliminde ve benzeri uygulamalı bilimlerin pek çoğunda geniş ve çeşitli uygulama sahası bulmaktadır.

Genel olarak diferansiyel denklemlerin bir çoğunun çözüm metotları ve bunların teorik yapısı, diferansiyel denklemler teorisinde gösterilmiş, ispatları yapılmış, gereken açıklığa kavuşturulmuştur. Fakat yine de bir çoğunun, özellikle belirli bir tipe uymayan ve genellikle değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin hepsinin mutlaka çözülebileceği ve bu diferansiyel denklemi sağlayan fonksiyonunun her durumda bulunabileceği söylenemez. Ancak böyle bir diferansiyel denklemin çözülmesi gerekir. Bu taktirde kullanılan klasik çözüm yollarının dışında başka çözüm yolları denemek gerekmektedir.

Bu hususlar göz önüne alındığı taktirde, ilk akla gelen çözüm metotlarından biri, serilerden faydalanmak olacaktır. İşte konumuz bu noktada ortaya çıkmış olacaktır. Seri teorisinin, kuvvet serileri ile ilgili bölümü ki bu arada Taylor ve Maclaurin serileri kullanılmak suretiyle diferansiyel denklemlerin çözümlerinin de kuvvet serileri şeklinde bulunması imkanı ortaya çıkmaktadır.

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + \dots$$

(2.1)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

ifadeleri birer seri örneğidir.

Bir seride terimlerin sayısı sonlu ise seriye sonlu seri, terimlerinin sayısı sonsuz ise seriye sonsuz seri denir. Yukarıdaki örneklerden yalnız (2.1) serisi sonlu seri; diğerleri sonsuz serilerdir.

Bir sonsuz seri

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

şeklinde gösterilir. Burada u_n serisinin genel terimi adını alır. Bu terim serinin terimlerinin oluşum kuralını verir. Serideki bir terim, genel terimde n yerine terim numarasını koymak suretiyle elde edilebilir.

ÖRNEK 2.1. $\frac{3}{1.2} + \frac{4}{2.3} + \frac{5}{3.4} + \dots$ serisinin genel terimini yazınız.

Bu serinin genel terimi

2. SERİLER

TANIM 2.1. Sabit bir kurala veya kanuna uyularak elde edilen ardışık terimlere bir *dizi* denir.

Örneğin,

$$1, 4, 9, 16, 25 \rightarrow 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$$

ve

$$1, -x, \frac{x^2}{2}, -\frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, -\frac{x^5}{5}$$

birer dizidirler.

TANIM 2.2. Bir kuralla birbirine bağlı sayılar dizisinin verilmiş toplamına *seri* denir.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$$

(2.1)

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

ifadeleri birer seri örneğidir.

Bir seride terimlerin sayısı sonlu ise seriye *sonlu seri*; terimlerinin sayısı sonsuz ise seriye *sonsuz seri* denir. Yukarıdaki örneklerden yalnız (2.1) serisi sonlu seri; diğerleri sonsuz serilerdir.

Bir sonsuz seri

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

şeklinde gösterilir. Burada u_n serisinin *genel terimi* adını alır. Bu terim serinin terimlerinin oluşum kuralını verir. Serideki bir terim, genel terimde n yerine terim numarasını koymak suretiyle elde edilebilir.

ÖRNEK 2.1. $\frac{3}{1.2} + \frac{4}{2.3} + \frac{5}{3.4} + \dots$ serisinin genel terimini yazınız.

Bu serinin genel terimi

$$u_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$$

şeklinde dir. Buna göre seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

şeklinde de gösterilebilir.

ÖRNEK 2.2. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$ serisinin genel terimini yazınız.

Genel terim $u_n = \frac{2n-1}{2n}$ olup seri

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots + \frac{2n-1}{2n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}$$

şeklinde gösterilebilir.

ÖRNEK 2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ serisinin ilk dört terimini yazınız.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

2.1 Bir Serinin Yakınsaklığı veya Iraksaklığı

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (2.2)$$

serisi verilmiş olsun.

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{n=1}^n u_n$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$ dir. Buna göre seri yakınsak ve toplamı $S=2$ dir.

toplamlarına serinin *kısmî toplamları* denir. S_n kısmî toplamı serinin ilk n teriminin toplamıdır.

Eğer bu seri yakınsak ise, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ olacak şekilde bir S mevcut ise, (2.2) serisi *yakınsaktır* denir ve S ye de serinin *toplamı* denir. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ mevcut değilse seri *ıraksaktır*

denir. Bazen sonsuz seriler $\sum u_n$ şeklinde kısa olarak göstereceğiz ve u_n ede serinin n inci terimi diyeceğiz.

ÖRNEK 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$

Burada ilk n terimin toplamı $= S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$ olduğundan seri yakınsaktır ve toplamı $S=1$ dir.

ÖRNEK 2. 5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Burada S_n , n nin çift veya tek oluşuna göre 0 veya 1 dir. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ mevcut değildir ve seri ıraksaktır. (Salınan seri).

ÖRNEK 2.6. $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$ serisinde

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

olup $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

olarak mevcut değil ve dolayısıyla seri ıraksaktır.

ÖRNEK 2.7. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ serisi ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ olan bir geometrik seri olup

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{2}{2^n}$$

ve

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$ dir. Buna göre seri yakınsak ve toplamı $S=2$ dir.

2.2. Yakınsak Seriler ile İlgili Temel Teoremler

1. $\sum u_n$ yakınsak ise $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ dır. Bununla beraber tersi tam doğru değildir, yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ olduğu halde $\sum u_n$ yakınsar veya yakınsamayabilir de. Buradan, eğer bir serinin n inci terimi sıfıra *yaklaşmıyor* ise seri ıraksaktır.

TEOREM 2.2.1. Yakınsak bir seride

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \text{ dır.}$$

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ yakınsak bir seri olsun.

$$S_n = S_{n-1} + u_n$$

ve buradan

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

yazılabilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ serisi yakınsak olduğundan}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0$$

bulunur.

Bu şart yakınsaklık için gerekli bir şart olmakla beraber, serinin yakınsak olabilmesi için yeter değildir. Buna göre teoremin karşıtı doğru değildir; yani, genel terimi sıfıra yaklaşan bir serinin daima yakınsak olduğunu iddia edemeyiz.

Ancak, bir seride $n \rightarrow \infty$ halinde u_n sıfıra yaklaşmıyorsa, bu serinin ıraksak olduğu söylenir

ÖRNEK 2.8. Genel terimi $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ olan bir seri için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \text{ olup seri ıraksaktır.}$$

ÖRNEK 2.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n}$ serisi için, serilerinin her ikisi de yakınsak ve k herhangi bir sayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3n} = \frac{2}{3} \neq 0$$

olup genel terimin limiti 0 olmadığından seri ıraksaktır.

ÖRNEK 2.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Bu serinin limiti sıfır olmasına rağmen ıraksak bir seridir.

2. Sonlu sayıda terimlerin bir seriden çıkartılması (veya eklenmesi) serinin yakınsak veya ıraksaklık özelliğini değiştirmez.

TEOREM 2.2.2. Bir serinin baş tarafına sonlu sayıda herhangi terimler ilâve etmek veya baş tarafından sonlu sayıda terimler atmakla serinin karakteri (yakınsak veya ıraksaklığı) değişmez.

İspat: $u_1 + u_2 + \dots$ serisi $v_1 + v_2 + \dots$ serisinin baş tarafından $v_1, v_2, \dots, v_k$ terimlerinin atılmasıyla elde edilmiş bir seri olsun. Bu takdirde $u_n = v_{k+n}$ olup

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = v_{k+1} + v_{k+2} + \dots + v_{k+n}$$

$$s_n = S_{k+n} - S_k$$

elde edilir. Buradan, S_n in bir limitinin mevcut olması halinde s_n in de limitinin mevcut olacağı ve dolayısıyla v serisi yakınsak ise u serisinin de yakınsak olacağı; S_n in bir limiti mevcut değilse s_n in de limitinin mevcut olmayacağı ve dolayısıyla v serisinin ıraksak olması halinde u serisinin de ıraksak olacağı gösterilmiş olur.

3. Serinin her terimi sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılırsa serinin yakınsaklık veya ıraksaklığına etkilemez. Yakınsak iki serinin toplamı da yakınsaktır.

TEOREM 2.2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ serilerinin her ikisi de yakınsak ve k herhangi bir sayı ise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} k u_n \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \mp v_n)$$

serileri de yakınsak ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} k u_n = k \sum_{n=1}^{\infty} u_n ; \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

dir. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ıraksak ve $k \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ de ıraksaktır.

İspat : $\sum_{i=1}^n k u_i = k \sum_{i=1}^n u_i$ ve $\sum_{i=1}^n (u_i \pm v_i) = \sum_{i=1}^n u_i \pm \sum_{i=1}^n v_i$

yazılabilir. Bu ifadelere limit teoremleri uygulanırsa yukarıdaki sonuçlar elde edilir.

TEOREM 2.4. n artarken asla azalmayan ve sabit bir A sayısından daima daha küçük kalan bir S_n , değişkeni, n in sınırsız olarak artması halinde A dan büyük olmayan bir limite yaklaşır.

2.3 Özel Seriler

2.3.1 Geometrik Seri

TEOREM 2.3.1.1. $u_n = a r^{n-1}$ ($a \neq 0$) geometrik serisi $|r| \geq 1$ halinde ıraksak; $|r| < 1$ halinde yakınsak ve toplamı

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = \frac{a}{1-r} \text{ dir.}$$

İspat : Bir geometrik serinin ilk n teriminin S_n toplamı, $r \neq 1$ olarak,

$$S_n = a \frac{1-r^n}{1-r} \text{ dir.}$$

1) $|r| < 1$ ise:

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} r^n \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

olarak seri yakınsak ve toplamı $S = \frac{a}{1-r}$ dir.

2) $r = +1$ ise $u_n = a \neq 0$ olarak seri ıraksaktır.

3) $r = -1$ ise $|u_n| = a \neq 0$ olarak seri ıraksaktır.

4) $|r| > 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \rightarrow \infty$ olup genel terim sifira yaklaşıyor ve dolayısıyla seri ıraksaktır.

2.3.2. p Serileri

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$ (p bir sabit) serisi $p > 1$ için yakınsak ve $p \leq 1$ içinde ıraksar. $p=1$

olan seriye harmonik seri denir.

2.4. Sabit Seriler İçin Yakınsaklık ve İraksaklık Testleri

Geometrik seride olduğu gibi, her seri için S_n toplamını veren bir ifade bulmak mümkün değildir. Bu nedenle, bütün serilerin yakınsaklık ve ıraksaklıklarını, S_n toplamının limitinin mevcut olup olmadığını araştırmak yolu ile belirtemeyiz. Bu zorluk, serilerin karakterlerinin belirtilebilmesi için bazı kuralların bulunması zorunluluğunu ortaya atmıştır. Biz de şimdi pozitif terimli serilere ait kurallardan bazılarını inceleyeceğiz.

2.4.1 Mukayese (Karşılaştırma) Testi

TEOREM 2.4.1.1. Bütün terimleri pozitif sabitlerden ibaret olan

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

serileri verilmiş olsun.

Eğer, a_n serisi yakınsak ve u_n serisindeki her terim, a_n serisindeki karşılığı olan terimden küçük veya ona eşitse, u_n serisi de yakınsaktır.

Eğer a_n serisi ıraksak ve u_n serisindeki her terim, a_n serisindeki karşılığı olan terimden büyük veya ona eşitse, u_n serisi de ıraksaktır.

İspat : a_n serisi yakınsak; $u_n < a_n$ ve

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n ; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A ;$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

olsun. Hipotezden ötürü $s_n \leq S_n$ dir. a_n serisi pozitif terimli bir seri olduğundan, n arttıkça S_n asla azalmaz ve $S_n \leq A < A+1$ olur. Buna göre de $s_n < A+1$ olacaktır. u_n serisi de pozitif terimli bir seri olduğundan s_n , n ile birlikte artar. Diğer taraftan s_n daima $A+1$ den küçük kaldığına göre $A+1$ den büyük olmayan bir limite yaklaşır. Buna göre de u_n serisi yakınsak olur.

a_n ıraksak ise S_n in bir limiti mevcut olmayacak ve hipotezden ötürü $s_n \geq S_n$ olacağına göre s_n de bir limite yaklaşamayacak ve u_n de ıraksak olacaktır.

ÖRNEK 2.4.1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots$ serisinin karakterini belirtiniz.

Bu seriyi $p=2$ olan p serisi yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

serisi ile mukayese edelim. $p=2$ halinde p serisi yakınsaktır. Diğer taraftan her n için

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

olup verilen seri de yakınsaktır.

ÖRNEK 2.4.1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$ serisinin karakterini belirtiniz.

Bu seriyi de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ geometrik serisi ile mukayese edelim. Bu geometrik seri, ortak çarpanı

$r = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan yakınsaktır. Diğer taraftan $n > 2$ için

$$\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$$

olup

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

serisi de yakınsak olur. Bu serinin baş tarafına 1 ve $\frac{1}{2^2}$ terimlerini eklemekle serinin karakteri değişmez.

ÖRNEK 2.4.1.3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$ serisinin karakterini belirtiniz.

$$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

olduğu kolayca görülebilir. Diğer taraftan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

serisi harmonik serinin terimlerinin $\frac{1}{2}$ ile çarpılmasından elde edilen bir seri olup harmonik seri ile aynı karakterde yani ıraksaktır. O halde, mukayese (karşılaştırma) testi gereği verilen seri de ıraksaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \text{ serisi de yakınsaktır.}$$

ÖRNEK 2.4.1.4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$ serisinin karakterini belirtiniz.

Bu seriyi de

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots$$

serisi ile mukayese edelim. Bu seri $p = 4$ olan p serisi olup yakınsaktır. Diğer taraftan $n \geq 1$ için

$$\frac{1}{(2n+1)^4} < \frac{1}{n^4} \text{ olup verilen seri de ıraksaktır.}$$

ÖRNEK 2.4.1.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$ serisinin karakterini belirtiniz.

Bu seriyi de ıraksak olduğunu bildiğimiz

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

harmonik serisi ile mukayese edelim. $n > 1$ için

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$$

olup ıraksaktır.

ÖRNEK 2.4.1.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$ serisinin karakterini bulalım.

$\forall n$ için,

$$0 \leq \cos^2 n \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ serisi yakınsak olduğu için karşılaştırma testinden, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$ serisi de yakınsaktır.

ÖRNEK 2.4.1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ serisinin karakterini bulalım.

$\forall n$ için,

$$n+1 \leq 2n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 2 \cdot \frac{1}{n+1}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak olduğu için mukayese (karşılaştırma) testinden, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ serisi de ıraksaktır.

2.4.2 Integral Testi

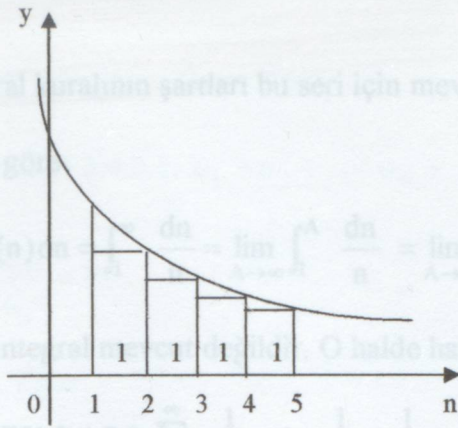
TEOREM 1.4.2.1. İkinciden itibaren her terimi, kendisinden önce gelenden daha küçük ve genel terimi $f(n)$ olan pozitif terimli bir seride $n \geq 1$ için $f(n)$ pozitif, azalan ve sürekli ise:

$$\int_1^{\infty} f(n) dn$$

integrali mevcut olduğu zaman seri yakınsak; mevcut olmadığı zaman seri ıraksaktır.

İspat : $y=f(n)$ fonksiyonunun eğrisi Şekil 1'de gösterilen eğri olsun. $n=1, 2, 3, \dots, k$ değerlerinin her birinden on eksenine dikmeler çıkalım ve şekildeki dikdörtgenleri teşkil edelim. Dikdörtgenlerin sayısı $k-1$ dir. $k-1$ dikdörtgenin alanları toplamı serinin $S_k - S_1$ toplamını verir ki bu toplam $n = 1, n=k, y=0$ doğruları ve $y=f(n)$ eğrisi ile sınırlanan alandan küçüktür. Buna göre:

serinin karakterini belirler. (Harmonik Seri)



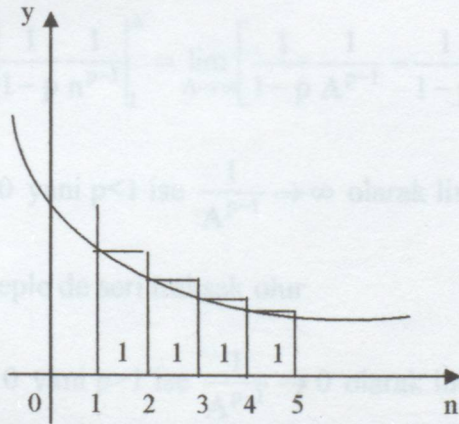
Şekil 2.1. Fonksiyon Eğrisi (İntegral Mevcutsa)

$S_k - S_1 = \sum_{n=2}^k f(n) < \int_1^k f(n)dn$ yazılabilir. k sınırsız artarken $\int_1^k f(n)dn$ integrali mevcut ise,

$S_k - S_1$ daima bu integralin değerinden küçük kalır. $S_k - S_1$ toplamı k ile beraber arttığından ve daima belli bir sayıdan küçük kaldığından bir limite yaklaşır. (bak. TEOREM 4).

Dolayısıyla da seri yakınsak olur.

Integralin mevcut olmaması halinde de, Şekil 2 den



Şekil 2.2. Fonksiyon Eğrisi (İntegral Mevcut Değilse)

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) > \int_1^{n+1} f(n)dn$$

olarak $S_n \rightarrow \infty$ ve dolayısıyla seri ıraksaktır.

ÖRNEK 2.4.2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

serinin karakterini belirtiniz. (Harmonik Seri)

Integral kuralının şartları bu seri için mevcuttur.

Buna göre

$$\int_1^{\infty} f(n)dn = \int_1^{\infty} \frac{dn}{n} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dn}{n} = \lim_{A \rightarrow \infty} |\log n| = \lim_{A \rightarrow \infty} \log A \rightarrow \infty$$

olup integral mevcut değildir. O halde harmonik seri ıraksaktır.

ÖRNEK 2.4.2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$

serisinin karakterini belirtiniz. (*p serisi*)

$p \neq 1$ kabul ediyoruz. $p=1$ halinde seri harmonik seri olur ki bunu da Örnek 2.4.2.1 de incelemiştik.

Integral kuralının şartları bu seri için de mevcuttur.

Buna göre

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(n)dn &= \int_1^{\infty} \frac{dn}{n^p} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dn}{n^p} \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-p} \frac{1}{n^{p-1}} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-p} \frac{1}{A^{p-1}} - \frac{1}{1-p} \right] \text{ dir.} \end{aligned}$$

$p-1 < 0$ yani $p < 1$ ise $\frac{1}{A^{p-1}} \rightarrow \infty$ olarak limit ve dolayısıyla integral mevcut olmaz.

Bu sebeple de seri ıraksak olur.

$p-1 > 0$ yani $p > 1$ ise $\frac{1}{A^{p-1}} \rightarrow 0$ olarak integral mevcut ve seri yakınsak olur.

Bu sonuçlara göre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

serisi (*p serisi*) $p > 1$ ise yakınsak; $p \leq 1$ ise ıraksaktır.

2.4.3 D'Alembert Oran Testi

TEOREM 2.4.3.1. $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ pozitif terimli serisi verilmiş ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = R$$

olsun. Eğer

$R < 1$ ise seri yakınsak;

$R > 1$ ise seri ıraksak;

$R = 1$ ise bir şey söylenemez

dir.

İspat : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = R < 1$ olsun. n nin bir N değerinden itibaren $\frac{u_{N+1}}{u_N} < r$ olabilecek şekilde

$R < r < 1$ eşitsizliğini sağlayan bir r sayısı bulunabilir.

Buna göre

$$n = N \quad \text{için} \quad \frac{u_{N+1}}{u_N} < r \quad \text{ve} \quad u_{N+1} < r u_N$$

$$n = N+1 \quad \text{için} \quad \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < r \quad \text{ve} \quad u_{N+2} < r^2 u_N$$

$$n = N+2 \quad \text{için} \quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < r \quad \text{ve} \quad u_{N+3} < r^3 u_N$$

yazılabilir. Sağ tarafta elde edilen eşitsizlikleri taraf tarafa toplayalım. Bu suretle

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots < r u_N + r^2 u_N + r^3 u_N + \dots$$

elde edilir. İkinci taraf $|r| < 1$ olan bir geometrik seri olup yakınsaktır. Mukayese (karşılaştırma) testi uygulandığı takdirde birinci taraftaki serinin de yakınsak olduğu çıkarılmış olur. Verilen u_n serisi de, birinci taraftaki serinin bir seri olduğuna göre, TEOREM 2.2 den dolayı yakınsak olur.

Şimdi de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = R > 1$ olduğunu kabul edelim. n nin N den büyük her değeri için

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} > 1 \quad \text{ve} \quad u_{N+1} > u_N$$

$$\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} > 1 \quad \text{ve} \quad u_{N+2} > u_{N+1} > u_N$$

$$\frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} > 1 \quad \text{ve} \quad u_{N+3} > u_{N+2} > u_N$$

yazılabilir. Bu da gösterir ki, n nin $N+1$ değerinden itibaren serinin her terimi u_N sayısından büyük kalmaktadır. O halde serinin n inci terimi sıfır limitine yaklaşmamakta ve dolayısıyla seri ıraksaktır.

$R = 1$ halinde, kuralın bir şey söyleyemeyeceğini bir örnekle açıklayalım.

ÖRNEK 2.4.3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$ (p serisi) serisinin karakterini oran testi ile belirtmek isteyelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^p} \cdot \frac{n^p}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1 \quad \text{dir. Bu sonuç } p \text{ ne olursa olsun doğrudur.}$$

Halbuki p serisi, $p > 1$ için yakınsak; $p \leq 1$ için ıraksak olup, serinin karakteri p ye bağlıdır.

ÖRNEK 2.4.3.2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$ serisinin karakterini belirtiniz.

Serinin genel terimi $u_n = \frac{n}{2^n}$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{olarak seri yakınsaktır.}$$

ÖRNEK 2.4.3.3. $1 + \frac{1}{10} + \frac{1.2}{10^2} + \frac{1.2.3}{10^3} + \dots$ serisinin karakterini belirtiniz.

Serinin genel terimi $u_n = \frac{n!}{10^n}$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} \rightarrow \infty \quad \text{olup seri ıraksaktır.}$$

ÖRNEK 2.4.3.4. Genel terimi $u_n = \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}$ olan serinin karakterini belirtiniz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} \div \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n} \div \frac{\pi}{2^n}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < 1$$

olarak seri yakınsaktır.

2.4.4 Cauchy Kök Testi

TEOREM. 2.4.4.1. $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ pozitif terimli serisi verilmiş ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = R \quad \text{olsun. Eğer}$$

$R < 1$ ise seri yakınsak;

$R > 1$ ise seri ıraksak;

$R = 1$ ise bir şey söylenemez; dir.

İspat : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = R < 1$ olsun. n nin bir N değerinden itibaren $\sqrt[n]{u_n} < r < 1$ olabilecek

şekilde $R < r < 1$ eşitsizliğini sağlayan bir r sayısı bulunabilir. Buna göre

$$n = N \quad \text{için} \quad \sqrt[N]{u_N} < r \quad \text{ve} \quad u_N < r^N$$

$$n = N + 1 \quad \text{için} \quad \sqrt[N+1]{u_{N+1}} < r \quad \text{ve} \quad u_{N+1} < r^{N+1}$$

$$n = N + 2 \quad \text{için} \quad \sqrt[N+2]{u_{N+2}} < r \quad \text{ve} \quad u_{N+2} < r^{N+2}$$

yazılabilir. Sağ tarafta bulunan eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak

$$u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots < r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \dots$$

elde edilir. İkinci taraf $|r| < 1$ olan bir geometrik seri olup yakınsaktır. Mukayese (karşılaştırma) testi uygulandığı takdirde birinci taraftaki serinin de yakınsak olduğu sonucuna varılır. Verilen u_n serisi de, birinci taraftaki serinin baş tarafına sonlu sayıda terimler ilâve edilmek suretiyle elde edilmiş bir seri olduğuna göre, TEOREM 2.2. den ötürü yakınsak olur.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = R > 1$ hali de benzer şekilde ispatlanır.

Uyarı : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = R_1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = R_2$ olarak mevcut iseler $R_1 = R_2$ dir.

ÖRNEK 2.4.4.1. Genel terimi $u_n = \frac{1}{(\log n)^n}$ olan serinin karakterini belirtiniz.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0 < 1$ olarak seri yakınsaktır.

ÖRNEK 2.4.4.2. Genel terimi $u_n = \left[\operatorname{tg} \left(a + \frac{\alpha}{n} \right) \right]^n$ olan serinin karakterini belirtiniz.

$$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

$\sqrt[n]{u_n} < \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\alpha}{n} \right)$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \operatorname{tg} \alpha$ dır. Buna göre

$\operatorname{tg} \alpha < 1$ yani $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ise seri yakınsak;

$\operatorname{tg} \alpha > 1$ yani $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ise seri ıraksak;

$\operatorname{tg} \alpha = 1$ yani $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ise kural bir şey söylemez.

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ olması halinde serinin karakterini araştırmak üzere u_n terimini ele alalım.

$$u_n = \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{n} \right) \right]^n = \left[\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n}} \right]^n = \left[1 + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n}} \right]^n$$

yazılabilir.

Bu ise $1 \neq 0$ kabul edelim ve 1 den küçük bir ϵ pozitif sayısı seçelim. ϵ sayısına karşılık gelen

öyle bir p tam sayısını bulalım ki n in p den büyük bütün değerleri için

$$u_n = \left[(1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}} \right]^{n\beta} \text{ şeklinde düşünülebilir.}$$

$n \rightarrow \infty$ halinde $\beta \rightarrow 0$ ve $(1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}} \rightarrow e$ dir.

$$n\beta = \frac{2n \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n}} = \frac{2\alpha \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{n}}{\frac{\alpha}{n}}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{n}}$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\beta = 2\alpha$$

dir.

O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^{2\alpha} \neq 0$$

olarak $\alpha = \frac{\pi}{4}$ halinde seri ıraksaktır.

2.4.5 $\frac{u_n}{v_n}$ Kuralı

TEOREM 2.4.5.1. u_n ve v_n pozitif terimli iki seri ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$$

olsun.

- 1) $l \neq 0$ ise her iki seri aynı karakterdedir.
- 2) $l = 0$ ve v_n yakınsak ise u_n de yakınsaktır.
- 3) $l \rightarrow \infty$ ve v_n ıraksak ise u_n de ıraksaktır.

İspat : $1 \neq 0$ kabul edelim ve 1 den küçük bir ε pozitif sayısı seçelim. ε sayısına karşılık gelen öyle bir p tam sayısı bulalım ki n in p den büyük bütün değerleri için

$$1 - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < 1 + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlansın. Bu takdirde p inci terimden itibaren

$$(1 - \varepsilon)v_n < u_n < (1 + \varepsilon)v_n$$

eşitsizliği daima yazılabilir. Eğer v_n serisi yakınsak ise $(1 + \varepsilon)v_n$ de yakınsak ve

$$u_n < (1 + \varepsilon)v_n$$

eşitsizliğinden ötürü u_n serisi de ıraksak olur. Buna göre $1 \neq 0$ ise her iki serinin aynı karakterde olduğu gösterilmiş olur.

Eğer, $1=0$ ve v_n serisi yakınsak ise belirli bir terimden itibaren

$$u_n < \varepsilon v_n$$

olacağından u_n serisi de ıraksaktır. A, pozitif keyfi bir sayıdır.

Bu kuraldan faydalanarak, bir u_n serisinin karakterini belirtmek için, $\frac{u_n}{v_n}$ oranı sıfırdan farklı

bir limite sahip olacak şekilde bir v_n serisi seçilir.

ÖRNEK 2.4.5.1 u_n genel terimi, n in iki tam çok terimlisinin bölümü şeklinde olan bir serinin karakterini belirtmeye çalışalım. Bu halde

$$u_n = \frac{a n^p + n^{p-1} + \dots}{a' n^q + b' n^{q-1} + \dots}$$

şeklindedir. p ve q tam ve pozitif sayılar, a ve a' de pozitif sayılardır.

Böyle bir serinin karakterini belirtmek için v_n serisi olarak

$$v_n = \frac{n^p}{n^q}$$

genel terimli seri seçilir. Bu takdirde

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{a n^p + b n^{p-1} + \dots}{n^p} \div \frac{a' n^q + b' n^{q-1} + \dots}{n^q}$$

olup

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{a'} \neq 0$ dir. Buna göre her iki seri aynı karakterdedir.

$$v_n = \frac{1}{n^{q-p}}$$

şeklinde olup p serisidir.

O halde

$q - p > 1$ ise v_n serisi yakınsak dolayısıyla u_n serisi de yakınsaktır.

$q - p \leq 1$ ise v_n serisi ıraksak, dolayısıyla u_n serisi de ıraksaktır.

Buradan, u_n serisinin yakınsak olabilmesi için $q - p > 1$ veya $q \geq p + 2$ olması gerektiği söylenebilir.

Sonuç : Genel terimi, n nin iki tam çok terimlisinin bölümü şeklinde olan bir seri, genel terimin paydasının derecesi, payının derecesinden en az iki fazla olduğu zaman yakınsaktır.

Örneğin genel terimleri $\frac{1}{n(n+5)}, \frac{n^2+1}{n^4-7}$ olan seriler yakınsak; genel terimleri

$\frac{n}{n^2+4}, \frac{n^2-1}{2n^2+1}$ olan seriler ıraksak serilerdir.

ÖRNEK 2.4.5.2. Aynı kural, u_n in n nin irrasyonel cebirsel fonksiyonu şeklinde olması halinde de uygulanır. Örneğin

$$u_n = \frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}}$$

serisi verilmiş olsun. v_n olarak $v_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2\sqrt{n}}$ seçilebilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4-16}}{n^2\sqrt{n+1}} \div \frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2\sqrt{n}} = 1 \neq 0$$

olarak her iki seri aynı karakterdedir.

$$v_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2\sqrt{n}} = \frac{n^{4/3}}{n^2 \cdot n^{1/2}} = \frac{1}{n^{7/6}}$$

serisi $p = \frac{7}{6} > 1$ olan p serisi olup yakınsak ve dolayısıyla u_n serisi de yakınsaktır.

ÖRNEK 2.4.5.3. Genel terimi $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{n}$ olan serinin karakterini belirtiniz.

v_n serisi olarak $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n}$ serisini seçelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n}} = \pi \neq 0$$

olarak her iki seri aynı karakterdedir.

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

serisi $p = \frac{3}{2} > 1$ olan p serisi olup yakınsak ve dolayısıyla u_n serisi de yakınsaktır.

TEOREM 2.4.5.2. $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ pozitif terimli bir seri ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n = l \quad \text{olsun.}$$

1) $l \neq 0$ ve $\begin{cases} p > 1 \text{ ise } u_n \text{ serisi yakınsak;} \\ p \leq 1 \text{ ise } u_n \text{ serisi ıraksak;} \end{cases}$

2) $l = 0$ ve $p > 1$ ise u_n serisi yakınsak;

3) $l \rightarrow \infty$ ve $p \leq 1$ ise u_n serisi ıraksak;

dır.

2.4.6. Raabe Kuralı

TEOREM 2.4.6.1 $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ pozitif terimli bir seri ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right] n = \beta \quad \text{olsun.}$$

1) $\beta < -1$ ise seri yakınsak;

2) $\beta > -1$ ise seri ıraksak;

Bu kural, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ in limitinin 1 e eşit olması halinde serinin karakterini belirtmeye imkân veren bir kuraldır.

ÖRNEK. 2.4.6.1. Genel terimi $u_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6....2n}$ olan serinin karakterini bulunuz.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right] n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n+1}{2n+2} - 1 \right] n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n+2} = -\frac{1}{2} > -1 \quad \text{olarak seri ıraksaktır.}$$

2.4.7. Gauss testi. $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1 - \frac{L}{n} + \frac{c_n}{n^2}$ olsun (burada $|c_n| < P$ bütün $n > N$ ler için geçerlidir); bu halde $\sum u_n$ serisi

(a) $L > 1$ ise mutlak yakınsaktır.

(b) $L \leq 1$ ise ıraksak veya şartlı yakınsaktır.

Bu test genellikle Raabe testi başarısız kaldığı zaman kullanılır.

2.5. Alterne Seriler

Terimleri ardışık olarak pozitif ve negatif olan serilere *alterne seriler* denir.

n ne olursa olsun $u_n > 0$ olarak

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n \pm \dots$$

serisi alterne bir seridir. Örneğin

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

serisi alterne bir seri olup *alterne harmonik seri* adını alır.

TEOREM 2.5.1. $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ alterne serisinde n artarken, serinin terimleri mutlak değer bakımından azalıyor veya sabit kalıyor ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

oluyorsa seri yakınsaktır.

İspat: $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ serisinde

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m})$$

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$$

yazılabilir. Bu ifadelerde bulunan parantezlerin içi pozitifdir. Buna göre, birinci ifade S_{2m} in m ile birlikte arttığını ve ikinci ifade ise S_{2m} in daima u_1 den küçük kaldığını gösterir. O halde, n sınırsız olarak arttığı zaman S_{2m} bir S limitine yaklaşır (TEOREM 2.4) Diğer taraftan

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$$

olup

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = S + 0 = S$$

elde edilir. Buna göre, n çift ve tek değerlerden geçerek, sınırsız olarak arttığı zaman, S_n bir S limitine yaklaşır. Bu da serinin yakınsak olduğunu gösterir.

ÖRNEK 2.5.1. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ serisinin karakterini belirtiniz. (Alterne harmonik seri)

Serinin genel terimi

$$|u_n| = \frac{1}{n} \text{ olarak}$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

olup seri yakınsaktır. Bu serinin terimlerinin mutlak değerlerinden meydana gelen seri, harmonik seri olarak, ıraksak olduğundan, seri şarta bağlı yakınsak seridir.

ÖRNEK 2.5.2. $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \dots$ serisinin karakterini belirtiniz.

$$|u_n| = \frac{n}{2^n}$$

olarak

$$|u_{n+1}| = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \left[\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \right] < \frac{n}{2^n} = u_n$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

olup seri yakınsaktır.

Diğer taraftan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \div \frac{n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

olup seri mutlak yakınsaktır.

TEOREM 2.5.2. Yakınsak bir alternatif seride, S toplamı yerine S_n toplamını almakla yapılan hata, $(n+1)$ inci terimden yani atılan terimlerin ilkinden küçüktür.

İspat: $S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ olsun.

n çift ise:

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots - u_n + u_{n+1} - \dots$$

$$S = S_n + u_{n+1} - u_{n+2} + \dots$$

$$S - S_n = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots$$

$$S - S_n = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \dots$$

olarak

$$S_n - S < u_{n+1}$$

ve

n tek ise:

$$S = S_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \dots$$

$$S_n - S = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots$$

$$S_n - S = u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \dots$$

olarak

$$S_n - S < u_{n+1}$$

bulunur.

Her iki halde de S yerine S_n i almakla yapılan hatanın

$$|S - S_n| < u_{n+1}$$

olduğu görülür.

2.6. Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık

Eğer $\sum |u_n|$ serisi yakınsak ise $\sum u_n$ serisi *mutlak yakınsaktır* denir. Fakat $\sum u_n$ yakınsadığı halde $\sum |u_n|$ yakınsamaz ise, $\sum u_n$ ye *şartlı yakınsak* denir.

TEOREM 2.6.1. $\sum |u_n|$ yakınsak ise $\sum u_n$ de yakınsaktır. Yani, mutlak yakınsak seriler yakınsaktır.

ÖRNEK 2.6.1. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \dots$ serisi mutlak yakınsaktır, çünkü serinin mutlak değerinden meydana gelen $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ serisi yakınsaktır.

ÖRNEK 2.6.2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ yakınsak, fakat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ ıraksaktır.

O halde $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ şartlı olarak yakınsaktır.

Uyarı : $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ serisi şartlı yakınsak bir seridir.

Ancak bu serinin terimlerinin yerleri değiştirilmek suretiyle elde edilen

$$\left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] + \left[\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right] + \dots$$

serisi ıraksak bir seridir.

Buna göre, mutlak yakınsak olmayan bir yakınsak seri, terimlerinin yerleri değiştirilmek suretiyle ıraksak bir seri haline getirilebilir.

2.7. Mutlak Yakınsak Seriler Üzerine Teoremler

TEOREM 2.7.1. Her mutlak yakınsak seri yakınsaktır.

TEOREM 2.7.2. Mutlak yakınsak bir serinin terimleri tekrar düzenlenebilir (sırası değiştirilebilir) ve bu şekilde elde edilen yeni seri yakınsak olup aynı toplamı verir. Halbuki şartlı yakınsak bir serinin elemanlarını uygun tarzda sıraya koyarak ıraksak veya toplamı istenilen değere eşit olan yakınsak seriler elde edebiliriz.

TEOREM 2.7.3. Mutlak yakınsak iki serinin toplamı, farkı ve çarpımı ile elde edilen seriler yine mutlak yakınsaktır. Bu işlemler sonlu seriler için de yapılabilir. (3.2)

şeklindeki bir seriye *kuvvet serisi* denir. Buradaki c_n sayılarını serinin katsayıları adı verilir.

Bir polinom $c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$ formunda olduğuna göre kuvvet serisi polinomların genelleştirilmesidir.

Verilen bir kuvvet serisinde esas konu, bu serinin ıraksaklığı veya yakınsaklığı problemi değildir. Çünkü serinin terimleri x e bağlı olduğundan, bu seri bazı x ler için yakınsak olabileceği gibi, bazıları için de ıraksak olabilir. Kuvvet serilerinde inceleyeceğimiz problem verilen bir kuvvet serisi acaba hangi x ler için yakınsak, hangi x ler için ıraksaktır sorularının cevabını bulmaktır.

Yukarıda verilen (3.1) ifadesi $x = 0$ için yakınsak, (3.2) ifadesi $x = a$ için yakınsaktır.

Her kuvvet serisinin $x = a$ için yakınsak olacağı aşiktir. Bu nedenle hangi x ler için denilen a dan farklı x ler kastedilmektedir. Her x için yakınsak kuvvet serileri de vardır.

Öncelikle çok kullanacağımız bir yakınsaklık kriteri olan D'Alembert Oran (Bölüm) Kriterini hatırlayalım:

3.1. D'Alembert Oran Testi

$\sum a_n$ pozitif terimli serisi için,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ olsun. Eğer,

1- $L < 1$ ise $\sum a_n$ serisi YAKINSAK.

2- $L > 1$ ise $\sum a_n$ serisi IRAKSAK.

3- $L = 1$ ise ŞÜPHELİ DURUM vardır.

3. KUVVET SERİLERİ

TANIM 3.1 $\forall c_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n \cdot x^n + \dots \quad (3.1)$$

şeklindeki bir seriye *kuvvet serisi* veya ,

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 \cdot (x - a)^2 + \dots + c_n \cdot (x - a)^n + \dots \quad (3.2)$$

şeklindeki bir seriye *kuvvet serisi* denir. Buradaki c_n sayılarına serinin katsayıları adı verilir.

Bir polinom $c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$ formunda olduğuna göre kuvvet serisi polinomların genelleştirilmesidir.

Verilen bir kuvvet serisinde esas konu, bu serinin ıraksaklığı veya yakınsaklığı problemi değildir. Çünkü serinin terimleri x e bağlı olduğundan, bu seri bazı x ler için yakınsak olabileceği gibi, bazıları için de ıraksak olabilir. Kuvvet serilerinde inceleyeceğimiz problem verilen bir kuvvet serisi acaba hangi x ler için yakınsak, hangi x ler için ıraksaktır sorularının cevabını bulmaktır.

Yukarıda verilen (3.1) ifadesi $x = 0$ için yakınsak, (3.2) ifadesi $x = a$ için yakınsaktır.

Her kuvvet serisinin $x = a$ için yakınsak olacağı açıktır. Bu nedenle hangi x ler için derken a dan farklı x ler kastedilmektedir. Her x için yakınsak kuvvet serileri de vardır.

Öncelikle çok kullanacağımız bir yakınsaklık kriteri olan D'Alembert Oran (Bölüm) Kriterini hatırlayalım:

3.1. D'Alembert Oran Testi

$\sum a_k$ pozitif terimli serisi için,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L \text{ olsun. Eğer,}$$

1- $L < 1$ ise $\sum a_k$ serisi YAKINSAK,

2- $L > 1$ ise $\sum a_k$ serisi IRAKSAK ,

3- $L = 1$ ise ŞÜPHELİ DURUM vardır.

Her x için yakınsak kuvvet serilerin örnek verelim :

ÖRNEK 3.1.1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ serisini inceleyelim:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^k \cdot x}{(k+1)k!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{k+1} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 < 1$$

olduğundan, oran testine göre, x ne olursa olsun yani $\forall x \in \mathbb{R}$ için bu seri yakınsaktır.

ÖRNEK 3.1.2. : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$ serisini inceleyelim:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{x^k} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^k \cdot x}{(k+1)^k (k+1)} \cdot \frac{k^k}{x^k} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} \cdot \left(\frac{k}{k+1} \right)^k$$

$$= 0 \cdot e^{-1}$$

$$= 0 < 1$$

olduğundan, oran testine göre, x ne olursa olsun yani $\forall x \in \mathbb{R}$ için bu seri yakınsaktır.

Bazı x ler için yakınsak, bazıları için de ıraksak olan kuvvet serilerine örnek verelim:

ÖRNEK 3.1.3. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ serisini inceleyelim :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{k+1}}{x^k} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^k \cdot x}{x^k} \right|$$

$$= |x| \quad \text{bulunur.}$$

Oran testinden eğer,

1- $|x| < 1$ yani $-1 < x < 1$ ise seri yakınsak,

2- $|x| > 1$ için seri ıraksak,

3- $|x| = 1$ yani $x = \pm 1$ ise şüpheli durum

Şimdi şüpheli durumu inceleyelim :

$x = 1$ ise,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 1^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 1 \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

$x = -1$ ise,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

O halde,

$$|x| < 1 \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ serisi yakınsak, } |x| \geq 1 \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ serisi ıraksaktır.}$$

ÖRNEK 3.1.4. $\sum_{k=1}^{\infty} k^k \cdot x^k$ serisini inceleyelim:

Bu seri sıfırdan farklı ($x \neq 0$) her x için ıraksaktır. $x \neq 0$ olmak üzere,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)^{k+1} \cdot x^{k+1}}{k^k \cdot x^k} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)^k \cdot (k+1) \cdot x^k \cdot x}{k^k \cdot x^k} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} |x| \cdot (k+1) \cdot \left(\frac{k+1}{k} \right)^k$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} |x| \cdot (k+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} |x| \cdot (k+1) \cdot e = \infty > 1$$

olduğundan, oran testine göre $\sum_{k=1}^{\infty} k^k \cdot x^k$ serisi sadece $x = 0$ için yakınsak, diğer tüm x ler için ıraksaktır.

Lemma 1. $\sum c_k (x - a)^k$ kuvvet serisi bir x_1 de yakınsak ise,

$$|x_2 - a| < |x_1 - a|$$

bağıntısını sağlayan bir x_2 de de yakınsaktır.

İspat : $x_1 \neq a$ dır. Çünkü $x_1 = a$ ise $|x_2 - a| < 0$ olur ki bu mümkün değildir. $|x_2 - a| < |x_1 - a|$ olduğundan,

$$s = \frac{|x_2 - a|}{|x_1 - a|}$$

sayısı 1 den küçük bir pozitif sayıdır. $\sum c_k (x_1 - a)^k$ yakınsak olduğundan,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k (x_1 - a)^k = 0$$

dır. Yakınsak her dizi sınırlı olduğundan $(c_k (x_1 - a)^k)$ sınırlıdır.

$\sup |c_k (x_1 - a)^k| = B$ olsun. Bu taktirde her bir $k \in \mathbb{N}$ için,

$$|c_k (x_2 - a)^k| = |c_k| |x_2 - a|^k = |c_k| |x_1 - a|^k \cdot \frac{|x_2 - a|^k}{|x_1 - a|^k} \leq B s^k$$

olur. $s < 1$ için $\sum B s^k = B \cdot \sum s^k$ yakınsak olduğundan $\sum c_k (x_2 - a)^k$ yakınsaktır.

Buradan, eğer $|x_2 - a| < |x_1 - a|$ ve $\sum c_k (x - a)^k$ serisi x_2 de ıraksak ise x_1 noktasında da ıraksaktır diyebiliriz.

TANIM 3.2. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k$ kuvvet serisinin $|x - a| < R$ için yakınsak olduğu en büyük pozitif R sayısına, bu kuvvet serisinin *yakınsaklık yarıçapı*; seriyi yakınsak yapan x noktalarının oluşturduğu aralığa da *yakınsaklık aralığı* denir.

TEOREM 3.3.1. Her $x \in]-R, R[$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

serisi yakınsak olacak şekilde sabit R sayısı bulunsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ fonksiyon serisi her ε pozitif sayısı için $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ kapalı aralığı üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

(b) Her $x \in]-R, R[$ için $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ile tanımlanan f fonksiyonu $]-R, R[$ de süreklidir.

(c) f fonksiyonu $]-R, R[$ de türevlenebilirdir ve $x \in [-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ için

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

dir.

İspat : Her $x \in]-R, R[$ için $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ yakınsak olsun ve her $x \in]-R, R[$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

yazalım.

(a) Herhangi ε pozitif sayısı verilsin. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ fonksiyon serisinin $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ kapalı aralığı üzerinde düzgün yakınsak olduğunu göstereceğiz. $R - \varepsilon \in]-R, R[$ olduğundan dolayı $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (R - \varepsilon)^n$ sayısı serisi yakınsaktır.

Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ için

$$|c_n x^n| \leq |c_n (R - \varepsilon)^n|$$

eşitsizliği sağlandığından $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ fonksiyon serisi $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ kapalı aralığı üzerinde

$f(x)$ fonksiyonuna düzgün ve yakınsaktır ve $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ düzgün yakınsaktır.

(b) f fonksiyonu $]-R, R[$ de sürekli olduğunu göstermek için $]-R, R[$ aralığının her noktasında sürekli olduğunu göstereceğiz. bunu yapmak için $]-R, R[$ aralığının herhangi bir x_0 noktasını alalım ve $\varepsilon = \frac{R - |x_0|}{2}$ yazalım. Bu takdirde $\varepsilon > 0$ ve $x_0 \in [-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ dır. (a)

dan dolayı, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ fonksiyon serisi $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ kapalı aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için ve her $x \in [-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ için $f_n(x) = c_n x^n$ şeklinde tanımlanan f_n fonksiyonu, $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli olduğundan ve sürekli fonksiyonların serisinin düzgün yakınsadığı fonksiyon da sürekli

olacağından f fonksiyonu $]-R+\varepsilon, R+\varepsilon[$ aralığında süreklidir dolayısıyla da $x_0 \in [-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ noktasında süreklidir. x_0 elemanı $]-R, R[$ nin herhangi bir elemanı olarak alındığından, f fonksiyonu $]-R, R[$ nin her noktasında süreklidir, yani f fonksiyonu $]-R, R[$ aralığında süreklidir.

(c) f fonksiyonunun $]-R, R[$ aralığında türevlenebilir olduğunu göstermek için herhangi bir $x_0 \in]-R, R[$ alalım. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olduğundan,

$$3) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{nc_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n|c_n|}$$

$$= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n \sqrt[n]{|c_n|}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

olacak ve dolayısıyla, $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı,

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|nc_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = R \text{ dir. O halde her } x \in]-R, R[\text{ için}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ fonksiyon serisi yakınsaktır ve (a) dan dolayı, her $\varepsilon > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ fonksiyon

serisi $]-R+\varepsilon, R-\varepsilon[$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. Şimdi f fonksiyonunun x_0 noktasında

türevlenebilir olduğunu elde edebiliriz. $\varepsilon = \frac{R - |x_0|}{2}$ yazalım. Bu ε sayısı pozitiftir ve

$x_0 \in [-R+\varepsilon, -\varepsilon]$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ fonksiyon serisi $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ için diyelim ki, $z = 0$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n 0^n = c_0 = f(0) \text{ dir, dolayısıyla, her } x \in [-R+\varepsilon, R-\varepsilon] \text{ için } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ ile}$$

tanımlanan f fonksiyonu $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ aralığında türevlenebilirdir ve her $x \in [-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ için

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

dir. $x_0 \in [-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ olduğundan

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \text{ dir.}$$

Her $x \in]-R, R[$ için $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

serisi yakınsak olacak şekilde sabit bir R sayısı bulunsun ve $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ yazalım. Bu

takdirde f fonksiyonunun $] -R, R[$ de her mertebeden türevi vardır ve her $x \in] -R, R[$ için

$$f^{(k)}(x) = \sum n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)c_n x^{n-k} \quad (\text{her } k \in \mathbb{N})$$

dır ve özel olarak,

$$f^{(k)}(0) = k!c_k \quad (k=1,2,\dots,n, \dots) \text{ dir.}$$

İspat : Yukarıdaki teoremi $f, f', f'', \dots, f^{(k-1)}$ fonksiyonlarına arka arkaya uygularsak (4) eşitliğini elde ederiz ve $x=0$ yazarsak da (4) dan (5) eşitliğini elde ederiz.

(5) formülü, f fonksiyonunun ve f ile f' nin türevlerinin bir tek noktadaki değerleri cinsinden yazılabileceğini göstermektedir, ancak, elde edilen serinin f fonksiyonunun $x=0$ için yakınsak olması gerekir, aksi halde f fonksiyonuna eşit yazılamaz.

$$\textbf{ÖRNEK 3.1.5.} \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu göz önüne alalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

olduğundan, $f'(0) = 0$ dır.

Benzer şekilde $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ için $f^{(k)}(0) = 0$ bulunur.

Ancak $x \neq 0$ için

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0$$

dır, dolayısıyla f fonksiyonu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ serisine eşit değildir.

TEOREM 3.1.2. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sayı serisi yakınsak ise, her $x \in]-1, 1[$ için $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ kuvvet serisi

yakınsaktır ve her $x \in]-1, 1[$ için $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ yazarsak,

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

dir.

İspat : Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = c_0 + c_1 + \dots + c_{n-1} + c_n$ ve $s_{-1} = 0$ yazalım. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sayı serisi

yakınsak olduğundan, (s_n) kısmi toplamlar dizisi yakınsak ve her yakınsak dizi sınırlı olacağı için de (s_n) dizisi sınırlı sınırlıdır yani her $n \in \mathbb{N}$ için $|s_n| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır. böylece her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in]-1, 1[$ için

$$|s_n x^n| = |s_n| |x^n| = |s_n| |x|^n \leq K |x|^n$$

olduğundan, her $x \in]-1, 1[$ için $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n K$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} |s_n x^n|$ yakınsak

dolayısıyla, $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ serisi her $x \in]-1, 1[$ için yakınsaktır. Ayrıca yakınsak her serinin genel

terim dizisi sıfıra yakınsak olacağından ya da her $m \in \mathbb{N}$ için her $x \in]-1, 1[$ için

$$0 \leq |s_m x^m| = |s_m| |x^m| \leq K |x^m|$$

eşitsizliğinden ve $\lim_{m \rightarrow \infty} |x^m| = 0$ olmasından dolayı $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m x^m = 0$ bulunur. Diğer taraftan,

her $m \in \mathbb{N}$ için her $x \in]-1, 1[$ için

$$m = \sum_{n=0}^m c_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m$$

olduğundan, $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ elde edilir. Böylece her $x \in]-1, 1[$ için

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsak olduğunu elde etmiş olduk. Her $x \in]-1, 1[$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^m c_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

yazalım. Şimdi $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ olduğunu göstereceğiz. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = s$ yazalım. O halde

$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = s$ olduğunu ispatlamalıyız. Bunu yapmak için herhangi bir ε pozitif sayısı

alalım. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ olduğundan, $\frac{\varepsilon}{2}$ pozitif sayısı için $n \geq n_0$ olduğunda $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak

şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) = 0$ olduğundan, $\frac{\varepsilon}{2}$ pozitif sayısı için $1 > x > 1-\delta$ olduğunda

$1-x < \frac{\varepsilon}{2 \sum_{n=0}^{n_0} |s_n - s|}$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ özelliğini sağlayan bir δ pozitif sayısı vardır. Burada

$\sum_{n=0}^{n_0} |s_n - s| > 0$ kabul ediyoruz, çünkü, aksi halde durum aşıkâr olur. $|x| < 1$ için $(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1$

olduğundan dolayı, $1 > x > 1-\delta$ olduğunda

$$|f(x) - s| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - s \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. O halde $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ dir.

3.2. Cauchy – Hadamard Teoremi

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ kuvvet serisi verilsin. Ayrıca,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = L \text{ olsun. Eğer,}$$

$1 - |x-a|L < 1$ ise seri yakınsaktır. Bu durumda,

a) $L \neq 0$ ise yakınsaklık yarıçapı $R = \frac{1}{L}$,

b) $L = 0$ ise yakınsaklık yarıçapı $R = +\infty$,

c) $L = +\infty$ ise yakınsaklık yarıçapı $R = 0$ olacaktır.

2- $|x - a| \cdot L > 1$ ise seri ıraksaktır.

3- $|x - a| \cdot L = 1$ ise şüpheli durum vardır. Bu durumda serinin yakınsak mı, ıraksak mı olduğunu denemek gerekir.

İspat : $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k(x-a)^k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} |x-a| \cdot \sqrt[k]{|c_k|}$
 $= |x-a| \cdot L$ olur. O halde,

$|x-a| \cdot L < 1$ ise $\sum c_k(x-a)^k$ serisi yakınsaktır.

a) Eğer $L \neq 0$ ise, seri $|x-a| < \frac{1}{L}$ için yakınsak olacağından yakınsaklık yarıçapı $R = \frac{1}{L}$ dir. Yakınsaklık aralığı $|x-a| < R$ dir.

b) Eğer $L = 0$ ise, $|x-a| \cdot 0 < 1$ eşitsizliği her x için gerçekleştiğinden, $R = +\infty$ alınacak ve yakınsaklık aralığı $(-\infty, +\infty)$ dır.

c) $L = +\infty$ ise yakınsaklık yarıçapı $R = 0$ alınır. Bu durumda seri sadece $x=a$ için yakınsaktır.

UYARI: $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = L$ olduğunda $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = L$ olacaktır.

O halde,

1) $L \neq 0$ ise, $R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right|}$

2) $L = 0$ ise $R = +\infty$

alınacaktır. Ayrıca eğer,

$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = L$ veya $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = L$ limitleri mevcutsa ve de

1) $L \neq 0$ ise $R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right|}$ ya da $R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$

2) $L = 0$ ise $R = +\infty$ alınacaktır.

ÖRNEK 3.2.1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ serisini,

a) yakınsaklık aralığını,

b) yakınsaklık yarıçapını bulalım.

$$a) \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{k}{x^k} \right| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^k \cdot x}{k+1} \cdot \frac{k}{x^k} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} |x| \cdot \frac{k}{k+1} = |x| \text{ bulunur.}$$

Oran testinden eğer,

1) $|x| < 1$ yani $-1 < x < 1$ ise seri yakınsak,

2) $|x| > 1$ için seri ıraksak,

3) $|x| = 1$ yani $x = \pm 1$ ise şüpheli durum

Şimdi şüpheli durumu inceleyelim:

$x = 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

$x = -1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \Rightarrow \text{seri yakınsak}$$

O halde,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \text{ serisi } -1 \leq x < 1 \text{ için yakınsaktır.}$$

Yakınsaklık aralığı $[-1, 1)$ aralığıdır.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ serisinde $c_k = \frac{1}{k}$ dır.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{1} \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1 = L$$

$$L = 1 \text{ ise } R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1 \text{ dir.}$$

ÖRNEK 3.2.2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}$ serisinin, yakınsaklık yarıçapı $R = \sqrt{3}$ dir.

a) yakınsaklık yarıçapını,

b) yakınsaklık aralığını bulalım.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!}$ serisinde $c_k = \frac{1}{k!}$ dir.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{1} \right| = \sqrt{3} \text{ ve } x = -\sqrt{3} \text{ için şüpheli durum}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(k+1) \cdot k!} \cdot k! \right|$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 = L$$

$L = 0$ ise $R = +\infty$ dur.

O halde, $\forall x \in \mathbb{R}$ için yakınsak yani her yerde yakınsaklık aralığı $(-\infty, +\infty)$ dur.

ÖRNEK 3.2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulalım.

Bu seride " x^{2n} " olduğundan bu soruda daha önceki örneklerdeki yöntemi uygulayamayız.

I. YOL: $a_n = \frac{x^{2n}}{3^n}$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2(n+1)}}{3^{(n+1)}} \cdot \frac{3^n}{x^{2n}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{x^{2n}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n} \cdot x^2}{3^n \cdot 3} \cdot \frac{3^n}{x^{2n}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2}{3} \right| = \frac{x^2}{3} \quad \text{bulunur.}$$

Oran testinden eğer,

$$1) \frac{x^2}{3} < 1 \quad \text{yani, } x^2 < 3$$

$|x| < \sqrt{3}$ için seri yakınsaktır. O halde, yakınsaklık yarıçapı $R = \sqrt{3}$ dür.

$$2) \frac{x^2}{3} > 1 \quad \text{ise seri ıraksaktır.}$$

$$3) \frac{x^2}{3} = 1 \quad \text{ise } x^2 = 3 \quad \text{için şüpheli durum}$$

Şimdi şüpheli durumu inceleyelim :

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}, \quad x = \sqrt{3} \quad \text{ve} \quad x = -\sqrt{3} \quad \text{için şüpheli durum}$$

$x = \sqrt{3}$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

$x = -\sqrt{3}$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

O halde yakınsaklık aralığı $|x| < \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ den $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ dür.

II. YOL : Şimdi verilen seri düzenleyelim, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{3} \right)^n$ geometrik serisi,

$$i) \left| \frac{x^2}{3} \right| < 1 \quad \text{için yakınsak,}$$

$$ii) \left| \frac{x^2}{3} \right| \geq 1 \quad \text{için ıraksaktır.}$$

$$\frac{x^2}{3} < 1 \Leftrightarrow x^2 < 3 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{3} \Rightarrow \text{Yakınsaklık aralığı } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

III. YOL: Verilen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^6}{27} + \dots$$

serisinin katsayıları

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{3^n}, & k = 2n \\ 0, & k = 2n-1 \end{cases}$$

olup çift indisli terimler için,

$$c_{2n} = \frac{1}{3^n} \Rightarrow c_n = \frac{1}{3^{n/2}} \text{ dir.}$$

Bu durumda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^{n/2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ve dolayısıyla $R = \sqrt{3}$ dür. O halde verilen seri $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ aralığında yakınsaktır.

Şimdi uç noktalarda yakınsaklık durumunu inceleyelim :

$x = \sqrt{3}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

$x = -\sqrt{3}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sqrt{3})^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

O halde, yakınsaklık aralığı $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ aralığıdır.

ÖRNEK: 3.2.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} \cdot (x-3)^n$ serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulalım.

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 3^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n \cdot \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3} = L$$

$$L = \frac{1}{3} \text{ ise } R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \text{ yakınsaklık yarıçapıdır.}$$

O halde seri,

$$1) |x - 3| < 3 \text{ yani } -3 < x - 3 < 3 \Rightarrow 0 < x < 6 \text{ için seri yakınsak,}$$

$$2) |x - 3| > 3 \text{ için seri ıraksak,}$$

$$3) |x - 3| = 3 \text{ yani } x - 3 = \pm 3 \text{ için şüpheli durum}$$

Şimdi şüpheli durumu inceleyelim :

$$x - 3 = 3 \text{ ise,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} \cdot (x - 3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} \cdot 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \text{seri yakınsak}$$

$$x - 3 = -3 \text{ ise,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} \cdot (x - 3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} \cdot (-3)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n \cdot 3^n}{n \cdot 3^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

O halde, yakınsaklık aralığı,

$$\Rightarrow -3 < x - 3 \leq 3$$

$$\Rightarrow 0 < x \leq 6 \Rightarrow (0, 6] \text{ aralığıdır.}$$

ÖRNEK 3.2.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n) \cdot x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı yakınsaklık aralığı

bulalım.

$$c_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1}}{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 - 2^{n+2}}{1 - 2} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 - 2^{n+2}}{1 - 2^{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n+2} - 1 \right)}{\left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right)} = 2 = L$$

$L=2$ ise $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$ yakınsaklık yarıçapıdır.

O halde seri,

1) $|x| < \frac{1}{2}$ yani $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ için yakınsak,

2) $|x| > \frac{1}{2}$ için seri ıraksak,

3) $|x| = \frac{1}{2}$ yani $|x| = \pm \frac{1}{2}$ için şüpheli durum

Şimdi şüpheli durumu inceleyelim:

$x = \frac{1}{2}$ ise,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n) \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)}_{a_n} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{2^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^{n+1}}{2^n} = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ ise}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n) \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n)}_{b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

$\Rightarrow$ seri ıraksak

O halde yakınsaklık aralığı $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ aralığıdır.

TEOREM 3.3. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (x - a)^k$ kuvvet serisini yakınsak kılan x ler kümesi ya $(-\infty, +\infty)$ ya da

$(a-R, a+R)$, $(a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$, $[a-R, a+R]$ aralıklarından biridir. Eğer $R=0$ ise $[-a, a] = \{a\}$ (dejenere olmuş aralık) tır.

3.3. Kuvvet Serilerinin Türev ve İntegrali

Bir kuvvet serisinin toplamı, yakınsaklık aralığında

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k$$

ile verilen bir f fonksiyonu tanımlar. Bu fonksiyon $\left(\sum_{k=0}^n c_k (x - a)^k\right)$ polinom dizisinin limiti

olduğundan polinomların sahip olduğu birçok özelliğe sahiptir. Bu özelliklerin varlığı, serinin düzgün yakınsak olmasının sonucudur.

TEOREM 3.3.1.

$\sum_{k=0}^n c_k (x - a)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $(a-R, a+R)$ olsun. Bu kuvvet serisi

$(a-R, a+R)$ tarafından içerilen her kapalı alt aralıkta düzgün yakınsaktır.

İspat: $[c,d] \subset (a-R, a+R)$ olsun. O halde,

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ kuvvet serisi $x = c$ ve $x = d$ de yakınsaktır.

Şimdi,

$$M_k = \begin{cases} |c_k (d-a)^k|, & |c-a| \leq |d-a| \text{ ise} \\ |c_k (c-a)^k|, & |c-a| > |d-a| \end{cases} \text{ tanımlayalım.}$$

$\forall x \in [c,d]$ için $|c_k (x-a)^k| \leq M_k$ olup $\sum M_k$ serisi yakınsaktır. Weierstrass kriterinden,

$\sum c_k (x-a)^k$ serisi $[c,d]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

TEOREM 3.3.2. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $(a-R, a+R)$ olsun.

$\forall x \in (a-R, a+R)$ için,

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = f(x)$ olsun. f fonksiyonu $[c,d] \subset (a-R, a+R)$ özellikli bir $[c,d]$ aralığında

integrallenebilirdir ve

$$\int_c^d \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\int_c^d (x-a)^k dx \right)$$

yazılabilir.

İspat : $\forall k$ için $f_k = c_k (x-a)^k$ ifadesi $(a-R, a+R)$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ kuvvet serisi $[c, d] \subset (a-R, a+R)$ özelliğine sahip $[c,d]$ aralığında düzgün

yakınsaktır. O halde, f fonksiyonu her $x_0 \in (a-R, a+R)$ aralığında süreklidir. Dolayısıyla yakınsaklık aralığında süreklidir. Sürekli her fonksiyon integrallenebilir olduğundan f

integrallenebilirdir. O halde, $\int_c^d \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\int_c^d (x-a)^k dx \right)$

yazılabilir.

ÖRNEK 3.3.1. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^k \dots$ serisi $|x| < 1$ yakınsak ve toplamı $\frac{1}{1-x}$ dir.

Yani $|x| < 1$ için ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

dir. Bundan yararlanarak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} \text{ serisinin toplamını hesaplayalım :}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ kuvvet serisi } \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ aralığında düzgün yakınsak olmalıdır.}$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ dir.}$$

Her iki tarafın integralini alalım:

$$\int_0^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1/2} x^k dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} \right) \Big|_0^{1/2} = -\ln(1-x) \Big|_0^{1/2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1} \right) = -\underbrace{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}_{(\ln 1 - \ln 2)} + \underbrace{\ln(1)}_0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{k+1}) \cdot (k+1)} = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot k} = \ln 2$$

bulunur.

TEOREM 3.3.3. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ kuvvet serisi ile bunun terimlerinin türevinden oluşan

$\sum_{k=0}^{\infty} k.c_k (x-a)^{k-1}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapları aynıdır.

İspat: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R_1 ,

$\sum_{k=0}^{\infty} k.c_k (x-a)^{k-1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R_2 olsun.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = L_1 \neq 0 \Rightarrow R_1 = \frac{1}{L_1} \text{ dir.}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k \cdot |c_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{|c_k|}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = L_2 \text{ bulunur. O halde, } L_1 = L_2 \text{ yazabiliriz. Buradan, } R_2 = \frac{1}{L_2} = \frac{1}{L_1} \text{ dir. Bu}$$

durumda, $R_1 = R_2$ dir.

Eğer,

$$L_1 = 0 \Rightarrow L_2 = 0 \Rightarrow R_1 = R_2 = +\infty \quad \text{ve}$$

$$L_1 = +\infty \Rightarrow L_2 = +\infty \Rightarrow R_1 = R_2 = 0 \quad \text{olur.}$$

TEOREM 3.3.4. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R olsun. Ayrıca,

$\forall x \in (a-R, a+R)$ için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = f(x)$$

f fonksiyonu $(a-R, a+R)$ aralığında f türevli olup,

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k (x-a)^k)'$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k.c_k (x-a)^{k-1} \quad \text{dır.}$$

İspat : $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ serisi türevlenebilirdir. O halde, bu seri ile $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^{k-1}$ serisinin

yakınsaklık yarıçapı aynıdır. Bu da R dir. Her iki seri de $(a-R, a+R)$ nin her bir kapalı alt aralığında gerçekleştiğinden ve de $(a-R, a+R)$ nin her bir x elamanı böyle bir kapalı alt aralığa ait olacağından

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \right)' \quad \text{İçin her iki seride yakınsak}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (c_k (x-a)^k)' \quad \text{İçin her iki seride de şüpheli durum}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot c_k (x-a)^{k-1} \quad \text{ifadesi gerçekleşir.}$$

Uyarı : Bir kuvvet serisiyle bunun terimlerinin türevinden oluşan kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapları aynı olmasına rağmen yakınsaklık aralıkları eşit olmayabilir.

$$\textbf{ÖRNEK 3.3.2.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \quad (3.3.1)$$

ve bu serinin terimlerinin türevlerinden oluşan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k} \quad (3.3.2)$$

serisinin yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık aralıklarını bulalım.

(3.3.1) nolu seri için,

$$c_k = \frac{1}{k^2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{1} \right| = 1 = L$$

(3.3.2) nolu seri için,

$$a_k = \frac{1}{k}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{1} \right| = 1 = L$$

O halde , $R_2 = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$ bulunur.

Buradan,

$R_1 = R_2$ yazılabilir.

Şimdi yakınsaklık aralıklarını inceleyelim:

1) $|x| < 1$ yani $-1 < x < 1$ için her iki seride yakınsak

2) $|x| > 1$ için her iki seride ıraksak

3) $|x| = 1$ için her iki seride de şüpheli durum

(3.3.1) nolu seri için şüpheli durumu inceleyelim:

$x = 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \Rightarrow \text{seri yakınsak}$$

$x = -1$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \Rightarrow \text{seri yakınsak}$$

O halde, (3.3.1) serisi için yakınsaklık aralığı $[-1, +1]$ dir.

(3.3.2) serisi için şüpheli durumu inceleyelim:

$x = 1$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \Rightarrow \text{seri ıraksak}$$

$x = -1$ için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \Rightarrow \text{seri yakınsak}$$

O halde, (3.3.2) serisi için yakınsaklık aralığı $[-1, +1)$ dır.

Görülüyor ki (3.3.1) ve (3.3.2) serisinin yakınsaklık yarıçapları eşit olduğu halde yakınsaklık aralıkları eşit değildir.

ÖRNEK 3.3.3. a ve b pozitif reel sayılar olduğuna göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$ yakınsaklık yarıçapını

bulalım.

$0 < b < a$ olsun.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{a^{n+1} + b^{n+1}} \cdot \frac{a^n + b^n}{1} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^n \right)}{a^{n+1} \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^{n+1} \right)} = \frac{1}{a} = L \end{aligned}$$

Buradan, $R = \frac{1}{L}$ ise $R = a$ olur.

$0 < a < b$ olsun.

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n \left(1 + \left(\frac{a}{b} \right)^n \right)}{b^{n+1} \left(1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{n+1} \right)} = \frac{1}{b} = L \end{aligned}$$

ÖRNEK 3.3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ serisinin toplamını bulalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1 \text{ ve } R = 1 \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

O halde,

$(-1, 1)$ yakınsaklık aralığında serinin terim terime türevi alınabilir.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

Şimdi her iki tarafı x ile çarpalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$x = \frac{1}{5} \in (-1, 1) \text{ alırsak,}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} = \frac{\frac{1}{5}}{\left(1 - \frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{16} = \frac{5}{16}$$

bulunur.

ÖRNEK 3.3.5. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{n \cdot 5^n}$ serisinin toplamını bulalım

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \text{ ve } R = 1 \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

Teoremden, $(0-1, 0+1) = (-1, 1)$ aralığının kapsadığı herhangi bir kapalı aralıkta $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serisi düzgün yakınsaktır.

Kapalı aralığı $\left[0, \frac{1}{5}\right] \subset (-1, 1)$ alalım. O halde seri, $\left[0, \frac{1}{5}\right]$ kapalı aralığında düzgün yakınsak olup bu aralıkta serinin terim terime integralini alalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\int_0^{1/5} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) dx = \int_0^{1/5} \left(\frac{1}{1-x} \right) dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{1/5} x^n dx \right) = -\ln(1-x) \Big|_0^{1/5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{1/5} \right) = \ln \left(\frac{5}{4} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{n+1} = \ln \left(\frac{5}{4} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot 5^{n+1}} = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n} = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

bulunur.

fonksiyonlarının x in verilmiş bir değerine karşılık olan değerini doğrudan doğruya hesaplamak çok zordur.

Aynı şekilde olasılık teorisinde çok karışık olan $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ integrali, adi fonksiyonlar yardımıyla hesaplanamaz.

Halbuki fonksiyonları çok daha basit şekillere sokmak suretiyle, değerlerini küçük yaklaşıklıkla bu ifadelerden hesaplamak mümkündür. Fonksiyonların seriyeye açılımı bu yollardan bir tanesidir. Bu sayede $\sin x$, $\cos x$, $\lg x$ i veren trigonometrik oran tabloları gibi birçok tabloların meydana getirilmesi mümkün olur.

Bir fonksiyon, bağımsız değişken yakınsaklık aralığındaki değerleri için, bir kuvvet serisi ile gösterilebilir. Bağımsız değişkenin verilen bir değeri için, fonksiyonun yaklaşık bir değeri, serinin bastan az sayıda terimlerini kullanarak hesaplanabilir.

Fonksiyonların seriyeye açılmaları Maclaurin ve Taylor serileri adı ile anılan iki tür seri yardımıyla yapılır.

4.1 Maclaurin Serisi

Maclaurin XVII. yüzyılda yaşamış bir matematikçi olup, bir fonksiyonun, bağımsız değişkenin artan kuvvetlerine göre düzenlenmiş bir tam çok terimli ile gösterilmesi fikrini ortaya atmıştır.

Bu şekildeki bir ifadeden yapılacak hesaplama, hiç şüphesiz çok kolay olacaktır. Ayrıca x in verilmiş bir değerinden fonksiyonun değerini hesaplamak için ax^n şeklindeki terimleri hesaplayıp toplamak gerekecektir ki bu da en basit bir hesaplama şeklidir.

Bunun mümkün olabilmesi için, çok terimliğin terimleri, namlak değer bakımından, gittikçe küçülmeli ve toplamaları sonsuz olmamalı yani seri yakınsak olmalıdır.

Maclaurin serisini elde etmek üzere $f(x)$ fonksiyonunu

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \quad (4.1.1)$$

4. FONKSİYONLARIN SERİYE AÇILIMI

$y = f(x)$ az veya çok karışık bir fonksiyon olsun. x in verilmiş farklı nümerik değerleri için $f(x)$ in değerlerini hesaplamak, genel olarak zahmetli ve çok uzun olur. Örneğin

$$y = \frac{1}{a}(e^{x/a} + e^{-x/a}); y = \text{Arctg} \frac{1}{1+e^x}; y = \sqrt{1 + \sin^2 x}$$

fonksiyonlarının x in verilmiş bir değerine karşılık olan değerini doğrudan doğruya hesaplamak çok zordur.

Aynı şekilde olasılık teorisinde çok karşılaşılan $\int_0^a e^{-x^2} dx$ integrali, adi fonsiyonlar yardımıyla hesaplanamaz.

Halbuki fonksiyonları çok daha basit şekillere sokmak suretiyle, değerlerini küçük yaklaşıklıklarla bu ifadelerden hesaplamak mümkündür. Fonksiyonların seriye açılımı bu yollardan bir tanesidir. Bu sayede $\sin x$, $\cos x$, $\text{tg } x$ i veren tirigonometrik oran tabloları gibi birçok tabloların meydana getirilmesi mümkün olur.

Bir fonksiyon, bağımsız değişken yakınsaklık aralığındaki değerleri için, bir kuvvet serisi ile gösterilebilir. Bağımsız değişkenin verilen bir değeri için, fonksiyonun yaklaşık bir değeri, serinin baştan az sayıda terimlerini kullanarak hesaplanabilir.

Fonksiyonların seriye açılımları Maclaurin ve Taylor serileri adı ile anılan iki tür seri yardımıyla yapılır.

4.1 Maclaurin Serisi

Maclaurin XVII. yüzyılda yaşamış bir matematikçi olup, bir fonksiyonun, bağımsız değişkenin artan kuvvetlerine göre düzenlenmiş bir tam çok terimli ile gösterilmesi fikrini ortaya atmıştır.

Bu şekildeki bir ifadeden yapılacak hesaplama, hiç şüphesiz çok kolay olacaktır. Ayrıca x in verilmiş bir değerinden fonksiyonun değerini hesaplamak için ax^m şeklindeki terimleri hesaplayıp toplamak gerekecektir ki bu da en basit bir hesaplama şeklidir.

Bunun mümkün olabilmesi için, çok terimlinin terimleri, mutlak değer bakımından, gittikçe küçülmeli ve toplamaları sonsuz olmamalı yani seri yakınsak olmalıdır.

Maclaurin serisini elde etmek üzere $f(x)$ fonksiyonunu

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \quad (4.1.1)$$

şeklinde ifade etmek isteyelim. Şimdi de bu açılımın mümkün olabilmesi için a_i lerin neler olduğunu araştıralım. Bunun için de ifadenin kendisini ve türevlerini yazalım.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

$$f''(x) = 1.2a_2 + 2.3a_3x + 3.4a_4x^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 1.2.3a_3 + 2.3.4a_4x + \dots$$

$$f^{IV}(x) = 1.2.3.4a_4 + \dots$$

Şimdi de $x=0$ için bu eşitliklerin alacağı şekilleri elde edelim.

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 1.2a_2$$

$$f'''(0) = 1.2.3a_3$$

$$f^{IV}(0) = 1.2.3.4a_4$$

Bunlardan da a_i katsayıları çözülürse

$$a_0 = f(0)$$

$$a_1 = \frac{1}{1}f'(0) = \frac{1}{1!}f'(0)$$

$$a_2 = \frac{1}{1.2}f''(0) = \frac{1}{2!}f''(0)$$

$$a_3 = \frac{1}{1.2.3}f'''(0) = \frac{1}{3!}f'''(0)$$

$$a_4 = \frac{1}{1.2.3.4}f^{IV}(0) = \frac{1}{4!}f^{IV}(0)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots$$

olarak

bulunur.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

bulunur.

$$f(x) = \cos x \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \quad f'''(0) = 0$$

... ..

$$\text{olarak } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \pm \dots$$

bulunur. Bu seri x in her değeri için $\sin x$ i temsil eder.

ÖRNEK 4.1.3. $y = \cos x$ i seriye açınız.

$$f(x) = \cos x \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \sin x \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(x) = \cos x \quad f^{IV}(0) = 1$$

... ..

$$\text{olarak } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \pm \dots$$

bulunur. Bu seri x in her değeri için $\cos x$ i temsil eder.

ÖRNEK 4.1.4. $y = \sin^2 x$ i seriye açınız.

$$f(x) = \sin^2 x \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = 2 \sin 2x \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2 \cos 2x \quad f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = -4 \sin 2x \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(x) = -8 \cos 2x \quad f^{IV}(0) = -8$$

... ..

olarak

$$\sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{8x^4}{4!} + \frac{32x^6}{6!} - \frac{128x^8}{8!} \dots \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 4.1.5. $y = \text{Arcsin } x$ fonksiyonunu seriye açınız.

$$f(x) = \text{Arcsin } x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = x(1-x^2)^{-3/2}$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = (1-x^2)^{-3/2} + 3x^2(1-x^2)^{-5/2}$$

$$f'''(0) = 1$$

.....

olarak

$$\text{Arcsin } x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

bulunur.

ÖRNEK 4.1.6. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ yi seriye açınız.

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{1/2}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = x(1+x^2)^{-1/2}$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (1+x^2)^{-1/2} - x^2(1+x^2)^{-3/2}$$

$$f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = -3x(1+x^2)^{-3/2} + 3x^3(1+x^2)^{-5/2}$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{(iv)}(x) = -3(1+x^2)^{-3/2} + 18x^2(1+x^2)^{-5/2} - 15x^4(1+x^2)^{-7/2}$$

$$f^{(iv)}(0) = -3$$

.....

olarak

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3x^6}{6} - \dots$$

bulunur. Bu seride x^2 yerine $-x^2$ koyarsak

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3x^6}{6} - \dots \text{ elde edilir.}$$

$|x| < 1$ halinde, bu serilerdeki x^4 lü terimden itibaren olan terimler atılarak $\sqrt{1+x^2}$ ve $\sqrt{1-x^2}$ için şu yaklaşık formüller bulunur.

$$\sqrt{1+x^2} \cong 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{1-x^2} \cong 1 - \frac{x^2}{2}$$

Bunlar yardımıyla

$$\sqrt{1,01} = \sqrt{1+(0,1)^2} = 1 + \frac{(0,1)^2}{2} = 1,005$$

$$\sqrt{0,99} = \sqrt{1-(0,1)^2} = 1 - \frac{(0,1)^2}{2} = 0,995 \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 4.1.7. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ yi seriye açınız.

$$f(x) = (1+x^2)^{-1/2} \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -x(1+x^2)^{-3/2} \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -(1+x^2)^{-3/2} + 3x^2(1+x^2)^{-5/2} \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = 9x(1+x^2)^{-5/2} - 30x^3(1+x^2)^{-7/2} \quad f'''(0) = 0$$

olarak

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \dots$$

bulunur. Bu ifadede x^2 yerine $-x^2$ konursa

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \dots$$

elde edilir.

$|x| < 1$ halinde, bunlardan

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cong 1 - \frac{x^2}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cong 1 + \frac{x^2}{2}$$

yaklaşık formülleri elde edilir.

4.2. Binom Formülü

$(a+b)^m$ veya $(a-b)^m$ in açılımını veren formülü bulmak isteyelim. Burada m i pozitif, negatif, tam veya kesirli bir sayı olarak kabul ediyoruz. Bunu elde etmek üzere $y = (a + x)^m$ fonksiyonunu Maclaurin serisine açalım.

$$\begin{aligned} f(x) &= (a+x)^m & f(0) &= a^m \\ f'(x) &= m(a+x)^{m-1} & f'(0) &= m a^{m-1} \\ f''(x) &= m(m-1)(a+x)^{m-2} & f''(0) &= m(m-1)a^{m-2} \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3} & f'''(0) &= m(m-1)(m-2)a^{m-3} \\ &\dots & & \dots \end{aligned}$$

olarak

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1!} a^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} a^{m-3}x^3 + \dots$$

bulunur. bu açılımda $x = b$ yapılırsa Newton'un Binom formülü elde edilir. Buna göre

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1!} a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} a^{m-3}b^3 + \dots$$

$(a-b)^m$ i elde etmek için yukarıdaki formülde işaretleri alternatif olarak + ve - yapmak gerekir.

m tam ve pozitif olursa açılımda $m + 1$ terim bulunur. Diğer hallerde açılımda sonsuz terim bulunur.

Açılımın herhangi bir r numaralı terimi

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-r+2)}{(r-1)!} a^{m-r+1} b^{r-1} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 4.2.1. $\sqrt{1+x}$ i seriye açınız.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$$

olarak binom açılımını uygularsak

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) x^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) x^3 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$$

ve x yerine $-x$ koyarak

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \dots$$

bulunur.

Örneğin,

$$\sqrt{0,9} = \sqrt{1-0,1} = 1 - \frac{1}{2 \cdot 10} - \frac{1}{8 \cdot 10^2} - \frac{1}{16 \cdot 10^3} - \dots$$

$$\cong 1 - 0,05 - 0,00125 - 0,00006$$

$$\cong 1 - 0,5131 \cong 0,94869$$

dir. Bu sonucun dört ondalığı doğrudur.

4.3. Taylor Serisi

$f(x)$ fonksiyonunu $x-a$ nın artan kuvvetlerine göre düzenlenmiş bir kuvvet serisi ile göstermek isteyelim.

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + b_4(x-a)^4 + \dots$$

olsun. Şimdi bu eşitliğin doğru olabilmesi için b_i katsayılarının neler olması gerektiğini araştıralım. Bunun için de yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının türevlerini eşitleyelim. Buna göre

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + b_4(x-a)^4 + \dots$$

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + 4b_4(x-a)^3 + \dots$$

$$f''(x) = 1.2b_2 + 2.3b_3(x-a) + 3.4b_4(x-a)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 1.2.3b_3 + 2.3.4b_4(x-a) + \dots$$

$$f^{IV}(x) = 1.2.3.4b_4 + \dots$$

ve bunlarda $x = a$ yapılırsa

$$f(a) = b_0$$

$$b_0 = f(a)$$

$$f'(a) = b_1$$

$$b_1 = \frac{1}{1!} f'(a)$$

$$f''(a) = 1.2b_2$$

$$b_2 = \frac{1}{2!} f''(a)$$

$$f'''(a) = 1.2.3.b_3 \quad b_3 = \frac{1}{3!}f'''(a)$$

$$f^{IV}(a) = 1.2.3.4.b_4 \quad b_4 = \frac{1}{4!}f^{IV}(a)$$

bulunur.

.....

.....

$$f^{(n)}(a) = 1.2.3.4. \dots .nb_n \quad b_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$$

.....

.....

elde edilir. Bunları $f(x)$ ifadesinde yerlerine koyarsak

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots$$

bulunur ki bu seriye de $f(x)$ in $x - a$ nın kuvvetlerine göre düzenlenmiş *Taylor Serisi* denir.

$f(x)$ fonksiyonunun böyle bir Taylor serisine açılabilmesi için $f(x)$ ve türevlerinin $x = a$ için tanımlı ve sürekli olması gerekmektedir. Taylor serisi, $f(x)$ i, x in yakınsaklık aralığındaki değerleri için temsil eder. Zorunlu olmamakla beraber Taylor serisi $f(x)$ in x in a civarındaki değerlerine karşılık olan değerlerinin hesabında kullanılmalıdır.

Yukarıda elde edilen Taylor serisinde $x = b$ yapılırsa :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots$$

ve bu seride $b = a + h$ yapılırsa:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK 4.3.1. $y = \log x$ fonksiyonunu $x - 1$ artan kuvvetlerine göre seriye açınız.

$$f(x) = \log x \quad f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -x^{-2} \quad f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = 2x^{-3} \quad f'''(1) = 2$$

$$f^{IV}(x) = -6x^{-4} \quad f^{IV}(1) = -6$$

.....

.....

olarak

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

bulunur.

ÖRNEK 4.3.2. e^x fonksiyonunu $x - 2$ nin artan kuvvetlerine göre seriye açınız.

$$f(x) = e^x \quad f(2) = e^2$$

$$f'(x) = e^x \quad f'(2) = e^2$$

... ..

olarak

$$e^x = e^2 \left[1 + \frac{x-2}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \dots \right]$$

bulunur.

ÖRNEK 4.3.3. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olarak bilindiğine göre $\sin 61^\circ$ yi hesaplayınız.

$$f(a) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad f(a+h) = \sin 61^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ radyan} \quad ; \quad h = 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ radyan}$$

ve

$$f(x) = \sin x \quad f(a) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \quad f'(a) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\sin x \quad f''(a) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad f'''(a) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

... ..

... ..

olarak

$$\sin 61^\circ = f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \left(-\frac{1}{2} \right) + \dots$$

$$= 0,866 \frac{\pi}{180} 0,5 - \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 \frac{0,866}{2} - \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \frac{0,5}{6}$$

$$\cong 0,8746$$

bulunur.

ÖRNEK 4.3.4. $\sqrt[3]{1,2}$ yi hesaplayınız.

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}, \quad a = 1, h = 0,2$$

olarak

$$f(a) = \sqrt[3]{1} = 1 \quad \text{ve} \quad f(a+h) = \sqrt[3]{1,2}$$

olur. Bunlara göre

$$f(x) = x^{1/3} \quad f(a) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \quad f'(a) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{5/3} \quad f''(a) = -\frac{2}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27} x^{-8/3} \quad f'''(a) = \frac{10}{27}$$

olup

$$\sqrt[3]{1,2} = 1 + \frac{0,2}{1!} \cdot \frac{1}{3} + \frac{(0,2)^2}{2!} \left(-\frac{2}{9} \right) + \frac{(0,2)^3}{3!} \cdot \frac{10}{27} + \dots$$

$$= 1 + 0,666 - 0,004 + \dots = 1,062$$

bulunur.

5. SERİLERLE ÇÖZÜM

Genellikle değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlere ait çözümler (Euler-Cauchy, Legendre lineer denklemi ... v.s. gibi belli şeklindeki diferansiyel denklemler hariç) bilinen elemanter fonksiyonlarla ifade edilememektedir. Söz konusu değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin hesaplanmasında, genellikle, “serilerle çözüm metodu” uygulanmaktadır.

Bu bölümde açıklanacak olan bu metotla elde edilen çözümler kuvvet serileri veya kuvvet serilerinin x in bir kuvveti ile çarpımı şeklindedir. Bu serilerin çözüm olabilmeleri için yakınsak olmaları gerekmektedir. Bu çok önemlidir. x in herhangi bir değeri için ıraksak olan bir seri x in bu değeri için bir çözüm olamaz. Bu metotla elde edilecek seri ancak yakınsaklık aralığı içindeki x değerleri için çözüm olur ve o x e karşılık olan y yi verir. Yakınsak bir seri yakınsaklık aralığı içindeki noktalarda belli bir fonksiyon tarif ettiği gibi bu fonksiyonun yaklaşık olarak hesaplanmasını da mümkün kılar.

Serilerle çözme metodu x bağımsız değişkenin reel veya kompleks olması hallerinde aynı şekilde kullanılır. Onun için şimdiye kadar olduğu gibi x i reel farz etmekle hiç bir sınırlılık yapılmış olmaz. Yalnız x kompleks ise serinin yakınsaklık bölgesi merkezi x noktası ve yarıçapı serinin yakınsaklık yarıçapı olan bir dairenin içi olur.

Bu kısımda

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (5.1)$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem göz önüne alınmaktadır. Söz konusu (5.1) numaralı diferansiyel denklemin çözümünün bulunmasında $x = a$ noktasına göre $P(x)$ ve $Q(x)$ katsayı fonksiyonlarının durumu önemli rol oynamaktadır. Şöyle ki,

1) ($x = a$) noktası civarında $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonlarının Taylor açılımları mevcutsa, söz konusu $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları $x = a$ için analitiktirler denir. Bu durumda, söz konusu $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları sürekli, tek değerli ve her mertebeden türevleri vardır. İşte böyle bir $x = a$ noktasına diferansiyel denklemin *adi noktası* denir.

Diğer taraftan $x = a$ noktası (5.1) numaralı diferansiyel denklemin adi noktası ise, söz konusu (5.1) numaralı diferansiyel denklemin çözümü belirsiz katsayılar metoduna göre hesaplanabilir.

2) Göz önüne alınan $x = a$ noktası (5.1) numaralı diferansiyel denklemin adi noktası değilse, bu noktaya *tekil (aykırı) nokta* denir. Dolayısıyla $x = a$ noktasının “tekil nokta” olması halinde aşağıda belirtilen iki şıktan biri söz konusudur;

I) $P(x)$ ve $Q(x)$ katsayı fonksiyonlarının her ikisinin de Taylor açılımı yoktur (analitik değildirler) veya

II) $P(x)$ ve $Q(x)$ katsayı fonksiyonlarından birisinin Taylor açılımı mevcut olup, diğerinin mevcut değildir. Diğer bir deyişle, $x = a$ noktası için $P(x)$ ve $Q(x)$ katsayı fonksiyonlarında (I.) veya (II.) şıktan birisinde belirtilen hususlar var ise söz konusu $x = a$ noktası (5.1) numaralı diferansiyel denklemin bir tekil noktasıdır.

Öte yandan tekil noktayı düzgün tekil nokta (regüler aykırı nokta) ve düzgün olmayan tekil nokta (regüler olmayan aykırı nokta) diye iki kısma ayırabiliriz. Tekil noktanın düzgün (regüler) olup olmadığını tayin etmek için de $x = a$ tekil noktasında

$$(x-a) P(x) \quad \text{ve} \quad (x-a)^2 Q(x)$$

şeklindeki çarpımları oluşturulur. Bu durumda,

A) Eğer her iki çarpım da analitik ise (Taylor açılımı varsa) $x = a$ noktası düzgün tekil nokta

B) Eğer söz konusu çarpımlardan birisi analitik olup diğeri analitik değilse veya her iki çarpım da analitik değilse, $x = a$ noktası düzgün olmayan tekil nokta

Diğer taraftan $x = a$ noktası (5.1) numaralı diferansiyel denklemin bir tekil noktası ise söz konusu $x = a$ tekil noktasının düzgün olup olmadığı araştırılır. Buna göre,

a) Eğer $x = a$ noktası “düzgün tekil nokta” ise (5.1) numaralı diferansiyel denklemin çözümü Frobenius metoduna göre bulunur.

b) Eğer $x = a$ noktası “düzgün olmayan tekil nokta” ise bu takdirde (5.1) numaralı diferansiyel denklemin genellikle $(x - a)$ nın kuvvetlerine göre seriye açılmış çözümleri mevcut değildir.

ÖRNEK 5.1. $y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{3}{x(x-1)^3}y = 0$

diferansiyel denkleminde (x) in değerlerine göre katsayı fonksiyonlarını inceleyelim.

Söz konusu diferansiyel denklemde

$$P(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ve} \quad Q(x) = \frac{3}{x(x-1)^3}$$

şeklinde

Burada $x = 0$ için $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de sonsuz olmaktadır. Dolayısıyla $P(x)$ ve $Q(x)$ inde Taylor açılımları yoktur. Diğer bir deyişle her ikisi de analitik değildirler. Buna göre $x = 0$ noktası bir tekil nokta

$x = 1$ için $P(x)$ fonksiyonu analitik olmasına rağmen $Q(x)$ fonksiyonu sonsuz olmaktadır. Bu bakımdan $x = 1$ noktası da bir tekil noktadır. Diğer bütün noktalar adi noktalar.

Şimdi tekil noktaların düzgün olup olmadığını araştıralım;

$x = 0$ tekil noktası için $(x-a)P(x)$ ve $(x-a)^2Q(x)$ şeklindeki çarpımlar teşkil edilerek

$$xP(x) = x \frac{2}{x} = 2$$

ve

$$x^2Q(x) = x^2 \frac{3}{x(x-1)^3} = \frac{3x}{(x-1)^3}$$

bulunur. Söz konusu çarpım fonksiyonlarının her ikisinin de $x = 0$ için analitik olduğu görülmektedir. Bu durumda $x = 0$ noktası bir düzgün tekil noktadır.

$x = 1$ tekil noktası içinde katsayıların çarpım fonksiyonları teşkil edilirse

$$(x-1)P(x) = (x-1) \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)}{x}$$

olup, söz konusu çarpım fonksiyonu $x = 1$ için analitiktir. Buna karşılık,

$$(x-1)^2Q(x) = (x-1)^2 \frac{3}{x(x-1)^3} = \frac{3}{x(x-1)}$$

çarpım fonksiyonu sonsuz olup $x = 1$ için analitik değildir. Dolayısıyla $x = 1$ noktası bir düzgün olmayan tekil noktadır.

5.1. Adi Nokta Komşuluğunda Çözüm (Taylor Serisi Yöntemi)

İkinci mertebeden lineer homogen adi diferansiyel denklemi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.1.1)$$

şeklinde yazabiliriz.

İkinci mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümü iki keyfi sabit içerir. Bu iki parametre iki şartla belirlenebilir. Bu şartlar meselâ $x=a$ iken $y = y_0$ ve $y' = y_0'$ şeklinde olabilir. Yani y_0 ve y_0' tamamen keyfi olarak verilebilir. Eğer $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $x=a$ için sürekli, bir değerli ve bu x için her mertebeden sürekli türevlere sahip iseler $x = a$ noktasında diferansiyel denklemin *adi noktası* denir. Adi olmayan bir noktaya da *aykırı nokta* diyeceğiz. O halde bir adi noktada $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının her mertebeden sürekli türevleri vardır. Taylor açılımına sahiptirler. Bu özeliği kısaca $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $x=a$ için analitiktirler diyerek ifade edebiliriz.

Bir adi nokta için (5.1.1) denkleminde y'' , y''' , ... $y^{(n)}$, türevlerinin $x = a$ için değerleri bulunabilir. (5.1.1) de $x=a$ $y=y_0$, $y'=y_0'$ yazarsak y_0'' yani y'' nün $x = a$ için değeri bulunur.

$$y_0'' = -p(a)y_0' - q(a)y_0 \quad (5.1.2)$$

Şimdi (5.1.1) in x e göre türevini alalım.

$$y''' + p(x)y'' + [p'(x) + q(x)]y' + q'(x)y = 0$$

ve $x=a$, $y=y_0$, $y' = y_0'$, $y'' = y_0''$ yazalım. Böylece y''' i elde ederiz.

$$y''' = -p(a)y_0'' - [p'(a) + q(a)]y_0' - q(a)y_0 \quad (5.1.3)$$

Diferansiyel denklemin ardışık türevlerini alıp $x=a$ koyarak $y(x)$ in bütün türevlerinin $x = a$ için değerlerini bulur ve

$$y(x) = y_0 + \frac{x-a}{1!}y_0' + \frac{(x-a)^2}{2!}y_0'' + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}y_0^{(n)} + \dots \quad (5.1.4)$$

Taylor serisini buluruz. Bu seri yarın sak bulunduğu x değerleri için diferansiyel denklemin bir çözümüdür. (5.1.2) ve (5.1.3) bağıntılarında görüldüğü gibi serinin terimlerinden bir kısmı y_0 a ve ötekiler y_0' bağlı olup

$$y(x) = y_0 S_1 + y_0' S_2 \quad (5.1.5)$$

şeklinde yazılabilir. y_0 ve y_0' keyfi olarak verilmiş iki değer, iki keyfi sabit S_1 ve S_2 , $x - a$ nın kuvvet serileridir. O halde (5.1.5) genel çözümüdür.

ÖRNEK 5.1.1 $y'' = xy' + 2y$

denklemini ele alalım. Burada $p(x)=-x$, $q(x)=-2$ olup x in bütün sonlu değerlerini için sürekli, bir değerli ve her mertebeden türevlere sahiptirler. Gerçekten $-x$ in ikinci ve -2 nin birinci ve daha yüksek mertebeden bütün türevler sıfırdır. $x=0$ denkleminin bir adi noktasıdır. Herhangi bir $x=a$ noktası $x-a=\xi$ transformasyonu ile yeni koordinatlarca başlangıç noktasına getirilebilir.

Denklemin $x=0$ iken $y=y_0$, $y' = y_0'$ olan bir çözümünü bulmak istiyoruz. Denklem $x=0$ için

$$y_0'' = 2y_0 \quad (i)$$

ve onun birinci türevi ($y''' = xy'' + 3y'$) yine $x=0$ için

$$y_0''' = 3y_0' \quad (ii)$$

ikinci türevi ($y^{(4)} = xy''' + 4y''$)

$$y_0^{(4)} = 4y_0'' \quad (iii)$$

üçüncü türevi ($y^{(5)} = xy^{(4)} + 5y'''$)

$$y_5^{(5)} = 5y_0''' \quad (\text{iv})$$

verir. Böylece devam ederek

$$y_0^{(n)} = ny_0^{(n-2)} \quad (\text{v})$$

genel bağıntısını buluruz. Çift mertebeden türevlerin y_0 a ve tek mertebeden türevlerin y_0' a bağlı olduklarını görüyoruz. n çift ise (v) den

$$y_0^{(2n)} = 2ny_0^{(2n-2)}$$

$$= 2n(2n-2)y_0^{(2n-4)}$$

$$= 2n(2n-2)(2n-4) \dots 6.4.2y_0$$

ve n tek ise n yerine $2n-1$ alarak

$$y_0^{(2n-1)} = (2n-1)(2n-3) \dots 5.3 y_0'$$

buluruz. Bu değerler

$$y = y_0 + \frac{x}{1!} y_0' + \frac{x^2}{2!} y_0'' + \dots + \frac{x^n}{n!} y_0^{(n)} + \dots$$

Taylor serisinde yerlerine konursa

$$y = y_0 + xy_0' \frac{x^2}{2!} 2y_0 + \frac{x^3}{3!} 3y_0' + \frac{x^4}{4!} 4.2y_0 + \frac{x^5}{5!} 5.3y_0' + \dots$$

$$= y_0 \left(1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{3.5} + \frac{x^8}{3.5.7} + \dots \right) + xy_0' \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6} + \dots \right) = y_0 S_1 + xy_0' S_2$$

genel çözümünü bulmuş oluruz. Serilerin yakınsaklık aralığı $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ ile bulunur. Burada

her iki serisinde x in bütün değerleri için yakınsak olduğu kolayca gerçekleştirilebilir.

ÖRNEK 5.1.2 Taylor serisi yöntemini kullanarak

$$y'' + x^2 y' + y = \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

başlangıç değer probleminin $x_0=0$ noktasındaki seri çözümünün ilk beş terimini bulunuz.

$x_0=0$ noktası verilen denklemin bir adi noktasıdır. Verilen diferansiyel denklem

$$y''(x) = -x^2 y' - y + \sin x \quad (5.1.6)$$

şeklinde düzenlenirse ve $y(0)=y'(0)=1$ başlangıç koşulları kullanılırsa $y''(0) = -1$ böylece

$$y_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \text{ eşitliğinden}$$

$$y_2 = \frac{y''(0)}{2!} = -\frac{1}{2}$$

olduğu görülür. (5.1.6) denkleminin türevi alınırsa

$$y'''(x) = -2xy' - x^2y'' - y' + \cos x$$

bulunur. Başlangıç koşulu olan $y'(0) = 1$ kullanılırsa

$$y'''(0) = -y'(0) + 1 = 0$$

ve

$$y_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = 0$$

olarak hesaplanır. (5.1.6) denkleminin tekrar türevi alınırsa

$$y^{(4)}(x) = -2y' - 4xy'' - x^2y''' - y'' - \sin x$$

ve

$$y^{(4)}(0) = -2y'(0) - y''(0) = -2 + 1 = -1$$

olur ki buradan

$$y_4 = \frac{y^{(4)}(0)}{4!} = \frac{1}{24}$$

bulunur. Sonuç olarak y_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) değerleri

$$y(x) = y_0 + y_1x + y_2x^2 + y_3x^3 + y_4x^4 + \dots$$

eşitliğinde yerine yazılırsa ilk beş terimi bulunan

$$y(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

çözümü elde edilir.

ÖRNEK 5.1.3. Taylor serisi yöntemini kullanarak

$$y'' + \frac{1}{x-1}y = x^2 \quad (5.1.9)$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünün $x_0 = 0$ merkezli seri açılımının ilk beş terimini bulunuz.

Verilen denklem ikinci mertebe olduğundan ve başlangıç koşulları verilmediğinden

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1$$

alınır. Verilen diferansiyel denklemden y'' çözülürse

$$y'' + \frac{1}{x-1}y + x^2 \quad (5.1.10)$$

ve buradan da

$$y''(0) = y(0) = c_0 \quad (5.1.11.)$$

bulunur. (5.1.10) denkleminin türevi alınırsa

$$y'''(x) = \frac{y}{(x-1)^2} - \frac{y'}{(x-1)} + 2x \quad (5.1.12)$$

ve böylece

$$y'''(0) = c_0 + c_1 \quad (5.1.13)$$

olarak hesaplanır. (5.1.10) denkleminin tekrar türevi alınırsa

$$y^{(4)}(x) = \frac{y'}{(x-1)^2} - 2\frac{y}{(x-1)^3} - \frac{y''}{(x-1)} + \frac{y'}{(x-1)^2} + 2$$

ve

$$y^{(4)}(0) = c_1 + 2c_0 + c_0 + c_1 + 2 = 2c_1 + 3c_0 + 2$$

elde edilir. Böylece

$$y(x) = y(0) + x \frac{y'(0)}{1!} + x^2 \frac{y''(0)}{2!} + x^3 \frac{y'''(0)}{3!} + x^4 \frac{y^{(4)}(0)}{4!} + \dots$$

ve

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \frac{c_0}{2} x^2 + \frac{(c_0 + c_1)}{6} x^3 + \frac{(2c_1 + 3c_0 + 2)}{24} x^4 + \dots$$

bulunur. Ortak paranteze alınırsa

$$y(x) = c_0 \left[1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{8} x^4 + \dots \right] + c_1 \left[x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \dots \right] + \frac{1}{2} x^4 + \dots \quad (5.1.14)$$

olduğu görülür. Hatırlanacağı üzere (5.1.9) diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = u + v$ şeklindedir (Burada u : (5.1.9) diferansiyel denkleminin homojen kısmının genel çözümü ve v : (5.17) diferansiyel denkleminin bir özel çözümüdür). Bu hatırlatma doğrultusunda (5.1.14) çözümünde

$$u = c_0 \left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \dots \right] + c_1 \left[x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \dots \right]$$

$$= c_0 y_0 + c_1 y_1$$

alınırsa

$$y_0 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \dots$$

ve

$$y_1 = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \dots$$

çözümleri (5.1.9) diferansiyel denkleminin homojen kısmının lineer bağımsız çözümleridir.

Ayrıca

$$v = \frac{1}{12}x^4 + \dots$$

ise, (5.1.9) diferansiyel denkleminin bir özel çözümüdür.

TEOREM 5.1.1 a noktası, (5.1) denkleminin bir adi noktası olsun. c_1 ve c_2 keyfi sabitleri ve y_1 ve y_2 fonksiyonları, a noktasında analitik olan doğrusal bağımsız seri çözümleri göstermek üzere (5.1) denkleminin genel çözümü,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

biçimindedir. Bundan başka, y_1 ve y_2 seri çözümlerinin her birinin yakınsaklık yarıçapı, ve fonksiyonlarının Taylor serilerinin yakınsaklık yarıçaplarının minimumundan daha küçüktür.

5.2. Adi Nokta Komşuluğunda Çözüm (Belirsiz Katsayılar Yöntemi)

$(x = 0)$ noktası (5.1) numaralı diferansiyel denklemin bir adi noktası olsun, söz konusu diferansiyel denklemin $x=0$ adi noktası civarında bir seri şeklindeki çözümünü bulmak için

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_r x^r + \dots \quad (5.2.1)$$

tarzındaki bir seri göz önüne alınır. Burada “ a_r ” terimi sabit değerleri göstermektedir. (5.2.1) numaralı eşitlikte ifade edilen y fonksiyonu, gerekli türevlerini de almak suretiyle, (5.2.1) numaralı diferansiyel denklemdeki yerlerine konur. Böylece elde edilen denklem (5.1) in kuvvetlerine göre düzenlenir. Söz konusu (5.1) numaralı diferansiyel denklemin ikinci tarafı sıfıra eşit olduğundan, (x) in kuvvetlerine ait katsayılarda ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek bulunan denklemlerden belirsiz (a_r) katsayıları belirlenebilir.

Diğer taraftan herhangi bir $x = a$ noktası, göz önüne alınan (5.1) numaralı diferansiyel denklemin bir adi noktası olabilir. Bu takdirde $x - a = X$ şeklinde eksen (koordinat) dönüşümü yapıp, yeni koordinat sisteminin başlangıç ($X = 0$) noktası civarında seriye açılarak, yukarıda belirtildiği gibi gerekli çözüm hesaplanabilir.

ÖRNEK 5.2.1. $y'' + 2xy' + 4y = 0$

diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözümü istenen diferansiyel denklem, (5.1) numaralı diferansiyel denklem şeklindedir. Burada,

$$P(x) = 2x \quad \text{ve} \quad Q(x) = 4$$

olup, her iki katsayı fonksiyonu da $x = 0$ için analitiktir. Söz konusu katsayı fonksiyonları sürekli, tek değerli ve yüksek mertebeden türevleri vardır. Nitekim $(2x)$ in ikinci ve daha yüksek mertebeden türevleri, 4 ün ise birinci ve daha yüksek mertebeden sıfırdır. Dolayısıyla $x=0$ noktası söz konusu diferansiyel denklemin bir adi noktasıdır. Bu durumda (5.2.1) numaraları seri göz önüne alınırsa çözüme başlanır.

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_r x^r + \dots$$

olup

$$y' = \sum_{r=0}^{\infty} r a_r x^{r-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + r a_r x^{r-1} + \dots$$

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r x^{r-2} = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots + r(r-1) a_r x^{r-2} + \dots$$

dir. Söz konusu y fonksiyonu ve türevlerini diferansiyel denklemde yerlerine koyarsak,

$$\sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r x^{r-2} + 2x \sum_{r=0}^{\infty} r a_r x^{r-1} + 4 \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)a_r x^{r-2} + \sum_{r=0}^{\infty} 2ra_r x^r + \sum_{r=0}^{\infty} 4a_r x^r = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r x^{r-2} + \sum_{r=0}^{\infty} 2(r+2)a_r x^r = 0$$

olur. Bulunan denklemin birinci kısmındaki seride $r = 0$ ve $r = 1$ için (x) in kuvvetlerine ait değerler, ikinci kısımdaki seriden elde edilemez. Ancak birinci seride $r \geq 2$ için (x) in kuvvetlerine ait değerler, ikinci seride de bulunmaktadır. Bu durumu göz önüne alarak söz konusu eşitliği

$$\sum_{r=2}^{\infty} r(r-1)a_r x^{r-2} + \sum_{r=0}^{\infty} 2(r+2) a_r x^r = 0$$

veya birinci seride (r) yerine $(r+2)$ koyup (r) yi sıfırdan başlatarak,

$$\sum_{r=0}^{\infty} (r+2)(r+1) a_{r+2} x^r + \sum_{r=0}^{\infty} 2(r+2) a_r x^r = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} [(r+1)(r+2) a_{r+2} + 2(r+2) a_r] x^r = 0 \quad (5.2.2)$$

şeklinde yazabiliriz. Söz konusu (5.2.2) denklemini seriye açıp gösterirsek,

$$(1.2 a_2 + 2.2 a_0) + (2.3 a_3 + 2.3 a_1)x + (3.4 a_4 + 2.4 a_2) x^2 + (4.5 a_5 + 2.5 a_3)x^3 + \dots + \dots$$

$$[(r+1)(r+2)a_{r+2} + 2(r+2)a_r]x^r + \dots = 0$$

olur. Bu denklemin sıfıra eşit olabilmesi için katsayıların hepsinin ayrı ayrı sıfıra eşitlenmesi gerekir. Buna göre,

$$1. 2a_2 + 2.2a_0 = 0$$

$$2. 3a_3 + 2.3a_1 = 0$$

$$3. 4a_4 + 2.4a_2 = 0$$

$$4. 5a_5 + 2.5a_3 = 0$$

.....

$$(r+1)(r+2) a_{r+2} + 2(r+2) a_r = 0 \quad (5.2.3)$$

olup, seriye açılmış bulunan denklemdeki katsayıların (5.2.3) numaralı genel indirgeme (rekûrans) formülünden hesaplanabileceği görülmektedir. Esasen elde edilen (5.2.2) numaralı

denklemini seriye açıp katsayıları ayrı ayrı göstermek yerine, bunları (x') nin katsayısından (rekürans formülünden) hesaplamak mümkündür. Dolayısıyla genel indirgeme formülü,

$$(r+1)(r+2)a_{r+2} + 2(r+2)a_r = 0$$

dan

$$a_{r+2} = -\frac{2(r+2)}{(r+1)(r+2)}a_r$$

$$= -\frac{2}{(r+1)}a_r \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

olarak yazılabilir. Buna göre katsayılar hesaplanırsa,

$$r = 0 \text{ için } a_2 = -\frac{2}{1}a_0$$

$$r = 1 \text{ için } a_3 = -\frac{2}{2}a_1$$

$$r = 2 \text{ için } a_4 = -\frac{2}{3}a_2$$

$$r = 3 \text{ için } a_5 = -\frac{2}{4}a_3$$

$$r = 4 \text{ için } a_6 = -\frac{2}{5}a_4$$

$$r = 5 \text{ için } a_7 = -\frac{2}{6}a_5$$

.....

bulunur. Söz konusu katsayılardan çift indisli ($a_2, a_4, a_6, \dots$) olanlar ile tek indisli ($a_1, a_3, a_5, \dots$) olanların kendi aralarında bağıntılı olduğu görülmektedir.

Çift indisli katsayıların genel formülünü bulmak için söz konusu katsayıları yazarsak,

$$a_2 = -\frac{2}{1}a_0$$

$$a_4 = -\frac{2}{3}a_2$$

$$a_6 = -\frac{2}{5}a_4$$

$$(r = 2r - 2) \text{ için } a_{2r} = -\frac{2}{(2r-1)} a_{2r-2}$$

olur. Kolonlardaki elemanlar taraf tarafa çarpılarak,

$$a_{2r} = \frac{(-1)^r 2^r}{1.3.5 \dots (2r-1)} a_0$$

genel formülü bulunur. Buna göre çift indisli katsayılar hesaplanırsa,

$$a_2 = -2a_0$$

$$a_4 = \frac{2^2}{1.3} a_0$$

$$a_6 = -\frac{2^3}{1.3.5} a_0$$

elde edilir.

Tek indisli katsayılar için genel formülü bulmak için, tek indisli katsayıları tekrar yazarsak,

$$a_3 = -\frac{2}{2} a_1$$

$$a_5 = -\frac{2}{4} a_3$$

$$a_7 = -\frac{2}{6} a_5$$

$$(r = 2r - 1) \text{ için } a_{2r+1} = -\frac{2}{2r} a_{2r-1}$$

dir.

Kolonlardaki elemanlar taraf tarafa çarpılırsa genel formül

$$a_{2r+1} = \frac{(-1)^r 2^r}{2.4.6 \dots 2r} a_1$$

olarak bulunur.

Buna göre tek indisli katsayılar hesaplanırsa

$$a_3 = -\frac{2}{2}a_1$$

$$a_5 = \frac{2^2}{2.4}a_1$$

$$a_7 = -\frac{2^3}{2.4.6}a_1$$

.....
olur. Görüldüğü gibi çift indisli katsayılar (a_0) a ve tek indisli katsayılar (a_1) e bağlı bulunmaktadır. Verilen diferansiyel denklem ikinci mertebeden olduğuna göre genel çözümünde iki keyfi sabit vardır. Bu durumda (a_0) ve (a_1) katsayıları keyfi iki sabit olarak alınabilir. Dolayısıyla (5.2.1) numaralı sekiyi göz önüne alıp, hesaplanan katsayıları söz konusu (5.2.1) numaralı seride yerlerine koyarsak y genel çözümü,

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$= a_0 + a_1 x - 2a_0 x^2 - \frac{2}{2}a_1 x^3 + \frac{2^2}{1.3}a_0 x^4 + \frac{2^2}{2.4}a_1 x^5 - \frac{2^3}{1.3.5}a_0 x^6 - \frac{2^3}{2.4.6}a_1 x^7 + \dots$$

$$= a_0(1 - 2x^2 + \frac{2^2}{1.3}x^4 - \frac{2^3}{1.3.5}x^6 + \dots) + a_1(x - \frac{2}{2}x^3 + \frac{2^2}{2.4}x^5 - \frac{2^3}{2.4.6}x^7 + \dots)$$

olur. Keyfi sabit $a_0 = c_1$ ve $a_2 = c_2$ alınarak y genel çözümü;

$$y = c_1(1 - 2x^2 + \frac{2^2}{1.3}x^4 - \frac{2^3}{1.3.5}x^6 + \dots) + c_2(x - \frac{2}{2}x^3 + \frac{2^2}{2.4}x^5 - \frac{2^3}{2.4.6}x^7 + \dots)$$

elde edilir.

(y) genel çözümünün yakınsaklığı bölüm kriterine (D'Alembert Oran testine) göre bulunabilir. Söz konusu (y) genel çözümü $-\infty < x < +\infty$ değerleri için yakınsaktır.

ÖRNEK 5.2.2. Verilen diferansiyel denkleminde $y'' + xy = 0$

$$P(x) = 0 \text{ ve } Q(x) = x$$

olup, katsayı fonksiyonları $x = 0$ için analitiktir. ($x = 0$) noktası söz konusu diferansiyel denklemin bir adi noktasıdır. Bu durumda (5.2.1) numaralı seri göz önüne alınarak, belirsiz katsayılar metodu ile çözüm bulunabilir. Dolayısıyla,

bir teriminin ilk terimine ait katsayıdan başkası rekürans formülünden hesaplanabilir. Buna

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sum_{r=0}^{\infty} r a_r x^{r-1}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r x^{r-2}$$

olur. Söz konusu fonksiyonu ve türevleri diferansiyel denklemde yerine konarak,

$$\sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r x^{r-2} + x \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) a_r x^{r-2} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+1} = 0$$

bulunur. Birinci kısımdaki seride ($r = 0, 1, 2$) için x in kuvvetlerine ait değerler, ikinci kısımdaki seriden elde edilemez. Ancak birinci seride $r \geq 3$ için bulunan (x) in kuvvetlerine ait değerler her iki seride de mevcuttur.

Böylece,

$$2.1.a_2 + \sum_{r=3}^{\infty} r(r-1) a_r x^{r-2} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+1} = 0$$

veya ikinci kısımdaki seride (r) yerine ($r+3$) koyup r 'yi sıfırdan başlatarak,

$$2.1.a_2 + \sum_{r=0}^{\infty} (r+3)(r+2) a_{r+3} x^{r+1} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+1} = 0$$

$$2.1.a_2 + \sum_{r=0}^{\infty} [(r+3)(r+2) a_{r+3} + a_r] x^{r+1} = 0$$

elde edilir. Bulunan denklemdeki katsayıları sıfıra eşitlersek,

$$2.a_2 = 0 \quad \text{veya} \quad (a_2 = 0)$$

$$(r+3)(r+2) a_{r+3} + a_r = 0$$

olup, genel indirgeme (rekürans) formülü,

$$a_{r+3} = -\frac{a_r}{(r+2)(r+3)} \quad (r = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

dir. Denklemin ilk terimine ait katsayıdan başkası reküans formülünden hesaplanabilir. Buna göre,

$$a_3 = -\frac{a_0}{2.3}$$

$$a_4 = -\frac{a_1}{3.4}$$

$$a_5 = -\frac{a_2}{4.5} = 0 \quad (a_2 = 0 \text{ dan})$$

$$a_6 = -\frac{a_3}{5.6}$$

$$a_7 = -\frac{a_4}{6.7}$$

$$a_8 = -\frac{a_5}{7.8} = 0$$

$$a_9 = -\frac{a_6}{8.9}$$

$$a_{10} = -\frac{a_7}{9.10}$$

$$a_{11} = -\frac{a_8}{10.11} = 0$$

.....

bulunur. Görüldüğü gibi $(a_3, a_6, a_9 \dots)$, $(a_4, a_7, a_{10} \dots)$ ve $(a_2, a_5, a_8, a_{11} \dots)$ indisli katsayılar kendi aralarında birbirleri ile bağıntılıdır. Söz konusu katsayılarla ait genel formüller hesaplanabilir. Şöyle ki,

$$\text{I) } a_3 = -\frac{a_0}{2.3}$$

$$a_6 = -\frac{a_3}{5.6}$$

$$a_9 = -\frac{a_6}{8.9}$$

.....

$$a_{3r} = -\frac{a_{3r-3}}{(3r-1)3r}$$

kolonlardaki elemanlar taraf tarafa çarpılarak,

$$a_{3r} = \frac{(-1)^r a_0}{1.2.3.5.6.8.9 \dots (3r-1)3r}$$

olur.

$$\text{II) } a_4 = -\frac{a_1}{3.4} + \frac{x^6}{180} - \dots + a_1 \left(x - \frac{x^3}{12} + \frac{x^5}{504} - \dots \right)$$

$$a_7 = -\frac{a_4}{6.7}$$

$$a_{10} = -\frac{a_7}{9.10}$$

.....

$$a_{3r+1} = -\frac{a_{3r-2}}{3r.(3r+1)}$$

taraf tarafa çarpılarak

$$a_{3r+1} = \frac{(-1)^r a_1}{3.4.6.7.9.10 \dots 3r(3r+1)} \quad \text{elde edilir.}$$

III) Katsayılardan anlaşılacağı gibi

$$a_{3r+2} = 0 \quad \text{dir.}$$

Yukarıdaki katsayıların genel formüllerinden görüleceği gibi, (I). şıktaki katsayılar (a_0) a, (II). şıktaki katsayılar ise (a_1) e bağlıdır. Çözümü aranan diferansiyel denklem ikinci mertebeden olduğundan genel çözümde iki keyfi sabit bulunmaktadır. Bu bakımdan a_0 ve a_1 katsayıları, keyfi sabitler olarak alınabilir. Buna göre genel formüllerden katsayılar hesaplanırsa;

$$a_3 = -\frac{a_0}{2.3} \quad a_4 = -\frac{a_1}{3.4} \quad a_2 = 0$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = -\frac{a_0}{2.3.5.6} \quad a_7 = -\frac{a_1}{3.4.6.7} \quad a_8 = 0$$

.....

elde edilir. Böylece genel çözüm,

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2.3} x^3 - \frac{a_1}{3.4} x^4 + \frac{a_0}{2.3.5.6} x^6 + \frac{a_1}{3.4.6.7} x^7 + \dots$$

olup, a_0 ve a_1 e göre düzenlenerek

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} - \dots \right) + a_1 \left(x - \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} - \dots \right) \quad (5.2.4)$$

veya

$a_0 = c_1$ ve $a_1 = c_2$ alınarak

$$y = c_1 \left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} - \dots \right) + c_2 \left(x - \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} - \dots \right)$$

bulunur. Söz konusu (y) çözümü $-\infty < x < +\infty$ değerleri için yakınsaktır.

ÖRNEK 5.2.3. Belirsiz katsayılar yöntemini kullanarak

$$y'' + xy' + 2y = x + 3, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

başlangıç değer probleminin $x_0 = 1$ noktasındaki seri çözümünün ilk beş terimini ve katsayılar arasındaki bağıntıyı bulunuz.

$x_0 = 1$ verilen denklem için bir bayağı nokta olduğundan

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n \quad (5.2.3)$$

şeklinde bir çözüm araştırılır. Türev alma sonucunda elde edilen

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-1)^{n-1}$$

ve

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-1)^{n-2}$$

değerleri verilen denklemde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-1)^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-1)^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n = x+3$$

olur. Son eşitlikteki ikinci serinin katsayısı olan x ve eşitliğin sağ tarafında bulunan $x+3$ polinomları sırasıyla $x=(x-1)+1$ ve $x+3=(x-1)+4$ olarak $(x-1)$ teriminin kuvvetleri cinsinden elde edilir. Böylece son eşitlik

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-1)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-1)^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n \\ = (x-1) + 4 \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

şekline dönüşür. (5.2.4) eşitliğinin sol tarafındaki birinci ve üçüncü terimlerde indis değişikliği yapılarak bütün toplamalar $(x-1)^n$ ortak çarpanı olarak ifade edilir. Yani

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}(x-1)^n$$

özdeşlikleri göz önünde bulundurulursa (5.2.4) eşitliği

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}(x-1)^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n \\ = (x-1) + 4 \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

haline dönüşür. (5.2.5) eşitliğinin sol tarafındaki terimleri tek toplam altında birleştirmek için bu terimlerdeki bütün seriler ortak olan $n=1$ değerinden başlatılır. Bu amaçla söz konusu eşitlikteki birinci, üçüncü ve dördüncü serilerin $n=0$ değerine karşılık gelen birinci terimleri ayrı yazılır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n = 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}(x-1)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}(x-1)^n = c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)c_{n+1}(x-1)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-1)^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-1)^n$$

Böylece (5.2.5) eşitliği aynı toplam altında birleşirse

$$2c_2 + c_1 + 2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + (n+1)c_{n+1} + 2c_n](x-1)^n = (x-1) + 4 \quad (5.2.6)$$

olur. Bu son eşitliğin her iki tarafındaki $(x-1)^n$ teriminin katsayıları eşitlenirse;

$$(x-1)^0 : 2c_2 + c_1 + 2c_0 = 4 \quad (5.2.7)$$

$$(x-1)^1 : 6c_3 + 3c_1 + 2c_2 = 1 \quad (5.2.8)$$

ve $n \geq 2$ için

$$(x-1)^n : (n+2)(n+1)c_{n+2} + nc_n + (n+1)c_{n+1} + 2c_n = 0 \quad (5.2.9)$$

sağlanmalıdır. (5.2.9) katsayılar arasındaki bağıntıyı belirlemektedir. Bu bağıntıdan

$$c_{n+2} = \frac{1}{(n+1)}c_n - \frac{1}{(n+2)}c_{n+1} \quad (5.2.10)$$

bulunur. Ayrıca başlangıç koşulları $y(1)=0$ ve $y'(1)=1$ olduğu kullanılırsa (5.2.3) den

$$c_0 = y(1) = 0, c_1 = y'(1) = 1 \quad (5.2.11)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan (5.2.7) ve (5.2.11) den

$$c_2 = \frac{3}{2} \quad (5.2.12)$$

ve (5.2.8), (5.2.11), (5.2.12) den

$$c_3 = -\frac{5}{6}$$

elde edilir. c_4 değeri ise $n=2$ için (5.2.10) den

$$c_4 = -\frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{4}c_3 = \frac{7}{24}$$

olarak hesaplanır. Böylece $x_0=1$ de aranan çözüm, hesaplanan ilk beş katsayının (5.2.1) de

$$y = (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{5}{6}(x-1)^3 - \frac{7}{24}(x-1)^4 + \dots$$

şeklinde bulunmuş olur.

ÖRNEK 5.2.4. $(1+x^2)y''+y=0$

diferansiyel denkleminin $x_0=0$ noktasındaki seri çözümünü bulunuz.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (5.2.13)$$

değeri verilen denklemde yerine yazılırsa

$$(1+x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

veya

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad (5.2.14)$$

bulunur. (5.2.14) eşitliğindeki birinci terimde indis değişikliği yapılırsa; yani

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n$$

olduğu kullanılırsa (5.2.14) eşitliği

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad (5.2.15)$$

dönüşür. Bu son eşitlik, $n=2$ değerinden başlayarak ortak toplam altında birleştirilecek şekilde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(2c_2 + c_0) + (6c_3 + c_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} + n(n-1)c_n + c_n] = 0$$

bulunur. Son eşitliğin her iki tarafındaki x 'in benzer kuvvetleri eşitlenirse

$$x^0 : 2c_2 + c_0 = 0 \quad (5.2.16)$$

$$x : 6c_3 + c_1 = 0 \quad (5.2.17)$$

ve $n \geq 2$ için

$$x^n : (n+2)(n+1)c_{n+2} + (n^2 - n + 1)c_n = 0 \quad (5.2.18)$$

denklemleri elde edilir. (5.2.16), (5.2.17) ve (5.2.18) dan

$$c_2 = -\frac{1}{2}c_0, c_3 = \frac{1}{6}c_1, c_4 = -\frac{3}{12}c_2 = \frac{1}{2.4}c_0, c_5 = -\frac{7}{20}c_3 = \frac{7}{6.20}c_1$$

bulunur. Bütün bu değerler (5.2.13) de yerine yazılırsa

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{1}{2}c_0 x^2 - \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{8}c_0 x^4 + \frac{7}{120}c_1 x^5 + \dots$$

veya

$$y = c_0 \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \dots \right] + c_1 \left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{7}{120}x^5 + \dots \right]$$

genel çözümü elde edilir.

ÖRNEK 5.2.5. $y'' + 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y'' + 2y = 0 \quad (5.2.19)$$

denklemini için $t=0$ bir adi noktadır. $P(t)=0$ ve $Q(t)=2$ fonksiyonları $t=0$ da analitiktir. Bu nedenle, (5.2.19) denkleminin seri çözümü olan

$$y = y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad (5.2.20)$$

serisi, $|t| < R$ iken yakınsaktır. (5.2.20) çözümü, $y(0)=c_0$, $y'(0)=c_1$ başlangıç koşullarını sağlasın,

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1}, y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} \quad (5.2.21)$$

değerleri (5.2.19) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

bulunur. İlk seri sıfırdan başlamak üzere düzenlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ (n+2)(n+1) c_{n+2} + 2c_n \} t^n = 0$$

elde edilir. Sıfır fonksiyonunun seri açılımında tüm katsayılar sıfır olacağından, sol yandaki t^n nin katsayıları da sıfır olmalıdır. Bu nedenle, c_n katsayıları arasında

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} + 2c_n = 0 \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (5.2.22)$$

indirgeme bağıntısı elde edilir. (5.2.22) den,

$$c_2 = -\frac{2}{2!}c_0, c_3 = -\frac{2}{3!}c_1, c_4 = \frac{2^2}{5!}c_1, c_6 = -\frac{2^3}{6!}c_0, c_7 = -\frac{2^3}{7!}c_1, \dots$$

bulunur. Bu değerler (5.2.20) da yerine yazılırsa, çözüm

$$\begin{aligned} y(t) &= c_0 \left\{ 1 - \frac{2}{2!}t^2 + \frac{2^2}{4!}t^4 - \frac{2^3}{6!}t^6 + \dots \right\} + c_1 \left\{ t - \frac{2}{3!}t^3 + \frac{2^2}{5!}t^5 - \frac{2^3}{7!}t^7 + \dots \right\} \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(t\sqrt{2})^{2n}}{(2n)!} + \frac{c_1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(t\sqrt{2})^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= k_0 \cos(t\sqrt{2}) + k_1 \sin(t\sqrt{2}), \quad k_0 = c_0, k_1 = \frac{c_1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Bu serilerin yakınsaklık yarıçapı $R=\infty$ dur.

ÖRNEK 5.2.5. $y''-ty'-y=0$ denkleminin genel çözümünü (5.2.20) tipinde bir seri ile ifade ediniz.

$$y''-ty'-y=0$$

denkleminde (5.2.20) ve (5.2.21) değerleri yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

bulunur. Burada, birinci ve üçüncü seri t^0 ile başlarken ikinci seri t ile başlamaktadır. Birinci ve üçüncü serilerde ilk terimler toplam dışına alınırsa,

$$2c_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^n - c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n = 0$$

olur. Birinci seride n yerine $n+2$ yazılarak sayma 1 den başlatılıp düzenlenirse,

$$2c_2 - c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1)c_{n+2} - (n+1)c_n \right\} t^n = 0$$

bulunur. Sıfır fonksiyonunun tüm katsayıları sıfır olacağından,

$$2c_2 - c_0 = 0 \quad (5.2.24)$$

$$(n+2)c_{n+2} - c_n = 0 \quad (n \geq 1) \quad (5.2.25)$$

elde edilir. Son bağıntı, c_k katsayılarının gerçeklediği indirgeme bağıntısıdır. (5.2.24) den,

$$c_2 = \frac{1}{2}c_0$$

dir. (5.2.25) bağıntısı,

$$c_{n+2} = \frac{1}{n+2} c_n \quad (n \geq 1)$$

biçiminde yazılırsa,

$$c_3 = \frac{1}{3} c_1, c_4 = \frac{1}{4} c_2 = \frac{1}{4 \cdot 2} c_0, c_5 = \frac{1}{5} c_3 = \frac{1}{5 \cdot 3} c_1 \dots$$

dir. Serile, her t için yakınsaktır.

$$\vdots$$

$$c_{2n} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} c_0, c_{2n+1} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} c_1 \quad (n \geq 1)$$

elde edilir. Buna göre, (5.2.23) denkleminin genel çözümü her t için yakınsak olan seriler cinsinden

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$$

$$= c_0 \left\{ 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4 \cdot 2} + \dots \right\} + c_1 \left\{ t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5 \cdot 3} \dots \right\}$$

$$= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)}$$

$$= c_0 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

biçimindedir ve serilerin yakınsaklık yarıçapı sonsuzdur.

ÖRNEK 5.2.6. $y'' - (t-1)y' - y = 0$

(5.2.26)

denkleminin genel çözümünü $t-1$ in kuvvetleri cinsinden bulunuz.

Çözümü bir Maclaurin serisi ile vermek için $t-1 = x$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$y(t) = y(x+1) = Y(x)$$

ve

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dY(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dY}{dx} \quad \text{ve} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 Y}{dx^2}$$

olur. Buna göre, (5.2.26) denklemi,

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - x \frac{dY}{dx} - Y = 0$$

biçimini alır. Bu denklem, (5.2.23) denklemdir. Genel çözüm,

$$Y(x) = c_0 Y_1(x) + c_1 Y_2(x) \quad (5.3.3)$$

olduğundan (5.2.26) denkleminin genel çözümü, $x = t-1$ için

$$y = c_0 y_1(t-1) + c_1 y_2(t-1)$$

$$= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-1)^{2n}}{2.4.6...(2n)} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-1)^{2n+1}}{3.5.7...(2n+1)} \quad (5.3.4)$$

dir. Seriler her t için yakınsaktır.

5.3. Tekil Nokta Komşuluğunda Çözüm (Frobenius Yöntemi)

($x = 0$) noktası (5.1) numaralı diferansiyel denklemin bir düzgün tekil noktası olsun. Bu takdirde (5.1) numaralı diferansiyel denklemin $x = 0$ düzgün tekil noktası civarında seri şeklindeki çözümü Frobenius yöntemine göre bulunabilir. Bunun için,

$$y = x^k \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} \quad (5.3.5)$$

şeklindeki seri kullanılır. Görüldüğü gibi (5.2.1) numaralı seri (x^k) tarzında bir terimle çarpılmak suretiyle (5.3.1) numaralı, seri elde edilmektedir. Buradaki (a_r) katsayıları sabit değerlerdir. (k) değerleri ise negatif, sıfır, pozitif, tam sayı veya kesir olabilmekte ve “indisel denklem” veya “indis denklemi” denilen $f(k)=0$ şeklindeki, ikinci dereceden bir eşitlikten hesaplanmaktadır. Söz konusu $f(k)=0$ indisel denklemin kökleri olan k_1 ve k_2 ye, göz önüne alınan diferansiyel denklemin “üs” değerleri denir. Söz konusu k_1 ve k_2 değerlerinin,

I) $k_1 \neq k_2$ olup, aralarındaki farkın tam sayı olmaması

II) $k_1 = k_2$ olması

III) $k_1 \neq k_2$ olup aralarındaki farkın tam sayı olması

hallerine göre üç ayrı çözüm şekli bulunmaktadır. Frobenius yönteminin kullanılış tarzı aşağıdaki örneklerle açıklanmıştır.

Diğer taraftan herhangi bir $x = a$ noktası (5.1) numaralı diferansiyel denklemin bir “düzgün tekil noktası” olabilir. Bu durumda $x-a=X$ tarzında eksen (koordinat) dönüşümü yapıp, yeni koordinat sisteminin başlangıç ($X=0$) noktası civarında Frobenius metoduna göre çözümü hesaplanabilir.

TANIM 5.3.1

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (5.3.2)$$

denklemini göz önüne alalım. Eğer (5.3.2) denklemi

$$x^2 P(x)y'' + xQ(x)y' + R(x)y = 0 \quad (5.3.3)$$

olarak yazıldığında $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonları $x_0 = 0$ noktasında analitik ise ve $P(0) \neq 0$ sağlanıyorsa $x_0 = 0$ noktasına söz konusu denklemin bir düzgün tekil noktası adı verilir.

ÖRNEK. 5.3.1. $x_0 = 0$ noktasının

$$x^2(\cos x)y'' + x^2y' + 6y = 0 \quad (5.3.4)$$

denkleminin bir düzgün tekil noktası olup olmadığını araştırınız.

$$P(x) = \cos x, Q(x) = x, R(x) = 6 \quad (5.3.5)$$

alınırsa (5.3.4) denklemi (5.3.3) formunda ifade edilmiş olur. (5.3.5) de tanımlanan fonksiyonların her biri $x_0 = 0$ noktasında analitik ve $P(0) \neq 0$ olduğundan $x_0 = 0$ noktası verilen denklemin bir düzgün tekil noktasıdır.

ÖRNEK 5.3.2. $x_0 = 0$ noktasının

$$(x^3 + x^4)y'' + xy' - xy = 0 \quad (5.3.6)$$

denkleminin bir düzgün tekil noktası olup olmadığını araştırınız.

$$P(x) = x + x^2, Q(x) = 1, R(x) = -x$$

alınırsa (5.3.6) denklemi (5.3.3) formunda ifade edilmiş olur. Ancak $P(0) = 0$ olduğundan $x_0 = 0$ noktası verilen denklemin bir düzgün tekil noktası değildir.

Eğer $x_0 = 0$ noktası (5.3.1) denkleminin bir düzgün tekil noktası ise söz konusu denklemin

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

şeklinde en az bir çözümü mevcuttur. Bunu görmek için

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \quad (5.3.7)$$

Maclaurin serileri (5.3.3) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & x^2 \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)c_n x^{r+n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)c_n x^{r+n-1} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^{n+r} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

bulunur. $x_0 = 0$ noktası verilen denklemin bir düzgün tekil noktası olduğundan son denklem $x \neq 0$ için sağlanır. Böylece son denklemin her iki tarafı x^{-r} ile çarpılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad (5.3.9)$$

elde edilir. (5.3.9) denkleminde $n=0$ değerine karşılık gelen sabit terim yazılırsa

$$(p_0 r(r-1) + r q_0 + r_0) c_0 = 0$$

olduğu görülür. $c_0 \neq 0$ olduğu kabul edilirse

$$\rho(r) = p_0 r(r-1) + r q_0 + r_0 = 0$$

olur. (5.3.10) denklemi indis denklemi ve $\rho(r)$ ise indis polinomu olarak adlandırılır. İndis polinomu ikinci dereceden bir polinom olduğundan iki kökü mevcuttur.

ÖRNEK 5.3.3. $2x^2 y'' + 3xy' + (x^2 - 1)y = 0$

diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözümü aranan diferansiyel denklemi,

$$y'' + \frac{3x}{2x^2} y' + \frac{(x^2 - 1)}{2x^2} y = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda

$$P(x) = \frac{3x}{2x^2} = \frac{3}{2x} \quad Q(x) = \frac{(x^2 - 1)}{2x}$$

olup, $x=0$ için $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de sonsuz olmaktadır. Diğer bir deyişle her ikisi de analitik değildir. Dolayısıyla $x=0$ noktası bir tekil noktadır.

Söz konusu $x=0$ tekil noktasının düzgün olup olmadığının belirlenmesi için $x P(x)$ ve $x^2 Q(x)$ çarpımları teşkil edilir. Buna göre,

$$x P(x) = x \frac{3}{2x} = \frac{3}{2}$$

$$x^2 Q(x) = x^2 \frac{(x^2 - 1)}{2x^2} = \frac{(x^2 - 1)}{2}$$

olup, her iki çarpımın $x=0$ için analitik olduğu görülür. Buradan $x=0$ noktasının bir düzgün tekil nokta olduğu anlaşılmaktadır. Dolayısıyla verilen diferansiyel denklemin, $x=0$ noktası civarında seri şeklindeki çözümü Frobenius metoduna göre bulunabilir. Bunun için,

$$y = x^k \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = x^k (a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r}$$

tarzındaki (5.3.1) numaralı seriyi alarak çözüme başlanabilir. Göz önüne alınan (y) fonksiyonunun türevleri de alınırsa,

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r}$$

$$y' = \sum_{r=0}^{\infty} (k+r) a_r x^{k+r-1}$$

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) a_r x^{k+r-2}$$

bulunur. (y) fonksiyonu ve türevleri diferansiyel denklemde yerlerine konursa

$$2x^2 \sum_{r=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) a_r x^{k+r-2} + 3x \sum_{r=0}^{\infty} (k+r) a_r x^{k+r-1} + (x^2 - 1) \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} 2(k+r)(k+r-1) a_r x^{k+r} + \sum_{r=0}^{\infty} 3(k+r) a_r x^{k+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r+2} - \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} [2(k+r)(k+r-1) + 3(k+r) - 1] a_r x^{k+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r+2} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \{(k+r)[2(k+r-1) + 3] - 1\} a_r x^{k+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r+2} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} [(k+r)(2k+2r+1) - 1] a_r x^{k+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r+2} = 0$$

olur. Birinci kısımdaki seride $r = 0$ ve $r = 1$ için x in kuvvetlerine ait değerler, ikinci kısımdaki seriden elde edilemez. Ancak birinci seride $r \geq 2$ için x in kuvvetlerine ait değerler, ikinci seride de bulunmaktadır. Buna göre söz konusu eşitliği

$$[k(2k+1) - 1] a_0 x^k + [(k+1)(2k+3) - 1] a_1 x^{k+1} +$$

$$\sum_{r=2}^{\infty} [(k+r)(2k+2r+1) - 1] a_r x^{k+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r+2} = 0$$

veya üçüncü kısımdaki seride (r) yerine (r+2) koyup, (r) yi sıfırdan başlatarak

$$[k(2k+1) - 1] a_0 x^k + [(k+1)(2k+3) - 1] a_1 x^{k+1} +$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \{ [k+r+2][2k+2(r+2)+1]-1 \} a_{r+2} x^{k+r+2} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r+2} = 0$$

$$(2k^2 + k - 1)a_0 x^k + [(k+1)(2k+3)-1]a_1 x^{k+1} +$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \{ [(k+r+2)(2k+2r+5)-1]a_{r+2} + a_r \} x^{k+r+2} = 0$$

olur. Elde edilen son eşitliği (x) in artan kuvvetlerine göre düzenlersek,

$$(2k^2 + k - 1)a_0 x^k + [(k+1)(2k+3)-1]a_1 x^{k+1} + \{ [(k+2)(2k+5)-1]a_2 + a_0 \} x^{k+2} + \dots +$$

$$\{ [(k+r+2)(2k+2r+5)-1]a_{r+2} + a_r \} x^{k+r+2} + \dots = 0 \quad (5.3.11)$$

bulunur. (5.3.1) numaralı eşitliğin gerçekleşmesi içinde x değişkeninin katsayılarının hepsi ayrı ayrı sıfıra eşit olmalıdır. Dolayısıyla

$$(2k^2 + k - 1)a_0 = 0$$

$$[(k+1)(2k+3)-1]a_1 = 0$$

$$[(k+2)(2k+5)-1]a_2 + a_0 = 0 \quad (5.3.12)$$

$$[(k+r+2)(2k+2r+5)-1]a_{r+2} + a_r = 0$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemlerin birincisinde $a_0 \neq 0$ farz edilebilir. Bu durumda, $a_0 \neq 0$ olduğuna göre, birinci denklemin sıfıra eşit olması için $(2k^2+2k+1)=0$ olmalıdır. İşte $f(k)=(2k^2+2k+1)=0$ şeklindeki (k) nın ikinci dereceden fonksiyonu olan bu denkleme “indisel denklem” veya “indis denklemi” denir. Söz konusu indisel denklem vasıtasıyla diferansiyel denklemin k_1 ve k_2 üsleri hesaplanabilir. Buna göre

$$2k^2 + k - 1 = 0$$

denklemini çözülürse,

$$k_1 = -1 \text{ ve } k_2 = \frac{1}{2}$$

olur. Görüldüğü gibi $k_1 \neq k_2$ olup, k_1 ve k_2 değerleri arasındaki fark tam sayı değildir. Bu takdirde $k_1 = -1$ e ait y_1 özel çözümü ve $k_2 = \frac{1}{2}$ ye ait y_2 özel çözümü aşağıda açıklandığı gibi hesaplanarak, diferansiyel denklemin genel çözümü bulunabilir. Şöyle ki,

$k_1 = -1$ ve $k_2 = \frac{1}{2}$ için $a_0 \neq 0$ farz edilmişti. (a_1) katsayısı için ikinci denklemi göz önüne alırsak,

$$[(k+1)(2k+3)-1]a_1 = 0$$

dir. Söz konusu denklemden,

1) $k_1 = -1$ için (-1) , $a_1 = 0$ elde edilir. Bu eşitliğin gerçekleşmesi için $a_1 = 0$ olmalıdır.

2) $k_2 = \frac{1}{2}$ için (5) . $a_1 = 0$ bulunur. Bu eşitliğin gerçekleşmesi için de $a_1 = 0$ olmalıdır.

Öte yandan $k_1 = -1$ ve $k_2 = \frac{1}{2}$ ye ait diğer katsayıların hesabında,

$$[(k+r+2)(2k+2r+5)-1]a_{r+2} + a_r = 0$$

veya

$$a_{r+2} = -\frac{a_r}{[(k+r+2)(2k+2r+5)-1]}$$

şeklindeki, (5.2.12) numaralı, genel indirgeme (rekürans) formülünden yararlanılır.

Dolayısıyla $(r=0,1,2 \dots)$ için,

$$a_2 = -\frac{a_0}{[(k+2)(2k+5)-1]} = \frac{a_0}{(k+3)(2k+3)}$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{[(k+3)(2k+7)-1]} = 0 \quad (a_1 = 0 \text{ dan})$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{[(k+4)(2k+9)-1]} = -\frac{a_2}{(k+5)(2k+7)}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{[(k+5)(2k+11)-1]} = 0$$

.....

$$a_{2r-1} = -\frac{a_{2r-3}}{[(k+2r-1)(2k+4r-1)-1]} = 0$$

$$a_{2r} = -\frac{a_{2r-2}}{[(k+2r)(2k+4r+1)-1]} = -\frac{a_{2r-2}}{(k+2r+1)(2k+4r-1)}$$

terim ise $(a_1=0)$ olduğundan sıfır olur. Bu sebepten a_r $(r=0, 1, 2, 3 \dots)$ katsayıları (5.3.11)

bulunur. Yukarıdaki katsayılardan anlaşıldığı gibi $k_1 = -1$ ve $k_2 = \frac{1}{2}$ değerleri için tek indisli katsayılar,

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2r-1} = \dots = 0$$

dir. Çift indisli katsayıların genel formülünü hesaplamak için, rekürans formülünden bulunan çift indisli katsayıları yeniden yazalım.

$$a_2 = -\frac{a_0}{(k+3)(2k+3)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{(k+5)(2k+7)}$$

.....

$$a_{2r} = -\frac{a_{2r-2}}{(k+2r+1)(2k+4r-1)}$$

olur. Kolonlardaki elemanlar taraf tarafa çarpılırsa,

$$a_{2r} = \frac{(-1)^r a_0}{(k+3)(2k+3)(k+5)(2k+7) \dots (k+2r+1)(2k+4r-1)}$$

genel formülü bulunur. Söz konusu genel formülden katsayılar hesaplanırsa ($r=1, 2, 3, \dots$) için

$$a_2 = -\frac{a_0}{(k+3)(2k+3)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{(k+5)(2k+7)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{(k+7)(2k+11)}$$

.....

elde edilir.

Diğer taraftan, ($a_2, a_3, a_4, \dots$) katsayıları genel indirgeme (rekürans) formülünden hesaplandığından (5.3.11) numaralı denklemden yerlerine konursa, ilk iki terimden sonraki bütün terimler, k ne olursa olsun, sifira gider. Denklemin birinci terimindeki $a_0 \neq 0$ farz edilmişti. Dolayısıyla $2k^2 + k - 1 = 0$ veya $k_1 = -1, k_2 = \frac{1}{2}$ için birinci terim sıfır olur. İkinci terim ise ($a_1=0$) alındığı için sıfır olur. Bu sebepten a_r ($r=0, 1, 2, 3, \dots$) katsayıları (5.3.11)

denkleminde yerlerine konursa yalnız birinci terim kalır diğerleri sıfıra gider. Bu arada (5.3.1) numaralı seriyi tekrar yazarsak,

$$y = x^k \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = x^k (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)$$

dir. Söz konusu (5.3.1) numaralı seride hesaplanan katsayıları yerlerine koyup, bulunan seriyi $(\bar{y})$ ile gösterirsek,

$$\bar{y} = a_0 x^k \left[1 - \frac{x^2}{(k+3)(2k+3)} + \frac{x^4}{(k+3)(2k+3)(k+5)(2k+7)} - \frac{x^6}{(k+3)(2k+3)(k+5)(2k+7)(k+7)(2k+11)} + \dots \right]$$

olur. Söz konusu $(\bar{y})$ serisi,

$$2x^2 \bar{y}'' + 3x \bar{y}' + (x^2 - 1) \bar{y} = (2k^2 + k - 1) a_0 x^k$$

şeklindeki diferansiyel denklemi gerçekler. Denklemin sağ tarafı $k = -1$ ve $k = \frac{1}{2}$ için sıfır

olur.

Bu durumda $a_0 \neq 0$ olup, keyfi sabiti ifade etmektedir. Dolayısıyla $(k = k_1 = -1)$ e ait y_1 özel çözümün ve $(k = k_2 = 1/2)$ ye ait y_2 özel çözümün bulunmasında, uygun olması bakımından, $a_0 = 1$ alınabilir. Buna göre $\bar{y}$ çözümünde,

1) $k = k_1 = -1$ ve $a_0 = 1$ alınarak

$$y_1 = x^{-1} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1} + \frac{x^4}{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2! \cdot 1 \cdot 5} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3! \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9} + \dots \right)$$

bulunur.

2) $k = k_2 = 1/2$ ve $a_0 = 1$ alınarak

$$y_2 = x^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{7 \cdot 2} + \frac{x^4}{7 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 4} - \frac{x^6}{7 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 6} + \dots \right)$$

$$= \sqrt{x} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 7} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2! \cdot 7 \cdot 11} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3! \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15} + \dots \right)$$

olur.

Söz konusu y_1 ve y_2 çözümleri verilen diferansiyel denklemin lineer bağımsız özel çözümleridir. Diferansiyel denklemin y genel çözümü ise y_1 ve y_2 özel çözümlerinin keyfi sabitlerle teşkil edilen lineer birleşimidir. Dolayısıyla,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

veya

$$y = c_1 \cdot \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2! \cdot 1.5} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3! \cdot 1.5 \cdot 9} + \dots \right) + c_2 \sqrt{x} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 7} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2! \cdot 7 \cdot 11} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 3! \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15} + \dots \right)$$

elde edilir. Burada (y) çözümü $0 < x < +\infty$ için yakınsaktır.

ÖRNEK 5.3.4. $2ty'' + y' + ty = 0$ denklemin genel çözümü bulunuz.

$$2ty'' + y' + ty = 0 \quad (5.3.13)$$

denkleminde

$$a_0 = 2t, a_1 = 1, a_2 = t, t \frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{2} \text{ ve } t^2 \frac{a_2}{a_0} = \frac{t^2}{2}$$

olduğundan, $t=0$ noktası (5.3.13) için bir düzgün tekil noktadır. Bu denklem için

$$y(t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\alpha+k} \quad (t>0) \quad (5.3.14)$$

biçiminde bir seri çözüm aranır:

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + k) c_k t^{\alpha+k-1}, y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + k)(\alpha + k - 1) c_k t^{\alpha+k-2} \quad (5.3.15)$$

dir. (5.3.13) denklemini $t/2$ ile çarpılıp türev değerleri yerine yazılırsa,

$$t^2 y'' + \frac{t}{2} y' + \frac{t^2}{2} y = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + k)(\alpha + k - 1) c_k t^{\alpha+k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + k) c_k t^{\alpha+k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\alpha+k+2} = 0$$

olur. İlk iki seride bulunan t^α ve $t^{\alpha+1}$ üslü terimler toplam dışına alınır ve kalan üç seri de aynı toplam altında yazılırsa,

$$\alpha(\alpha-1)c_0 t^\alpha + \alpha(\alpha+1)c_1 t^{\alpha+1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\alpha+k)(\alpha+k-1)c_k t^{\alpha+k}$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha c_0 t^\alpha + \frac{1}{2}(\alpha+1)c_1 t^{\alpha+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} (\alpha+k)c_k t^{\alpha+k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} t^{\alpha+k} = 0$$

$$\alpha(\alpha - \frac{1}{2})c_0 t^\alpha + (\alpha + \frac{1}{2})(\alpha+1)c_1 t^{\alpha+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ (\alpha+k)(\alpha+k - \frac{1}{2})c_k + \frac{1}{2}c_{k-2} \right\} t^{\alpha+k} = 0$$

elde edilir. Bu denklemin sağlanması için t nin her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde,

$$\alpha(\alpha - \frac{1}{2})c_0 = 0, (\alpha + \frac{1}{2})(\alpha+1)c_1 = 0$$

$$(\alpha+k)(\alpha+k - \frac{1}{2})c_k + \frac{1}{2}c_{k-2} = 0 \quad (k=2,3,\dots) \quad (5.3.17)$$

dir. $c_0 \neq 0$ olduğundan, (5.3.16)'daki ilk denklemden,

$$\alpha(\alpha - \frac{1}{2}) = 0$$

olmalıdır. $F(\alpha) = \alpha(\alpha - \frac{1}{2})$ bir polinomdur ve özel olarak

$F(\alpha) = \alpha(\alpha - \frac{1}{2}) = 0$ denklemine, (5.3.13) diferansiyel denkleminin *indis denklemi* denir.

İndis denkleminin köklerine, diferansiyel denklemin düzgün tekil noktadaki üsleri denir. Bu örnek için üsler

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

dir.

1) $\alpha_1 = 0$ ise: (5.3.16)'daki ikinci denklemden, $1 \cdot \frac{1}{2}c_1 = 0$

elde edilir. Bu bağıntı yalnızca $c_1=0$ seçildiğinde gerçekleşir. (5.3.17) bağıntısından,

$$k(k - \frac{1}{2})c_k + \frac{1}{2}c_{k-2} = 0 \Rightarrow c_k = \frac{-1}{k(2k-1)}c_{k-2} \quad (k=2,3,\dots)$$

olur. Buradan,

$$c_1 = 0, c_2 = \frac{-1}{2.3} c_0, c_3 = 0, c_4 = \frac{1}{2.4.3.7} c_0$$

ya da

$$c_{2n-1} = 0, c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2.4...(2n).3.7...(4n-1)} c_0, n = 1, 2, \dots$$

bulunur. Bu değerler (5.3.14) de yerlerine yazılırsa, $c_0 = 1$ seçmekle,

$$y_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2.4...(2n).3.7...(4n-1)} t^{2n} \quad \text{elde edilir.}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(4n+3) = \infty$$

olduğundan, seri her t için yakınsaktır.

2) $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ ise (5.3.16) den,

$$1. \frac{3}{2} c_1 = 0$$

ve bunun sağlanması için $c_1 = 0$ olmalıdır. (5.3.17) indirgeme bağıntısı,

$$c_k = \frac{-1}{k(2k+1)} c_{k-2} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

biçimini alır. Buna göre, katsayılar c_0 cinsinden hesaplanırsa,

$$c_1 = 0, c_3 = 0, \dots, c_{2n-1} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$c_2 = -\frac{1}{2.5} c_0, c_4 = \frac{1}{2.4.5.9} c_0, \dots, c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2.4...(2n).5.9...(4n+1)} c_0$$

olur. O halde, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ için çözüm,

$$y_2(t) = t^{1/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2.4...(2n).5.9...(4n+1)} t^{2n} \right\}$$

biçiminde elde edilir. Bu serinin her t için yakınsak olduğu kolayca görülür. y_1 ve y_2 seri çözümleri sırasıyla, t^0 ve $t^{1/2}$ ile başladığından, çözümlerin doğrusal bağımsızlığı açıktır. Bu nedenle, (4.3.13) denkleminin genel çözümü, yukarıda bulunan $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve keyfi k_1 , k_2 sabitleri için

$$y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) \quad (t > 0)$$

dir.

Örnekle, uygun bir $(-R, R)$ aralığında yakınsak bir kuvvet serisi ile verilen

$$y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) = k_1 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2.4 \dots (2n).3.7 \dots (4n-1)} + 2n \right\} + k_2 t^{1/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2.4 \dots (2n).5.9 \dots (4n+1)} t^{2n} \right\} \quad (5.3.18)$$

fonksiyonunun (5.3.13) denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşulun üssünün ve c_n katsayılarının (5.3.16) ve (5.3.17) bağıntılarını sağlaması olduğu ortaya konmuştur.

Genel halde, bir düzgün tekil noktalı ikinci basamaktan

$$L(y) = t^2 y'' + tp(t)y' + q(t)y = 0 \quad (5.3.19)$$

diferansiyel denkleminin seri çözümleri, örnekteki gibi incelenebilir. $|t| < R$ için $p(t)$ analitik

fonksiyonlarının seri açılımları,

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k, \quad q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k t^k$$

olsun. y , (5.3.14) biçiminde bir fonksiyon ise y' ve y'' türevleri (5.3.15) ile verilir.

$$\begin{aligned} tp(t)y'(t) &= t \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + k) c_k t^{\alpha+k-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (\alpha + k) c_k p_{n-k} \right) t^{\alpha+1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} q(t)y(t) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\alpha+k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n c_k q_{n-k} \right) t^{\alpha+n} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerler (5.3.19) denklemi de yerine yazılıp t nin kuvvetlerine göre düzenlenirse,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_n t^{\alpha+n} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (\alpha+n)(\alpha+n-1)c_n + \sum_{k=0}^{\infty} [(\alpha+k)p_{n-k} + q_{n-k}] c_k \right\} t^{\alpha+n} = 0 \quad (5.3.23)$$

bulunur. Sıfır fonksiyonun katsayıları sıfır olacağından, $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_n + \sum_{k=0}^n [(\alpha+k)p_{n-k} + q_{n-k}] c_k = 0 \quad (5.3.20)$$

$c - a = 0$ için,

$$[\alpha(\alpha-1) + \alpha p_0 + q_0] c_0 = 0$$

ise $c_0 \neq 0$ olduğundan, α nın aranılan değerleri,

$$F(\alpha) = \alpha(\alpha-1) + \alpha p_0 + q_0 = 0$$

indis denkleminin kökleridir. α_1 ve α_2 ile gösterilen kökler, (5.3.19) denkleminin düzgün tekil noktadaki üsleridir. $n \geq 1$ için c_n katsayılarının gerçekleştiği (4.3.20) indirgeme bağıntısı,

$$[(\alpha+n)(\alpha+n-1) + (\alpha+n)p_0 + q_0] c_n = - \sum_{k=0}^{n-1} [(\alpha+k)p_{n-k} + q_{n-k}] c_k \quad (5.3.21)$$

biçiminde yazılabilir. Bunun sol tarafı $F(\alpha+n)c_n$ dir.

$$G_n(k, \alpha) = (\alpha+k)p_{n-k} + q_{n-k}$$

olmak üzere,

$$F(\alpha+n)c_n = - \sum_{k=0}^{n-1} F_n(k, \alpha)c_k \quad (n \geq 1)$$

dır. α_1 ve α_2 için $F(\alpha+n) \neq 0$ olduğundan, c_n katsayıları (5.3.22) indirgeme bağıntısı ile c_0 cinsinden belirlenir. (4.3.19) denkleminin çözümleri, α_1 ve α_2 üslerine bağlı olarak irdelenir.

ÖRNEK 5.3.5. $4xy'' + 2y' + y = 0$

$x = 0$ bir aykırı noktadır. O halde Frobenius serisini kullanacağız.

$$y = \sum c_r x^{m+r}, y' = \sum (m+r)x^{m+r-1}, y'' = \sum (m+r)(m+r-1)c_r x^{m+r-2}$$

olduğundan bu değer diferansiyel denklemde yerlerine konursa denklemin özdeş olarak sağlanması gerekir. (Bütün toplamalar r üzerine ve sıfırdan sonsuza kadardır.)

$$4xy'' + 2y' + y = \sum 4(m+r)(m+r-1)c_r x^{m+r-1} - \sum 2(m+r)c_r x^{m+r-1} - \sum c_r x^{m+r} \equiv 0$$

veya ilk iki terimi toplayarak

$$\sum_{r=0}^m 2(m+r)(2m+2r-1)c_r x^{m+r-1} + \sum_{r=0}^m c_r x^{m-r} \equiv 0 \quad (5.3.23)$$

buluruz.

Bu ifade özdeş olarak sağlamalı, yani o x in artan kuvvetlerine göre tanzim edildiğinde x in bütün kuvvetlerinin katsayıları ayrı sıfır etmelidir. (5.3.23) te, $r=0, 1, 2, \dots$ koyarak ifadeyi şu şekilde ifade edebiliriz.

$$2c_0 m(2m-1)x^{m+1} + [2c_1(m+1)(2m+1) + c_0]x^m + [2c_2(m+1)(2m+3) + c_1]x^{m+1} \\ + \dots [2c_{r-1}(m+r+1)(2m+2r+1) + c_r]x^{m+r} + \dots \equiv 0$$

Buradan bütün katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşit kılarak

$$2m(2m-1)c_0 = 0 \quad (5.3.24)$$

$$2(m+1)(2m+1)c_1 + c_0 = 0$$

$$2(m+2)(2m+3)c_2 + c_1 = 0 \quad (5.3.25)$$

$$2(m+r+1)(2m+2r+1)c_{r-1} + c_r = 0$$

indirgeme formüllerini bulalım.

c_0 Frobenius serisinin birinci katsayısı olduğundan onun sıfırdan farklı olduğunu farz edebiliriz. Çünkü aksi halde birinci katsayısı c_1 olan

$$x^{m+1}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots)$$

şeklinde yine bir Frobenius serisi elde ederdik. Bu ikinci seride sadece m yerine m+1 gelmiştir.

Fakat m indisi henüz belirsiz olduğundan bu yeni seri karakter itibariyle farklı değildir. ($m-1=m$ yazılabilir.) $c_0 \neq 0$ olduğuna göre (5.3.24) den

$$m = 0$$

veya

$$m = 1/2 \text{ buluruz.}$$

Böylece m indisi belirlenmiştir. m indisini belirlemeye yarayan ve (5.3.23) te küçük üslü terimin katsayısını sıfıra eşitlemekle elde edilen (5.3.24) denklemine *indisel denklem* denir.

Artık m nin bu değerleri (5.3.25) denklemlerinde kullanılabilir.

Bu denklemler $m=0$ için

$$c_1 = -\frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 1} c_0$$

$$c_2 = -\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} c_1$$

$$c_3 = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} c_2$$

.....

$$c_r = -\frac{1}{2r(2r-1)} c_{r-1}$$

verirler.

Bunlar taraf tarafa çarpılırsa her iki yanda bulunan $c_1, c_2, \dots, c_{r-1}$ ile bölünerek,

$$c_r = \frac{(-1)^r}{2^r \cdot r! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2r-1)} c_0 = \frac{(-1)^r 2^r \cdot r!}{2^r \cdot r! \cdot (2r)!} c_0 = \frac{(-1)^r}{(2r)!} c_0$$

genel formülü bulunur.

Şimdi

$$y = x^m (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$

Frobenius serisinde $m = 0$ ve c lerin değerleri yerlerine konursa

$$y_1 = c_0 \left(1 - \frac{x}{2!} - \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} \right)$$

serisi elde edilir ki x in her değeri için yakınsak olduğundan bir çözümdür.

y_1 çözümünün $c_0 \cos \sqrt{x}$ ten ibaret olduğu kolayca görülür c_0 keyfidir.

Aynı sebeple $m=1/2$ için (5.3.25) indirgeme formüllerinden

$$c_1 = -\frac{1}{3.2}c_0$$

$$c_2 = -\frac{1}{5.4}c_1$$

$$c_3 = -\frac{1}{7.6}c_2$$

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (5.3.1.1)$$

$$c_r = \frac{1}{(2r+1)2r}c_{r-1}$$

bulunur ve bunları taraf tarafa çarparsak

$$c_r = \frac{(-1)^r}{(2r+1)!}c_0 \quad (5.3.1.2)$$

genel formülünü elde ederiz.

O halde

$$y_2 = c_0 x^{1/2} \left(1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \dots \right)$$

olur. Bu seri de x in her değeri için yakınsak olduğundan ikinci bir çözümdür. y_2 nin de $c_0 \sin \sqrt{x}$ olduğu aşıkardır.

Böylece genel integrali

$$y = Ay_1 + By_2$$

$$= A \cos \sqrt{x} + B \sin \sqrt{x}$$

tir. Keyfi olan c_0 yerine birinci çözümde A ikincide B alınmıştır.

Genel olarak indisel denklemin kökleri farklı ve aralarındaki fark bir tam sayıya eşit değilse y_1 ve y_2 gibi bağımsız iki Frobenius serisi elde edilir. Bu seriler kendi yakınsaklık aralıkları içindeki x ler için çözümdürler ve genel çözüm

$$y = Ay_1 + By_2$$

şeklinde yazılır. Bu son ifade iki serinin ortak yakınsaklık aralığı içinde bir çözümdür ve iki keyfi sabit ihtiva ettiği için genel çözümdür.

5.3.1 İndisel Denklemin Köklerinin Eşit Olması Hali

İndisel denklemin iki kökü birbirine eşitse yukarıda elde edilen y_1, y_2 çözümleri aynı olur ve Frobenius tipinde yalnız bir seri elde edilmiş olur. Başka bir deyimle iki özel çözüm artık bağımsız değildirler. Genel çözüm yazabilmek için bağımsız ikinci bir çözüm bulmak gereklidir. Bu Frobenius yöntemi ile yapılır.

Yöntemin nasıl kullanıldığı aşağıdaki örnek üzerinde gösterilecektir.

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (5.3.1.1)$$

sıfırıncı mertebeden Bessel denklemini ele alalım. Diferansiyel denklemde

$$y = \sum c_r x^{m+r} \text{ koyarsak}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r (m+r)^2 x^{m+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{m+r+1} \equiv 0 \quad (5.3.1.2)$$

ifadesini buluruz. Bunu x in artan kuvvetlerine göre düzenleyelim

$$c_0 m^2 x^{m-1} + c_1 (m+1)^2 x^m + [c_2 (m+2)^2 + c_0] x^{m+1} + \dots + [c_{r+2} (m+r+2)^2 + c_r] x^{m+r+1} + \dots \equiv 0 \quad (5.3.1.3)$$

İlk iki terimden sonra gelen bütün terimlerin katsayıları genel

$$c_{r+2} (m+r+2)^2 + c_r = 0 \quad (5.3.1.3)$$

indirgeme formülünden elde edilebilir. ($r=0, 1, 2, \dots$). İki iki katsayı buradan bulunamaz. Çünkü $r=0$ için (5.3.1.2) nin ilk terimi en küçük üslü terimi verir. Bunun derecesi $m-1$ dir. İkinci toplamdan böyle bir terim elde edilemez. Aynı suretle $r=1$ için (5.3.1.2) nin ilk toplamından ikinci yüksek dereceden terim $c_1 (m+1)^2 x^m$ bulunur. Böyle bir terim de ikinci toplam da yoktur. Fakat $m+1$ ve daha yüksek dereceden terimler her iki toplamda da vardır. İndisel denklem

$$c_0 m^2 = 0 \quad (5.3.1.4)$$

olup her iki kökü de sıfırdır. $c_0 \neq 0$ farz edilecektir. İkinci yüksek terimin ortadan kalkması için $c_1 (m-1)^2 = 0$ olmalıdır. $m=0$ için $(m-1)^2 \neq 0$ olduğundan $c_1=0$ olması gerekir. (5.3.1.3)

genel indirgeme formülü $c_{r+2} = -\frac{1}{(m+r+2)^2} c_r$ dir. $c_3=c_5=\dots=c_{2r-1}=\dots=0$ verir. Yani

bütün tek indisli katsayılar sıfırdır.

Çift indisli

$$c_2 = -\frac{1}{(m+2)^2} c_0$$

$$c_4 = -\frac{1}{(m+4)^2} c_2$$

$$c_6 = -\frac{1}{(m+6)^2} c_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$c_{2r} = \frac{1}{(m+2r)^2} c_{2r-2}$$

olur. Taraf tarafa çarparsak

$$c_{2r} = \frac{(-1)^r}{(m+2)^2 (m+4)^2 \dots (m+2r)^2} c_0$$

buluruz. Bu değerleri Frobenius serisinde yerlerine koyarsak

$$Z = c_0 x^m \left[1 - \frac{x^2}{(m+2)^2} + \frac{x^4}{(m+2)^2 (m+4)^2} - \frac{x^6}{(m+2)^2 (m+4)^2 (m+6)^2} + \dots \right] \quad (5.3.1.5)$$

ifadesini elde ederiz. Bu seriyi Z ile gösterelim. Bu seri yazılırken indisel denkleminin kökü $m=0$ kullanılmamış, yalnız (5.3.1.3) genel indirgeme formülünden faydalanılmıştır. $m=0$ için

$$(Z)_{m=0} = c_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right) = c_0 y_1 \quad (5.3.1.6)$$

bir çözümdür. İkinci bağımsız çözümü bulmak için Frobenius şöyle hareket etmiştir.

Diferansiyel denklemde y yerine Z serisi konursa bu serinin elde edilışinde indisel denklemden başka bütün indirgeme formülleri kullanılmış olduğundan

$$xz'' + z' + xz = c_0 m^2 x^{m-1}$$

elde edilir. Sağ yan $m = 0$ için sıfır olduğu gibi

$$\frac{\partial}{\partial m} (xz'' + z' + xz) = (2c_0 m + c_0 m^2 \log x) x^{m-1}$$

in sağ yanı da $m = 0$ için sıfır eder. Türev operatörleri komütatif olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} + x \right) z = \left(x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} + x \right) \frac{\partial z}{\partial m}$$

ve bununla birlikte hem $(z)_{m=0}$ ve hem de $\left(\frac{\partial z}{\partial m} \right)_{m=0}$ çözümdürler.

İkinci çözüm $\log x$ i ihtiva eder. Şimdi bu ikinci çözümü hesaplayalım. (5.3.1.5) ten

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial m} = & c_0 x^m \log x \left[1 - \frac{x^2}{(m+2)^2} + \dots \right] + c_0 x^m \left\{ \frac{2x^2}{(m+2)^3} \right. \\ & - x^4 \left(\frac{2}{(m+2)^3(m+4)^2} + \frac{2}{(m+2)^2(m+4)^3} \right) + \\ & + x^6 \left(\frac{2}{(m+2)^3(m+4)^2(m+6)^2} + \frac{2}{(m+2)^2(m+4)^3(m+6)^2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{(m+2)^2(m+4)^2(m+6)^3} \right) + \dots \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial m} \right)_{m=0} = & c_0 y_1 \log x + c_0 \left[\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \right. \\ & \left. \frac{x^9}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots \right] = c_0 y_2 \quad (\text{diyelim.}) \end{aligned} \quad (5.3.1.7)$$

buluyoruz ki bu ikinci bağımsız çözümdür. Genel çözüm

$$y = Ay_1 + By_2$$

şeklinde olur. u_1 ve u_2 sırasıyla (5.3.1.6) ve (5.3.1.7) ile verilmiştir.

ÖRNEK 5.3.6. $x^2 y'' - xy' + (x^2 + 1)y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Verilen diferansiyel denklem

$$y'' - \frac{x}{x^2} y' + \frac{(x^2 + 1)}{x^2} y = 0$$

şeklinde yazılır. Burada $x=0$ noktası bir düzgün tekil noktadır. Buna göre söz konusu diferansiyel denklemin çözümü Frobenius yöntemi ile bulunabilir. (5.3.1) numaralı seriyi göz önüne alıp, çözüme başlanırsa,

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r}$$

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} (k+r) a_r x^{k+r-1}$$

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) a_r x^{k+r-2}$$

olur.

(y) fonksiyonu ve türevleri diferansiyel denklemde yerlerine konarak,

$$x^2 \sum_{r=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) a_r x^{k+r-2} - x \sum_{r=0}^{\infty} (k+r) a_r x^{k+r-1} + (x^2 + 1) \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) a_r x^{k+r} - \sum_{r=0}^{\infty} (k+r) a_r x^{k+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r+2} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} [(k+r)(k+r-1) - (k+r) + 1] a_r x^{k+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r+2} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} [(k+r)(k+r-2) + 1] a_r x^{k+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r+2} = 0$$

bulunur.

Son eşitlik (x) in kuvvetlerine göre düzenlenerek

$$[k(k-2) + 1] a_0 x^k + [(k+1)(k-1) + 1] a_1 x^{k+1} +$$

$$\sum_{r=2}^{\infty} [(k+r)(k+r-2) + 1] a_r x^{k+r} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r+2} = 0$$

üçüncü kısımdaki seride r yerine r+2 koyup r'yi sıfırdan başlatarak

$$(k^2 - 2k + 1) a_0 x^k + [(k^2 - 1) + 1] a_1 x^{k+1} +$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} [(k+r+2)(k+r+2-2) + 1] a_{r+2} x^{k+r+2} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r+2} = 0$$

$$(k-1)^2 a_0 x^k + k^2 a_1 x^{k+1} + \sum_{r=0}^{\infty} \{ [(k+r+2)(k+r) + 1] a_{r+2} + a_r \} x^{k+r+2} = 0$$

elde edilir.

Bilindiği gibi $a_0 \neq 0$ farz edilmektedir. Dolayısıyla indisel denklem,

$$(k-1)^2 = 0$$

olup, $k_1 = k_2 = 1$ şeklinde eşit iki kökü vardır. Bu durumda y_1 ve y_2 çözümlerinin bulunuşu aşağıda gösterilmiştir. Şöyle ki;

1) $k_1 = 1$ için $a_0 \neq 0$ farz edilmişti.

$(k^2 \cdot a_1 = 0)$ şeklindeki ikinci denklemde $k = k_1 = 1$ alınırsa (1) . $a_1 = 0$ olup, eşitliğin gerçekleşmesi için $a_1 = 0$ olmalıdır.

Diğer katsayılar için rekürans formülü

$$[(k+r+2)(k+r)+1]a_{r+2} + a_r = 0$$

$$a_{r+2} = -\frac{a_r}{[(k+r+2)(k+r)+1]} \equiv -\frac{a_r}{(k+r+1)^2}$$

dir.

Bu formülden katsayılar hesaplanırsa, tek indisli katsayıların sıfır olduğu görülür. Buna göre

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2r-1} = \dots = 0 \text{ dır.}$$

Çift indisli katsayılar gelince,

$$a_2 = -\frac{a_0}{(k+1)^2}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{(k+3)^2}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{(k+5)^2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{2r} = -\frac{a_{2r-2}}{(k+2r-1)^2}$$

olup, kolonlardaki elemanlar tara tarafa çarpılırsa, çift indisli katsayılar ait genel formül

$$a_{2r} = \frac{(-1)^r a_0}{(k+1)^2 (k+3)^2 (k+5)^2 \dots (k+2r-1)^2}$$

bulunur. Söz konusu genel formülden çift indisli katsayılar hesaplanırsa,

$$a_2 = -\frac{a_0}{(k+1)^2} \quad (5.3.1.9)$$

$$a_4 = \frac{a_0}{(k+1)^2(k+3)^2}$$

$$a_6 = -\frac{a_0}{(k+1)^2(k+3)^2(k+5)^2}$$

olur. (5.3.1) numaralı seriyi tekrar göz önüne alalım,

$$y = x^k \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = x^k (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$

dir. Yukarıda (k) cinsinden ifade edilen katsayıları, söz konusu (5.3.1) numaralı seride yerlerine koyup buna göre elde edilen seriyi ($\bar{y}$) ile gösterirsek,

$$\bar{y} = a x^k \left[1 - \frac{x^2}{(k+1)^2} + \frac{x^4}{(k+1)^2(k+3)^2} - \frac{x^6}{(k+1)^2(k+3)^2(k+5)^2} + \dots \right]$$

bulunur. Katsayılar rekürans formülünden elde edildiğinden ($\bar{y}$) serisi,

$$x^2 \bar{y}'' - \bar{y}' + (x^2 + 1) \bar{y} = (k-1)^2 a_0 x^k \quad (5.3.1.8)$$

şeklindeki diferansiyel denklemi gerçekler. Ancak (5.3.1.8) denkleminden $k = k_1 = 1$ değeri için bir tane özel çözüm elde edilebilir. Bununla beraber ($\bar{y}$) serisini (x) ve (k) bağımsız değişkenlerinin fonksiyonu olarak göz önüne alıp, türev operatörünün yer değiştirme (commutative) özelliğinden yararlanarak

$$\frac{\partial \bar{y}'}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} \right) = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} \right)'$$

ve

$$\frac{\partial \bar{y}''}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} \right) = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} \right)''$$

yazılabilir.

Yukarıdaki (5.3.1.8) numaralı denklemin (k) ya göre türevini alırsak,

$$x^2 \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} \right)' - x \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} \right)' + (x^2 + 1) \frac{\partial \bar{y}}{\partial k} = 2(k-1)a_0 x^k + (k-1)^2 a_0 x^k \ln x \quad (5.3.1.9)$$

olur ve $\frac{\partial \bar{y}}{\partial k}$ çözümü (I) numaralı denklemleri gerçekler. (5.3.1.8) ve (5.3.1.9) numaralı

denklemlerden anlaşılacağı gibi $k=k_1=1$ için $y_1 = (\bar{y})_{k=1}$ ve $y_2 = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} \right)_{k=1}$ serileri verilen

diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleridir. Burada a_0 keyfi sabiti $a_0=1$ alınabilir.

Dolayısıyla $k=1$ ve $a_0=1$ için y_1 özel çözümü,

$$y_1 = (\bar{y})_{k=1}$$

$$y_1 = x \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right)$$

veya

$$y_1 = x \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 \cdot (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6 \cdot (3!)^2} + \dots \right)$$

olur.

İkinci lineer bağımsız y_2 çözümünü hesaplamak için $(\bar{y})$ serisini tekrar yazarsak

$$\bar{y} = a_0 x^k \left(1 - \frac{x^2}{(k+1)^2} + \frac{x^4}{(k+1)^2 (k+3)^2} - \frac{x^6}{(k+1)^2 (k+3)^2 (k+5)^2} + \dots \right)$$

dir. Söz konusu $(\bar{y})$ serisinin k ya göre türevini alalım.

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} = a_0 \left(\frac{\partial x^k}{\partial k} \right) \left[1 - \frac{x^2}{(k+1)^2} + \dots \right] + a_0 x^k \frac{\partial}{\partial k} \left[1 - \frac{x^2}{(k+1)^2} + \frac{x^4}{(k+1)^2 (k+3)^2} - \frac{x^6}{(k+1)^2 (k+3)^2 (k+5)^2} + \dots \right]$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial k} = x^k \ln x \text{ olduğundan}$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} = a_0 x^k \ln x \left[1 - \frac{x^2}{(k+1)^2} + \frac{x^4}{(k+1)^2 (k+3)^2} + \dots \right] +$$

$$a_0 x^k \left\{ \frac{2x^2}{(k+1)^3} - 2x^4 \left[\frac{1}{(k+1)^3(k+3)^2} + \frac{1}{(k+1)^2(k+3)^3} \right] + \right. \\ \left. 2x^6 \left[\frac{1}{(k+1)^3(k+3)^2(k+5)^2} + \frac{1}{(k+1)^2(k+3)^3(k+5)^2} + \frac{1}{(k+1)^2(k+3)^2(k+5)^3} \right] + \dots \right\}$$

elde edilir. Söz konusu $\left(\frac{\partial y}{\partial k} \right)$ ifadesinde $k=1$ ve $a_0=1$ alınarak y_2 özel çözümü,

$$y_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial k} \right)_{k=1}$$

$$y_2 = x \operatorname{Lnx} \left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots \right] + \\ x \left\{ \frac{x^2}{2^2} - x^4 \left[\frac{1}{2^4 \cdot (2!)^2} + \frac{1}{2 \cdot 2^4(2!)^2} \right] + x^6 \left[\frac{1}{2^6(3!)^2} + \frac{1}{2^6 \cdot (3!)^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^6 \cdot (3!)^2 \cdot 3} \right] - \dots \right\} \\ = x \operatorname{Lnx} \left[1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 \cdot (2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots \right] + x \left[\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^4 \cdot (2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^6}{2^6 \cdot (3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right]$$

olur.

Söz konusu y_1 ve y_2 özel çözümleri lineer bağımsız çözümlerdir. Diferansiyel denklemin y genel çözümü ise, y_1 ve y_2 çözümlerinin keyfi sabitlerle ifade edilen lineer kombinezonudur.

Buna göre,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

olup, y_1 ve y_2 değerleri yerlerine konarak,

$$y = c_1 x \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots \right) + c_2 x \left\{ \operatorname{Lnx} \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots \right) + \right. \\ \left. \left[\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^4(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^6}{2^6(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right] \right\}$$

veya

$$y = (c_1 + c_2 \operatorname{Lnx}) x \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots \right) +$$

$$c_2 x \left[\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots \right]$$

bulunur. Söz konusu (y) çözümü $0 < x < +\infty$ aralığında yakınsaktır.

5.3.2. İndisel Denkleminin Kökleri Arasındaki Farkın Bir Tam Sayı Olması Hali

Bu hali ikiye ayırmak mümkündür. (a) ile göstereceğimiz birinci halde belli bir terimden itibaren serinin bütün katsayıları (paydada sıfır eden bir çarpandan dolayı) sonsuz olur. (b) ile göstereceğimiz ikinci halde bir katsayı belirsiz (keyfi) olur. Her iki halde çözümün nasıl tamamlanacağını örnekler üzerinde anlatacağız

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0 \quad (5.3.2.1)$$

bu, birinci mertebeden Bessel denklemidir. (n inci mertebeden Bessel denklemi

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \text{ dir.})$$

y yerine $z = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{m+r}$ koyalım:

$$\sum c_r (m+r)(m+r-1)x^{m+r} + \sum c_r (m+r)x^{m+r} + \sum c_r x^{m+r+2} - \sum c_r x^{m+r} \equiv 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r [(m+r)^2 - 1] x^{m+r} + \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{m+r+2} \equiv 0$$

İlk toplamda ikinci de bulunmayan iki küçük üslü terim vardır. Bunları ayıralım ve geri kalanları ikinci toplamla birleştirelim.

$$c_0 (m^2 - 1)x^m + c_1 [(m+1)^2 - 1]x^{m+1} + \sum_{r=0}^{\infty} \{c_{r+2} [(m+r+2)^2 - 1] + c_r\} x^{m+r+2} \equiv 0$$

indisel denklem

$$m^2 - 1 = 0$$

olup kökleri +1 ve -1 dir. Bu değerlerle ikinci terimin ortadan kalkması, yani

$$c_1 [(m_1 + 1)^2 - 1] = 0 \text{ olması için } c_1 = 0 \text{ olması gerekir. Genel olarak}$$

$$c_{r+2} = \frac{1}{(m+r+1)(m+r+3)} c_r \quad (5.3.2.2)$$

olup $c_1 = 0$ olduğundan her r için $c_{2r-1} = 0$ dir. Çift indisli katsayılar için

$$c_2 = \frac{-1}{(m+1)(m+3)} c_0$$

$$c_4 = \frac{-1}{(m+3)(m+5)} c_2$$

$$c_6 = \frac{-1}{(m+5)(m+7)} c_4$$

$$c_{2r} = \frac{-1}{(m+2r+1)(m+2r+3)} c_{2r-2}$$

buluruz. Bunları taraf tarafa çarparsak

$$c_{2r} = \frac{(-1)^r}{(m+1)(m+3)^2(m+5)^2 \dots (m+2r-1)^2(m+2r+1)}$$

genel ifadesini elde ederiz.

O halde (z) serisi

$$z = c_0 x^m \left[1 - \frac{x^2}{(m+1)(m+3)} + \frac{x^4}{(m+1)(m+3)^2(m+5)} - \frac{x^6}{(m+1)(m+3)^2(m+5)^2(m+7)} + \dots \right] \quad (5.3.2.3)$$

olur. Bu seri $m=1$; $c_0=A$ için

$$(z)_{m=1} = Ax \left[1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right] = Ay_1$$

çözümünü verir. Fakat $m=-1$ için ikinciden itibaren bütün katsayılar sonsuz olur. Bunu yapan paydadaki $m+1$ çarpanıdır. İkinci bağımsız çözümü bulmak için Frobenius şöyle hareket etmiştir.

c_0 sıfırdan farklı keyfi bir sabit olduğundan $c_0 = (m+1)k$ alabiliriz, k yine keyfi bir sabittir.

(5.3.2.3) serisini elde etmek için indisel denklemden başka bütün indirgeme formülleri kullanılmıştı. Şu halde diferansiyel denklemde y yerine bu seri konursa sağ yanda yalnız

$$c_0(m^2 - 1)x^m$$

dan ibaret olan iki terim kalacaktır. $D=d/dx$ ise

$$\left[x^2 D^2 + xD + (x^2 - 1) \right] z = c_0 (m^2 - 1) x^m$$

veya

$$\left[x^2 D^2 + xD + (x^2 - 1) \right] z = k(m+1)(m^2 - 1) x^m$$

veya

$$\left[x^2 D^2 + xD + (x^2 - 1) \right] z = k(m+1)^2 (m-1) x^m$$

Sağdaki $m = \pm 1$ için sıfır ettiği gibi $m+1$ çarpanı ikinci dereceden olduğundan m ye göre türevi de $m = -1$ için sıfırdır. Böylece

$$(z)_{m=1} ; (z)_{m=-1}$$

birer çözüm olduğu gibi

$$\frac{\partial}{\partial m} \left[x^2 D^2 + xD + (x^2 - 1) \right] z = \left[x^2 D^2 + xD + (x^2 - 1) \right] \frac{\partial z}{\partial m}$$

den dolayı $\left(\frac{\partial z}{\partial m} \right)_{m=-1}$ de bir çözümdür.

$(z)_{m=+1}$ yi yukarıda hesaplamıştık.

$(z)_{m=-1}$ i hesaplamak için ilk olarak (5.3.2.3) te $c_0 = k(m+1)$ koyup $(m+1)$ i parantez içine alalım.

$$z = kx^m \left[m+1 - \frac{x^2}{m+3} + \frac{x^4}{(m+3)^2(m+5)} - \frac{x^6}{(m+3)^2(m+5)^2(m+7)} + \dots \right] \quad (5.3.2.4)$$

buluruz. Şimdi $m=-1$ koyarsak

$$(z)_{m=-1} = kx^{-1} \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots \right]$$

elde ederiz.

Şimdi $\frac{\partial z}{\partial m}$ yi bulalım. (5.3.2.4) ten

$$\frac{\partial z}{\partial m} = kx^m \log x \left[m+1 - \frac{x^2}{m+3} + \frac{x^4}{(m+3)^2(m+5)} - \dots \right]$$

$$+ kx^m \left\{ 1 + \frac{x^2}{(m+3)^2} - x^4 \left[\frac{2}{(m+3)^3(m+5)} + \frac{1}{(m+3)^2(m+5)^2} \right] \right\}$$

$$+ x^6 \left[\frac{2}{(m+3)^3(m+5)^2(m+7)} + \frac{2}{(m+3)^2(m+5)^3(m+7)} \right] + \frac{1}{(m+3)^2(m+5)^3(m+7)^2} - \dots \}$$

buluruz. O halde

$$\left(\frac{\partial z}{\partial m} \right)_{m=-1} = (z)_{m=-1} \cdot \log x + kx^{-1} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2^2} - \frac{1}{2^2 \cdot 4} \left[\frac{2}{2} + \frac{1}{4} \right] x^4 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} \left[\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \right] x^6 - \dots \right\}$$

olur.

Böylece ikinci mertebeden olan bir diferansiyel denklemin üç ayrı çözümünü bulmuş oluyoruz. Bu üç çözüm bağımsız olamazlar. Çünkü ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemin bağımsız özel çözümlerinin sayısı ikiden fazla olamaz. Gerçekten $(z)_{m=1}$ ile $(z)_{m=-1}$ in oranlarının sabit olduğu gösterilebilir. $m=+1$ için $c_0=(m+1)k=2k$ olduğundan bunlar arasında $(z)_{m=1}=-4(z)_{m=-1}$ bağıntısı vardır. O halde bağımsız çözüm olarak

$$(z)_{m=1} \text{ ve } \left(\frac{\partial z}{\partial m} \right)_{m=-1}$$

alınabilir ve genel çözüm

$$y = A(z)_{m=1} + B \left(\frac{\partial z}{\partial m} \right)_{m=-1}$$

olarak yazılır. İkinci çözüm $\log x$ i ihtiva eder.

$$\text{b) } (1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \quad (5.3.2.5)$$

Bu, birinci mertebeden Legendre denklemidir. (n yinci mertebeden Legendre denklemi $(1-x)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ dir.)

y yerine $z = \sum c_r x^{m+r}$ Frobenius serisini koyalım.

$$\sum c_r (m+r)(m+r-1)x^{m+r-2} - x^{m+r} - 2 \sum c_r (m+r)x^{m+r} + 2 \sum c_r x^{m+r} = 0$$

veya

$$\sum c_r (m+r)(m+r-1)x^{m+r-2} - \sum c_r [(m+r)(m+r+1)-2]x^{m+r} \equiv 0$$

buluruz. Bütün toplamalar 0 dan ∞ a kadardır.

Birinci toplamda bulunan en küçük üslü iki terimi ayıralım.

$$c_0 m(m-1)x^{m-2} + c_1 m(m+1)x^{m-1} + \sum_{r=0}^{\infty} c_{r+2}(m+r+2)(m+r+1) - c_r(m+r+2)(m+r-1) \} x^{m+r} \equiv 0 \quad (5.3.2.6)$$

olur. İndisel denklem

$$m(m-1) = 0$$

olup kökleri 0 ve 1 dir (farkları bir tam sayı). $m=0$ için ikinci terimde c_1 in katsayısı sıfır olduğundan c_1 keyfi kalır. Halbuki $m=1$ için $c_1=0$ olmalıdır. Genel indirgeme formülü

$$c_{r+2} = \frac{m+r-1}{m+r+1} c_r \quad (5.3.2.7)$$

olup $m=0$ için

$$c_{r+2} = \frac{r-1}{r+1} c_r$$

olur. Buradan $c_2 = -c_0$, $c_3 = 0$ elde ederiz. Şu halde c_1 den sonra gelen bütün tek indisli katsayılar sıfıra eşittir. $c_{2r-1} = 0$; ($r=2,3$)

Çift indislilere gelince

$$c_2 = -c_0$$

$$c_4 = 1/3 c_2$$

$$c_6 = 3/5 c_4$$

$$c_{2r} = \frac{2r-3}{2r-1} c_{2r-2}$$

$$c_{2r} = \frac{1}{2r-1} c_0$$

bulunur. Böylece

$$z = c_0 + c_1 x - c_0 x^2 - \frac{1}{3} c_0 x^4 - \frac{1}{5} c_0 x^6 - \dots$$

$$= c_1 x + c_0 \left(1 - x^2 - \frac{1}{3} x^4 - \frac{1}{5} x^6 - \dots \right)$$

çözümü elde edilir. İki keyfi sabit ihtiva eden bu çözüm genel çözümdür. Şu halde indisel denklemin yalnız $m=0$ kökü kullanılarak diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmak mümkün olmuştur. Acaba ikinci $m=1$ kökü ne verir? Bunu araştıralım. (5.3.2.7) genel indirgeme formülünden $m=1$ için

$$c_{r+2} = \frac{r}{r+2} c_r \quad (5.3.2.8)$$

buluruz. O halde

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{2} c_1 \quad (5.3.2.8)$$

olup bu halde $c_1=0$ olduğundan $c_3=0$ bulunur. Bu takdirde (5.3.2.8) formülü $c_r=0$; ($r=2, 3, \dots$) verir. O halde sıfır olmayan tek katsayı c_0 olup z serisi $m=1$ için

$$z = c_0 x$$

çözümünü verir. Bu çözüm yukarıda $m=0$ için bulunan özel çözümlerden birisidir. Yani indisel denklemin $m=1$ kökü bağımsız bir çözüm vermez. Küçük köke ($m=0$) karşılık olan çözüm, iki keyfi sabit ihtiva ettiğinden, denklemin genel çözümüdür.

ÖRNEK 5.3.2.1. $xy'' - 2y' + y = 0$

diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Verilen diferansiyel denklem

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{1}{x} y = 0$$

Şeklinde yazılabilir. Söz konusu diferansiyel denklemde, $x=0$ noktası bir düzgün tekil noktadır. Söz konusu diferansiyel denklemin $x=0$ noktası civarında seri şeklinde çözümü Frobenius metoduna göre bulunabilir. Bunun için (5.3.1) numaralı seriyi göz önüne alarak çözüme başlanırsa,

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r}$$

$$y' = \sum_{r=0}^{\infty} (k+r) a_r x^{k+r-1}$$

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) a_r x^{k+r-2}$$

dir. (y) fonksiyonu ve türevleri diferansiyel denklemde yerlerine konarak

$$x \sum_{r=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)a_r x^{k+r-2} - 2 \sum_{r=0}^{\infty} (k+r)a_r x^{k+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)a_r x^{k+r-1} - 2 \sum_{r=0}^{\infty} (k+r)a_r x^{k+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} [(k+r)(k+r-1) - 2(k+r)]a_r x^{k+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} [(k+r)(k+r-3)]a_r x^{k+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} = 0$$

bulunur. Elde edilen denklem (x) in kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$k(k-3)a_0 x^{k-1} + \sum_{r=1}^{\infty} [(k+r)(k+r-3)]a_r x^{k+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{k+r} = 0$$

dir. İkinci kısımdaki seride r yerine r+1 koyup (r) yi sıfırdan başlatarak

$$k(k-3)a_0 x^{k-1} + \sum_{r=0}^{\infty} [(k+r+1)(k+r-2)]a_{r+1} + a_r x^{k+r} = 0$$

bulunur.

Burada $a_0 \neq 0$ farz edilmektedir. İndisel denklem ise

$$k(k-3) = 0$$

olup, kökleri $k_1=0$ ve $k_2=3$ 'tür. Görüldüğü gibi k_1 ve k_2 kökleri arasındaki fark tam sayıdır.

Burada, söz konusu tam sayı $k_2 - k_1 = 3$ 'tür.

Diğer katsayıların hesap edilmesi için rekürans formülü:

$$(k+r+1)(k+r-2)a_{r+1} + a_r = 0$$

veya

$$a_{r+1} = -\frac{a_r}{(k+r-2)(k+r+1)} \quad \text{dir. Buna göre}$$

$$a_1 = -\frac{a_0}{(k-2)(k+1)}$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{(k-1)(k+2)}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{k(k+3)}$$

$$a_r = -\frac{a_{r-1}}{(k+r-3)(k+r)}$$

elde edilir. Kolonlardaki terimler taraf tarafa çarpılarak,

$$a_r = \frac{(-1)^r a_0}{(k-2)(k+1)(k-1)(k+2)k(k+3)\dots(k+r-3)(k+r)}$$

genel formülü bulunur. Söz konusu genel formülden katsayılar hesaplanırsa ($r=1,2,3, \dots$ için)

$$a_1 = -\frac{a_0}{(k-2)(k+1)}$$

$$a_2 = \frac{a_0}{(k-2)(k+1)(k-1)(k+2)} = \frac{a_0}{(k^2-4)(k^2-1)}$$

$$a_3 = \frac{a_0}{(k-2)(k+1)(k-1)(k+2)k(k+3)} = -\frac{a_0}{k(k^2-4)(k^2-1)(k+3)}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{(k-2)(k+1)(k-1)(k+2)k(k+3)(k+1)(k+4)}$$

$$= \frac{a_0}{k(k^4-5k^2+4)(k^3+8k^2+19k+12)}$$

$$a_5 = -\frac{a_5}{(k-2)(k+1)(k-1)(k+2)k(k+3)(k+1)(k+4)(k+2)(k+5)}$$

$$= -\frac{a_0}{k(k^4-5k^2+4)(k^3+8k^2+19k+12)(k^2+7k+10)}$$

olur. Söz konusu katsayıları (5.3.1) numaralı seride yerlerine koyup elde edilen seriyi $(\bar{y})$ ile gösterirsek

$$\bar{y} = a_0 x^k \left[1 - \frac{x}{(k-2)(k+1)} + \frac{x^2}{(k^2-4)(k^2-1)} - \frac{x^3}{k(k^2-4)(k^2-1)(k+3)} + \right. \\ \left. \frac{x^4}{k(k^4-5k^2+4)(k^3+8k^2+19k+12)} \right]$$

$$-\frac{x^5}{k(k^4 - 5k^2 + 4)(k^3 + 8k^2 + 19k + 12)(k^2 + 7k + 10)} + \dots$$

bulunur. $k_2 = 3$ ve $a_0 = 1$ alınarak

$$(\bar{y})_{k=3} = x^3(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{40} - \frac{x^3}{720} + \dots)$$

şeklinde sonlu değerler veren bir seri elde edilmektedir.

Diğer taraftan, $k_1=0$ alınırsa, $(\bar{y})$ serisinde dördüncü terimden itibaren katsayıların sonsuz (∞) olduğu görülür. Dolayısıyla $(\bar{y})$ serisinin bu şekli ile $k_1=0$ küçük köke ait çözüm elde edilememektedir. Bu durumda,

$$a_0 = B_0(k - k_1) = B_0 k$$

alınarak $(\bar{y})$ serisi yeniden yazılırsa,

$$\bar{y} = B_0 k x^k \left[1 - \frac{x}{(k-2)(k+1)} + \frac{x^2}{(k^2-4)(k^2-1)} - \frac{x^3}{k(k^2-4)(k^2-1)(k+3)} + \dots \right]$$

$$= B_0 x^k \left[k - \frac{xk}{(k-2)(k+1)} + \frac{x^2 k}{(k^2-4)(k^2-1)} - \right]$$

$$\frac{x^2}{(k^2-4)(k^2-1)(k+3)} + \frac{x^4}{(k^4-5k^2+4)(k^3+8k^2+19k+12)} -$$

$$\frac{x^5}{(k^4 - 5k^2 + 4)(k^3 + 8k^2 + 19k + 12)(k^2 + 7k + 10)} + \dots$$

olur. Elde edilen $(\bar{y})$ serisi,

$$x\bar{y}'' - 2\bar{y}' + \bar{y} = (k-3)k a_0 x^{k-1} = (k-3)k^2 B_0 x^{k-1} \quad (5.3.2)$$

denklemini gerçektir. Söz konusu (5.3.2.9) numaralı denklemden anlaşılacağı gibi $k_1=0$ için $(\bar{y})_{k=0}$ da verilen diferansiyel denklemin bir çözümüdür. Buna göre, $k_1=0$ ve $B_0=1$ alınarak y_1 özel çözümü,

$$y_1 = (\bar{y})_{k=0} = -\frac{x^3}{4.3} + \frac{x^4}{4.12} - \frac{x^5}{4.12.10} + \dots$$

veya

$$y_1 = \frac{x^3}{12} + \frac{x}{48} - \frac{x^5}{480} + \dots \text{ bulunur.}$$

Diğer taraftan $(\bar{y})_{k=3}$ çözümü ile $y_1=(\bar{y})_{k=0}$ çözümü arasında sabit bir oran mevcuttur. Bu bağıntı hesaplanırsa, $(\bar{y})_{k=3} = -12 (\bar{y})_{k=0}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $(y)_{k=3}$ çözümü diğer bir lineer bağımsız çözüm olarak göz önüne alınamaz.

Öte yandan (5.3.2.9) numaralı denklemin ikinci tarafında k^2 terimi bulunmaktadır. $\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial k}\right)_{k=k_0}$

de verilen diferansiyel denklemin ikinci bir lineer bağımsız çözümüdür. $k=0$ a göre,

$y_2 = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial k}\right)_{k=1}$ özel çözümünü bulmak için $(\bar{y})$ nin türevi alınırsa,

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} = B_0 \left(\frac{\partial x^k}{\partial k} \right) \left[k - \frac{xk}{(k-2)(k-1)} + \frac{x^2k}{(k^2-4)(k^2-1)} - \dots \right] +$$

$$B_0 x^k \frac{\partial}{\partial k} \left[k - \frac{xk}{(k-2)(k-1)} + \frac{x^2k}{(k^2-4)(k^2-1)} - \dots \right]$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial k} = x^k \cdot \text{Ln} x \quad \text{olduğundan}$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} = B_0 x^k \text{Ln} x \left[k - \frac{xk}{(k-2)(k+1)} + \frac{x^2k}{(k^2-4)(k^2-1)} - \frac{x^3}{(k^2-4)(k^2-1)(k+3)} + \dots \right] +$$

$$B_0 x^k \left\{ -\text{Ln} x \left[\frac{1}{(k-2)(k+1)} + \frac{k(2k-1)}{(k-2)^2(k+1)^2} \right] + x^2 \left[\frac{1}{(k^2-4)(k^2-1)} - \frac{2k^2(2k^2-5)}{(k^2-4)^2(k^2-1)^2} \right] - \right.$$

$$(-x^3) \left[\frac{2k}{(k^2-4)^2(k^2-1)(k+3)} + \frac{2k}{(k^2-4)(k^2-1)^2(k+3)} + \frac{1}{(k^2-4)(k^2-1)(k+3)^2} \right] +$$

$$(-x^4) \left[\frac{(4k^3-10k)}{(k^4-5k^2+4)^2(k^3+8k^2+19k+12)} + \frac{(3k^2+16k+19)}{(k^4-5k^2+4)(k^3+8k^2+19k+12)^2} \right] -$$

$$(-x^5) \left[\frac{(4k^3-10k)}{(k^4-5k^2+4)^2(k^3+8k^2+19k+12)(k^2+7k+10)} + \right.$$

$$\left. \frac{(3k^2+16k+19)}{(k^4-5k^2+4)(k^3+8k^2+19k+12)^2(k^2+7k+10)} + \right.$$

$$\left. \frac{(2k+7)}{(k^4-5k^2+4)(k^3+8k^2+19k+12)(k^2+7k+10)^2} \right] + \dots \}$$

olur. Söz konusu $\frac{\partial \bar{y}}{\partial k}$ ifadesinde $k=0$ ve $B_0=1$ alınarak,

$$y_2 = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial k} \right)_{k=0}$$

$$y_2 = \text{Lnx} \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} + \frac{x^5}{480} + \dots \right] + \left\{ 1 - x \left[\frac{1}{(-2).1} \right] + x^2 \left[\frac{1}{(-4).(-1)} \right] + \right. \\ \left. x^3 \left[\frac{1}{(-4).(-1).(3)^2} \right] - x^4 \left[\frac{19}{4.(12)^2} \right] + x^5 \left[\frac{19}{(4).(12)^2.10} + \frac{7}{(4).(12).(10)^2} \right] + \dots \right\} \\ = \text{Lnx} \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^5}{480} + \dots \right] + \left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{36} - \frac{19}{576}x^4 + \frac{137}{28800}x^5 + \dots \right]$$

özel çözümü bulunur. Diferansiyel denklemin genel çözümü ise söz konusu y_1 ve y_2 özel çözümlerinin keyfi lineer kombinasyonudur.

Buna göre; $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

olup y_1 ve y_2 değerleri yerlerine konarak,

$$y = c_1 \left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^5}{480} + \dots \right) + c_2 \left[\text{Lnx} \left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^5}{480} + \dots \right) + \right. \\ \left. \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{36} - \frac{19}{576}x^4 + \frac{137}{28800}x^5 + \dots \right) \right]$$

veya

$$y = (c_1 + c_2 \text{Lnx}) \left(-\frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^5}{480} + \dots \right) + c_2 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{36} - \frac{19}{576}x^4 + \frac{137}{28800}x^5 + \dots \right)$$

elde edilir.

Söz konusu y çözümünün yakınsaklık aralığı $0 < x < +\infty$ dır.

5.3.3 Sonsuzdaki Nokta

Genel olarak

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

şeklindeki (5.1) numaralı diferansiyel denklemin “sonsuzdaki noktası”nın adi veya tekil nokta olup olmadığını anlamak için önce;

$$x = \frac{1}{u}$$

değişken dönüşümü yapılır. Burada $x = \frac{1}{u}$ transformasyonu dolayısıyla $y(x)$ fonksiyonu da $y\left(\frac{1}{u}\right)$ şekline dönüşür. Daha sonra türevlerde hesaplanırsa,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

olup, $x = \frac{1}{u}$ bağlantısından

$$\frac{dx}{du} = -\frac{1}{u^2} \quad \text{veya} \quad \frac{du}{dx} = -u^2 \quad \text{göz önüne alınarak}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot (-u^2) = -u^2 \frac{dy}{du} \quad \text{dır.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d \left(\frac{dy}{du} \right)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du} \left(-u^2 \frac{dy}{du} \right) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left[(-2u) \cdot \frac{dy}{du} + (-u^2) \cdot \frac{d^2y}{du^2} \right] \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \left[(-2u) \cdot \frac{dy}{du} + (-u^2) \cdot \frac{d^2y}{du^2} \right] \cdot (-u^2)$$

$$= u^4 \frac{d^2y}{du^2} + 2u^3 \frac{dy}{du}$$

olur. Söz konusu türevler ve $x = \frac{1}{u}$ değeri (5.1) numaralı diferansiyel denklemde yerlerine konursa,

$$u^4 \frac{d^2y}{du^2} + 2u^3 \frac{dy}{du} + P\left(\frac{1}{u}\right)(-u^2) \frac{dy}{du} + Q\left(\frac{1}{u}\right)y = 0$$

$$u^4 \frac{d^2y}{du^2} + \left[2u^3 - u^2 p\left(\frac{1}{u}\right) \right] \frac{dy}{du} + Q\left(\frac{1}{u}\right)y = 0$$

(5.3.3.1)

bulunur. Elde edilen (4) numaralı diferansiyel denklemde ($u = 0$) noktasının “adi nokta” veya “tekil nokta” olup olmadığı araştırılır. Söz konusu ($u = 0$) noktası tekil nokta ise düzgün olup olmadığına bakılır. Böylece (5.1) numaralı diferansiyel denklemin sonsuzdaki noktasının ($x = \infty$) cinsi belirlenmiş olur. Diğer bir deyişle (5.3.3.1) numaralı diferansiyel denklemin

($u = 0$) noktası adi nokta veya tekil nokta ise, (5.1) numaralı diferansiyel denklemin sonsuzdaki noktası ($x = \infty$) da, aynı şekilde, adi nokta veya tekil nokta olur.

ÖRNEK 5.3.3.1. $(x^2 + 1)y'' + y' + y = 0$

diferansiyel denkleminin sonsuzdaki noktasının cinsini bulumuz.

Verilen diferansiyel denklemde $x = \frac{1}{u}$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -u^2 \cdot \frac{dy}{du}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = u^4 \frac{d^2y}{du^2} + 2u^3 \frac{dy}{du}$$

olup yerlerine konursa,

$$\left(\frac{1}{u^2} + 1 \right) \left(u^4 \frac{d^2y}{du^2} + 2u^3 \frac{dy}{du} \right) - u^2 \frac{dy}{du} + y = 0$$

$$u^2 \frac{d^2y}{du^2} + 2u \frac{dy}{du} + u^4 \frac{d^2y}{du^2} + 2u^3 \frac{dy}{du} - u^2 \frac{dy}{du} + y = 0$$

$$u^2(1 + u^2) \frac{d^2y}{du^2} + u(2u^2 - u + 2) \frac{dy}{du} + y = 0$$

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{(2u^2 - u + 2)}{u(1 + u^2)} \frac{dy}{du} + \frac{1}{u^2(1 + u^2)} y = 0 \quad (5.3.3.2)$$

elde edilir.

(Öte yandan (u) ya göre elde edilen (5.3.3.2) numaralı denklem, verilen diferansiyel denklemi

$$y'' + \frac{1}{(x^2 + 1)} y' + \frac{1}{(x^2 + 1)} y = 0$$

şeklinde yazıp, $P(x)$ ve $Q(x)$ katsayı fonksiyonlarını,

$$P(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ den}$$

$$P\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{u^2}{1+u^2}$$

$$Q(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{den}$$

$$Q\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{u^2}{1+u^2}$$

değerlerine göre (5.3.3.2) numaralı denklemde yerlerine koyarak doğrudan doğruya da bulunabilir.)

Söz konusu (5.3.3.2) numaralı diferansiyel denklemde $P(u)$ ve $Q(u)$ katsayı fonksiyonları

$$P(u) = \frac{(2u^2 - u + 2)}{u(1+u^2)}$$

$$Q(u) = \frac{1}{u^2(1+u^2)}$$

olup, her ikisi de $u = 0$ için analitik değildir. Diğer bir deyişle $u = 0$ noktası (5.1) numaralı diferansiyel denklemin bir tekil noktasıdır. Söz konusu $u = 0$ tekil noktasının düzgün olup olmadığını anlamak için, $uP(u)$ ve $u^2Q(u)$ çarpımları teşkil edilirse,

$$uP(u) = u \frac{(2u^2 - u + 2)}{u(1+u^2)} = \frac{2u^2 - u + 2}{(1+u^2)}$$

$$u^2Q(u) = u^2 \frac{1}{u^2(1+u^2)} = \frac{1}{(1+u^2)}$$

bulunur. ($u = 0$) için her iki çarpımında analitik olduğu görülür. Dolayısıyla $u = 0$ noktası (5.3.3.2) numaralı diferansiyel denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Buna göre verilen diferansiyel denklemin sonsuzdaki noktası ($x = \infty$) da bir düzgün tekil nokta olur.

5.3.4. Bessel Denklemi ve Bessel Fonksiyonları

Bu bölümde özel bir diferansiyel denklem incelenecektir. p bir sabit olmak üzere

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (5.3.4.1)$$

diferansiyel denklemi, p mertebeden Bessel denklemi olarak bilinir. p bir gerçel sabit olsun. Denklemde yalnızca p^2 terimi bulunduğundan $p \geq 0$ alınabilir. Bu denklem (5.1) biçiminde düşünüldüğünde

$$p(x) = \frac{1}{x}, q(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2}$$

olacağından, $x = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. t nin diğer değerleri denklemin bayağı noktalarıdır. (5.3.4.1) denkleminin başlangıç noktasındaki seri çözümleri, Frobenius yöntemi ile bulunabilir. Denklemin bir seri çözümü aranırsa, indis polinomu ve indirgeme bağıntısı sırasıyla,

$$F(\alpha) = \alpha^2 - p^2 \quad (5.3.4.2)$$

$$[(\alpha + 1)^2 - p^2]c_1 = 0, [(k + \alpha)^2 - p^2]c_k + c_{k-2} = 0 \quad (k \geq 2) \quad (5.3.4.3)$$

biçimindedir.

$p = 0$ ise:

p nin sıfıra eşit olması halinde (5.3.4.1) denklemi sıfırıncı mertebeden Bessel denklemi olarak adlandırılan

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (5.3.4.4)$$

denklemine dönüşür. Bu halde, (5.3.4.2) ve (5.3.4.3) bağıntıları,

$$F(\alpha) = \alpha^2 \quad (5.3.4.5)$$

$$(\alpha + 1)^2 c_1 = 0, (k + \alpha)^2 c_k + c_{k-2} = 0 \quad (k \geq 2) \quad (5.3.4.6)$$

biçimini alır.

(5.3.4.5) indis polinomunun kökleri $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ dır. (5.3.4.6) de $\alpha = 0$ yazılarak

$$c_1 = 0, c_k = -\frac{c_{k-2}}{k^2}, k \geq 2$$

indirgeme bağıntısı elde edilir. Buna göre,

$$c_1 = c_3 = \dots = c_{2n+1} = 0, n \geq 0$$

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}, c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_0}{2^2 4^2}, \dots, c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{(n!)^2 2^{2n}}, (n \geq 1)$$

dır. Böylece, (5.3.4.4) denkleminin bir çözümü,

$$y = y_1(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \quad (x > 0)$$

biçimindedir.

TANIM 5.3.4.1. $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots$ (5.3.4.7)

fonksiyonuna, sıfırıncı mertebeden birinci tür *Bessel Fonksiyonu* denir.

(5.3.4.5) indis denkleminin kökleri çakışık olduğundan, $|x| < R$ için J_0 fonksiyonu ile birlikte bir doğrusal bağımsız çift oluşturan,

$$y_2(x) = \log x J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k \quad (x > 0)$$

biçimindeki ikinci bir doğrusal bağımsız çözüm, D'Alembert basamak düşürme yöntemi ile de bulunabilir.

Buna göre bu çözüm,

$$y_2(x) = J_0(x) \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{|J_0(x)|^2} dt = J_0(x) \int \frac{dx}{x |J_0(x)|^2}$$

biçimindedir.

(5.3.4.7) ten

$$|J_0(x)|^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{32}x^4 - \frac{5}{576}x^6 + \dots$$

$$|J_0(x)|^{-2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{32}x^4 - \frac{23}{576}x^6 + \dots$$

ve buradan,

$$y_2(x) = J_0(x) \int \left| \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5}{32}x^3 + \frac{23}{576}x^5 + \dots \right| dx$$

$$= \log x J_0(x) + \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots\right) \left(\frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \dots\right)$$

$$= \log x J_0(x) + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{128}x^4 + \frac{11}{13824}x^6 - \dots$$

dır.

Böylece, (5.3.4.4) denkleminin J_0 dan bağımsız ikinci çözümünün terimleri aşağıdaki gibidir:

$$b_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = (-1)^2 \frac{1}{2^2(1!)^2}$$

$$b_4 = -\frac{3}{128} = (-1)^3 \frac{1}{2^4(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$b_6 = \frac{11}{13824} = (-1)^4 \frac{1}{2^6(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

.

.

.

$$b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} \varphi(n)}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \varphi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, n \geq 1$$

Buna göre, $y_2(x)$ çözümü,

$$y_2(x) = \log x J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_2 x^{2k}$$

biçiminde yazılabilir. y_1 ve y_2 çözümleri doğrusal bağımsız olduğundan, (5.3.4.4) denkleminin genel çözümü, J_0 ve y_2 nin doğrusal toplamı olarak ifade edilebilir. Ancak

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(n) - \log n)$$

Euler sabitini göstermek üzere, (5.3.4.4) denkleminin $0 < |x| < R$ için J_0 dan bağımsız olan ikinci bir çözümünü oluşturan

$$\gamma_0(x) = \frac{2}{\pi} [y_2(x) + (\gamma - \log 2) J_0(x)]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\left(\log \frac{x}{2} + \gamma\right) J_0(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+x}}{(k!)^2} \frac{x^{2k}}{2^{2k}} \varphi(n) \right] \quad (5.3.4.8)$$

özel toplamı göz önüne alınır ve genel çözümü k_1 ve k_2 keyfi sabitleri göstermek üzere

$y(x) = k_1 J_0(x) + k_2 \gamma_0(x)$ doğrusal toplamı ile ifade edilir.

TANIM 5.3.4.2 $\gamma_0(x)$ fonksiyonuna sıfırdan ikinci tür *Bessel Fonksiyonu* denir.

$p > 0$ ise:

$x > 0$ için p . mertebeden Bessel diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Bu denklemin $x = 0$ düzgün tekil noktasındaki seri çözümleri aranır, (5.3.4.2) indis denkleminin kökleri $\pm p$ dir.

$\alpha_1 = p$ olsun. Katsayılar arasındaki indirgeme bağıntısını veren (5.3.4.3) bağıntısından,

$$(2p+1)c_1 = 0, k(k+2p)c_k + c_{k-2} = 0 \quad (k \geq 2)$$

bulunur. $p \neq -1/2$ için $c_1 = 0$ olmalıdır. Buradan,

$$c_1 = c_3 = \dots = c_{2n+1} = 0$$

ve

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n! (p+1)(p+2)\dots(p+n)} \quad (5.3.4.12)$$

olur. Çözüm Gamma fonksiyonu cinsinden aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$p \neq -1, -2, \dots$ için

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n \Gamma(p+1)}{2^{2n} n! \Gamma(p+n+1)} c_0$$

ve

$$y_1(x) = c_0 \Gamma(p+1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k} k! \Gamma(p+k+1)}$$

dir. $c_0 = 1/2^p \Gamma(p+1)$ seçilirse,

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p} k! \Gamma(p+k+1)} \quad \text{olur.}$$

$$\text{TANIM 5.3.4.3.} \quad J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p} k! \Gamma(p+k+1)} \quad (5.3.4.9)$$

serisi ile tanımlanan $J_p(x)$ fonksiyonuna, p mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu denir.

$$J_0(0) = 1 \text{ ve } p > 0 \text{ için } J_p(0) = 0$$

olacağı açıktır.

$\alpha_2 = -p$ olsun. (5.3.4.3) indirgeme bağıntısından,

$$(1-2p)c_1 = 0, k(k-2p)c_k + c_{k-2} = 0 \quad (k \geq 2) \quad (5.3.4.10)$$

i) $\alpha_1 - \alpha_2 = 2p$ bir tam sayı olmasın. Bu halde, denklemin ikinci bir özel çözümü,

yukarıdakine benzer yolla elde edilir. (5.3.4.9) de p yerine $-p$ yazılırsa,

$$y_2(x) = J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-p}}{2^{2k-p} k! \Gamma(k-p+1)} \quad (5.3.4.11)$$

bulunur. Tam sayı olmayan p ler ve $0 < x < R$ için J_p ve J_{-p} , Bessel denkleminin doğrusal bağımsız çözümleridir. Bu nedenle, her çözüm k_1 ve k_2 sabitleri yardımıyla,

$$y(x) = k_1 J_p(x) + k_2 J_{-p}(x)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca, p bir tam sayı değilse, J_p ve J_{-p} nin doğrusal toplamı olan

$$\gamma_p(x) = \frac{1}{\sin p\pi} \left\{ \cos p\pi J_p(x) - J_{-p}(x) \right\} \quad (5.3.4.12)$$

fonksiyonu da Bessel denkleminin bir çözümüdür.

TANIM 5.3.4.4. (5.3.4.12) ile tanımlı $\gamma_p(x)$ fonksiyonuna p mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu denir.

J_p ve γ_p fonksiyonları doğrusal bağımsızdır ve Bessel denkleminin genel çözümü, $0 < x < R$ ve tamsayı olmayan p değerleri için k_1 ve k_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$y(x) = k_1 J_p(x) + k_2 \gamma_p(x)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

ii) $\alpha_1 - \alpha_2 = 2p$ bir tam sayı olsun. $2p=N$ olmak üzere (5.3.4.10) denklemden

$$0 \cdot c_N = -c_{N-2}$$

olur. N , bir tek tam sayı ise p , bir tek sayının yarısıdır ve

$$c_1 = c_3 = \dots = c_{N-2} = 0$$

dır. Böylece $c_N=0$ seçilebilir. Bu durumda (5.3.4.11) biçiminde ikinci bir çözüm elde edilir. N , bir çift tam sayı ise p daima bir tam sayıdır ve ikinci doğrusal bağımsız çözüm logaritmiktir. n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-n}}{2^{2k-n} k! \Gamma(k-n+1)}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. $k=0, 1, \dots, n-1$ için $1/\Gamma(k-n+1)=0$ olduğundan,

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-n}}{2^{2k-n} k! \Gamma(k-n+1)}$$

bulunur. Toplamda saymanın düzenlenmesiyle,

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

elde edilir. Bu nedenle, $p=n$ iken J_{-n} de Bessel denkleminin bir çözümüdür. J_n ve J_{-n} çözümleri doğrusal bağımlı çözümlerdir.

$p = n$ iken Bessel denkleminin ikinci bir çözümü, $a \neq 0$ bir sabit olmak üzere

$$y_2(x) = a \log x J_n(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k-n} \quad (5.3.4.13)$$

biçimindedir.

$p = n$ için n bir pozitif tamsayı olduğunda (5.3.4.12) fonksiyonu tanımlı değildir. Ancak

$\lim_{p \rightarrow n} \gamma_p$ limiti vardır.

Bu limit,

$$\gamma_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \gamma_p(x)$$

ile gösterilirse, L' Hospital kuralı uygulanarak,

$$\begin{aligned} \gamma_n(x) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} J_p(x) + (-1)^{p+1} \frac{\partial}{\partial p} J_{-p}(x) \right\} \Big|_{p=n} \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\log \frac{x}{2} + \gamma \right) J_n(x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \frac{x^{2k-n}}{2^{2k-n}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{k+n} \frac{1}{i} \right) \left[\frac{1}{k!(k+n)!} \frac{x^{2k+n}}{2^{2k+n}} \right] \right\} \Big|_{p=n} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu limit işlemi Bessel denkleminin (5.3.4.13) biçimindeki ikinci bir çözümünü verir. Buradan, $p=n$, $n \in \mathbb{N}$ için Bessel diferansiyel denkleminin genel çözümü, k_1 ve k_2 sabitleri ve $0 < x < R$ için

$$y(x) = k_1 J_n(x) + k_2 \gamma_n(x)$$

biçimindedir.

$p=1$ için (5.3.4.1) Bessel denklemi,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

biçimindedir.

$\alpha_1=1$ indisine karşı gelen çözüm, (5.3.4.9) de $p=1$ yazılarak

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+1} k! \Gamma(k+2)} \quad (x > 0)$$

elde edilir. J_1 , birinci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonudur.

5.3.5. Bessel Fonksiyonlarının Özellikleri ve Modifiye Bessel Fonksiyonları

TEOREM 5.3.5.1. Bessel fonksiyonlarının türevleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$a) \frac{d}{dx} \{ x^p J_p(x) \} = x^p J_{p-1}(x) \quad (5.3.5.1)$$

$$b) \frac{d}{dx} \{ x^{-p} J_p(x) \} = -x^{-p} J_{p+1}(x) \quad (5.3.5.2)$$

İspat: $J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ x^p J_p(x) \} &= x^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+p-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p-1} \\ &= x^p J_{p-1}(x) \end{aligned}$$

ve benzer işlemle

$$\frac{d}{dx} \{ x^{-p} J_p(x) \} = -x^{-p} J_{p+1}(x)$$

bulunur.

p mertebeden Bessel denkleminde x^2 nin işareti değiştirilerek

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0 \quad (5.3.4.1a)$$

denklemini elde edilir. $x=-it$ dönüşümüyle (5.3.4.1a) Bessel denklemini

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - p^2)y = 0$$

biçimini alır. Bu denklem p . mertebeden Modifiye Bessel denklemini olarak bilinir. Genel çözümü

$$p \notin \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ ise } y = c_1 J_p(ix) + c_2 J_{-p}(ix)$$

$$p \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ ise } y = c_1 J_n(ix) + c_2 Y_n(ix)$$

biçimindedir. Burada

$$J_p(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k+p}}{k!(k+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} = i^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

dir.

(5.3.4.1a) nın genel çözümü olarak $p \in \mathbb{R}$ iken reel olan

$$I_p(x) = i^{-p} J_p(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}$$

fonksiyonu alınır. Bu fonksiyon, p . mertebeden birinci tür modifiye Bessel fonksiyonu olarak bilinir. $J_p(x)$ nin terimleri farklı işaretli oldukları halde, $I_p(x)$ nin seri gösterilişindeki terimlerin tümü pozitiftir. Böylece, $p \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ise (5.3.4.1a) denkleminin genel çözümü

$$y = Z_p(ix) = c_1 I_p(x) + c_2 I_{-p}(x)$$

reel formda alınabilir.

$p=n$ iken

$$J_n(ix) = (-1)^n J_{-n}(ix) = i^{2n} J_{-n}(ix)$$

ve

$$i^n J_n(ix) = i^n J_n(ix)$$

olduğundan $I_{-n} = I_n$ gerçekleşir.

$p \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ iken (5.3.4.1a) denkleminin ikinci temel çözümü

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} [J_n(ix) + i\gamma_n(ix)]$$

ve genel çözümü

$$y = Z_n(ix) = c_1 I_n(x) + c_2 K_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

dir. $K_n(x)$ fonksiyonu, n . mertebeden ikinci tür Modifiye Bessel fonksiyonu olarak bilinir.

Sonuç : Modifiye Bessel fonksiyonları için

$$\text{a) } \frac{d}{dx} \{x^p I_p(x)\} = x^p I_{p-1}(x)$$

$$\text{b) } \frac{d}{dx} \{x^{-p} I_p(x)\} = x^{-p} I_{p+1}(x) \quad (5.3.5.3)$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} \{x^p K_p(x)\} = -x^p K_{p-1}(x)$$

$$\text{d) } \frac{d}{dx} \{x^{-p} K_p(x)\} = x^{-p} K_{p+1}(x) \quad (5.3.5.4)$$

bağıntıları gerçekleşir.

$p \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ise $K_n(x)$ fonksiyonu, $K_p(x) = \frac{\pi I_{-p}(x) - i I_p(x)}{2 \sin p\pi}$ olmak üzere

$$K_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} K_p(x)$$

bağıntısıyla tanımlanır.

x in yeterince büyük değerleri için modifiye Bessel fonksiyonlarının asimptotik davranışı

$$I_p(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{ve} \quad K_p(x) \approx \frac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{2}{\pi} x}} \quad (x \rightarrow \infty)$$

dir. Sağ yanların p ye bağlı olmadığını not edelim. Yeterince küçük x değerleri için $J_p(x)$ ve $J_{-p}(x)$ Bessel fonksiyonları asimptotik olarak ifade edilir.

$$J_p(x) \approx \frac{1}{2^p \Gamma(1+p)} x^p, \quad J_{-p}(x) \approx \frac{2^p}{\Gamma(1-p)} x^{-p} \quad (p \neq n)$$

(5.3.5.1) ve (5.3.5.2) den sırasıyla,

$$x^p J_p(x) + p x^{p-1} J_p(x) = x^p J_{p-1}(x)$$

ve

$$x^p J_p(x) + p x^{p-1} J_p(x) = x^p J_{p-1}(x)$$

elde edilir. Bu eşitliklerden,

$$J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x) \quad (5.3.5.5)$$

indirgeme bağıntısı bulunur.

(5.3.5.1) bağıntısının açık yazılışından

$$p x^{p-1} J_p(\alpha x) + x^p \frac{d}{dx} J_p(\alpha x) = \alpha x^p J_{p-1}(\alpha x) \quad \text{elde edilir.}$$

Özel olarak $p = \frac{1}{2}$ için (5.3.5.2) den

$$\frac{d}{dx} \{x^{1/2} J_{1/2}(x)\} = x^{1/2} J_{-1/2}(x) \quad (5.3.5.6)$$

bulunur.

ÖRNEK 5.3.5.1. $J_3(2x)$ fonksiyonunu $J_0(2x)$ ve $J_1(2x)$ cinsinden yazalım.

$p=2$ için (5.3.5.3) den,

$$\begin{aligned} J_3(2x) &= \frac{2.2}{2x} J_2(2x) - J_1(2x) \\ &= \frac{2}{x} \left[\frac{2.1}{2x} J_1(2x) - J_0(2x) \right] - J_1(2x) \\ &= \left(\frac{2}{x^2 - 1} \right) J_1(2x) - \frac{2}{x} J_0(2x) \end{aligned}$$

bulunur.

(5.3.5.1) türev özdeşliği, integrasyon formülü olarak yazılır:

$$\int x^p J_{p-1}(x) dx = x^p J_p(x) + c \quad (5.3.5.7)$$

$$\int x^{-p} J_{p+1}(x) dx = -x^{-p} J_p(x) + c \quad (5.3.5.8)$$

Örnek olarak,

(5.3.5.7) den $p = 0$ için $\int J_1(x) dx = -J_0(x) + c$

(5.3.5.8) den $p = 1$ için $\int x J_0(x) dx = x J_1(x) + c$

bulunur.

$p, \frac{1}{2}$ ya da tek tam sayı iken p mertebeden Bessel fonksiyonları, elemanter fonksiyonlar

cinsinden ifade edilir. $p = \frac{1}{2}$ için (5.3.4.1) Besel denkleminin $y = Z_{1/2}(x)$ genel çözümünü göz

önüne alalım. (5.3.4.1) denkleminde $y = x^{-1/2} u$ dönüşümü yapılırsa, (5.3.4.1) denklemi

$$u'' + \left(1 - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) u = 0$$

denklemine dönüşür. $p = \frac{1}{2}$ için $u'' + u = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$u = A \cos x + B \sin x$ biçimindedir. $u = x^{1/2} J_{1/2}(x)$ alınırsa, (5.3.5.3) ile birlikte

$$\frac{du}{dx} = x^{1/2} J_{-1/2}(x)$$

bulunur. $u(0) = 0$ dır, $u'(0) = \frac{2^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ olur.

Buradan $A = 0$ ve $B = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ bulunur. Böylece

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad \text{ve}$$

$$I_{1/2}(x) = i^{-1/2} J_{1/2}(ix) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{Sh} x$$

$$I_{-1/2}(x) = i^{-1/2} J_{-1/2}(ix) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{Ch} x \quad \text{elde edilir.}$$

5.3.6 Legendre Diferansiyel Denklemini

Bir çok uygulamada önemli bir yer tutan diğer bir diferansiyel denklem de Legendre denklemi olarak bilinen

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0 \quad (5.3.6.1)$$

denklemdir. Burada p bir reel sayıdır. (5.3.6.1) denkleminin her bir çözümü Legendre fonksiyonu olarak adlandırılır. Legendre denklemi

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{p(p+1)}{1-x^2}y = 0 \quad \text{şeklinde yeniden yazılırsa } x^2 \neq 1 \text{ noktaları} \quad (5.3.6.1)$$

denkleminin bayağı noktaları olduğu görülür. Şimdi bu denklemin $x_0 = 0$ noktasındaki seri çözümünü araştıralım.

Bunun için

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (5.3.6.2)$$

ve y' 'nin türevleri (5.3.6.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + p(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= 0 \quad (5.3.6.3)$$

bulunur.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n$$

eşitliği kullanılırsa (5.3.6.3) denklemi

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + p(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.6.4)$$

denklemine dönüşür. Bu son eşitlikteki terimlerin tek toplam altında birleştirme işlemi gerçekleştirilirse

$$\begin{aligned} & 2c_2 + p(p+1)c_0 + (6c_3 - 2c_1 + p(p+1)c_1)x \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + p(p+1)c_n] x^n = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eşitliğin sağlanması ise

$$2c_2 + p(p+1)c_0 = 0 \quad (5.3.6.5)$$

$$6c_3 - 2c_1 + p(p+1)c_1 = 0 \quad (5.3.6.6)$$

ve $n \geq 2$ için

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + p(p+1)c_n = 0$$

ile mümkündür. Gerekli düzenlemeler yapılır ve c_{n+2} çözülürse

$$c_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+2)(n+1)} c_n \quad (5.3.6.7)$$

bulunur. (5.3.6.5), (5.3.6.6) ve (5.3.6.7) den

$$c_2 = -\frac{p(p+1)}{2} c_0 = -\frac{p(p+1)}{2!} c_0$$

$$c_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{6} c_1 = -\frac{(p-1)(p+2)}{3!} c_1$$

$$c_4 = -\frac{(p-2)(p+3)}{4 \cdot 3} c_2 = \frac{p(p+1)(p-2)(p+3)}{4!} c_0$$

olur.

Bütün bu katsayılar (5.3.6.2) de yerine yazılırsa

$$y(x) = c_0 + c_1 x - \frac{p(p+1)}{2!} c_0 x^2 - \frac{(p-1)(p+2)}{3!} c_1 x^3 + \frac{p(p+1)(p-2)(p+3)}{4!} c_0 x^4 + \dots$$

veya

$$y(x) = c_0 \left[1 - \frac{p(p+1)}{2!} x^2 + \frac{p(p+1)(p-2)(p+3)}{4!} x^4 + \dots \right] + c_1 \left[x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!} x^3 + \dots \right]$$

$$= c_0 y_0(x) + c_1 y_1(x) \quad (5.3.6.8)$$

olduğu görülür. $\frac{y_1(x)}{y_0(x)}$ sabit olmadığından $y_0(x)$, $y_1(x)$ lineer bağımsızdır.

Uygulamada p nin pozitif reel sayı olduğu kabul edilir. Bu durumda $n = p$ alınırsa (5.3.6.7) katsayılar bağıntısında

$$c_{p+2} = c_{p+4} = \dots = 0$$

bulunur. Bu nedenle (5.3.6.8) çözümündeki $y_0(x)$ veya $y_1(x)$ derecesi p olan bir polinoma indirgenir (p çiftse y_0 ; p tekse y_1). Uygun sabitlerle çarpılan bu polinomlar p . dereceden Legendre polinomları olarak adlandırılır.

$$c_p = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2} \quad (5.3.6.9)$$

olarak tanımlanırsa ve (5.3.6.7) de $n+2 = p$ yazılırsa

$$c_p = -\frac{2(2p-1)}{p(p-1)} c_{p-2}$$

ve buradan da

$$c_{p-2} = -\frac{p(p-1)}{2(2p-1)} c_p$$

bulunur. (5.3.6.9) ile tanımlanan c_p değeri son eşitlikte yerine yazılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$$c_{p-2} = -\frac{-(2p-2)!}{2^p (p-1)!(p-2)!}$$

elde edilir.

Benzer işlemler tekrarlanırsa

$$c_{p-4} = -\frac{(2p-4)!}{2^p 2! (p-2)! (p-4)!}$$

ve genel olarak

$$c_{p-2k} = -\frac{(-1)^k (2p-2k)!}{2^p k! (p-k)! (p-2k)!}$$

olduğu görülür. Bu durumda p . dereceden Legendre polinomları

$$P_p(x) = \sum_{k=0}^M \frac{(-1)^k (2p-2k)!}{2^p k! (p-k)! (p-2k)!} x^{p-2k}, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

ile verilir. Burada M , $\frac{P}{2}$ ye yakın ve $\frac{P}{2}$ den büyük olmayan en büyük pozitif tamsayıdır.

Özel olarak

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots \quad \text{şeklindedir.}$$

KAYNAKLAR

- Dernek A.N., Dernek A., (2001), Diferansiyel Denklemler, Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, İstanbul.
- Ergun A.N., (1968), Kurtulmuş Matbaası, İstanbul.
- Granville W.A., Smith P.F., Longleu W.R., (1950), Diferansiyel ve İntegral Hesap, Şirketi Mürettibiye Basımevi.
- Hacısalıhoğlu H.H., (1994), Differential Equations Fen Fakültesi, Ankara.
- Haksız C., (2002), Diferansiyel Denklemler, K.T.Ü Matbaası.
- İdemen M., (1968), Yüksek Matematik Problemleri II, Adi Diferansiyel Denklemler, Arkadaşlar Matbaası, İstanbul.
- Kaplan W., (1967), Ordinary Differential Equations, Department of Mathematics, University of Michigan.
- Karadeniz A.A., (1983), Yüksek Matematik Cilt 2, Çağlayan Kitabevi.
- Kells L.M., (1965), Kells – Elementary Differential Equations, Professor Emeritus U.S Naval Academy Annapolis, Maryland.
- Landau, E., (1994), Diferansiyel ve İntegral Hesap, İbrahim Horoz Basımevi.
- Mangold – Knopp, (1964), Yüksek Matematiğe Giriş, Şirketi Mürettibiye Basımevi.
- Mocan R., (1977), Diferansiyel Denklemler, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul.
- Saban G., (1975), Analiz Dersleri II, Fen Fakültesi Basımevi, İstanbul.
- Spiegel, M.R., (1975), Çözümlü Matematik Problemleri, Çağlayan Kitapevi.
- Uyan B., (1980), Çözümlü Problemlerle Diferansiyel Denklemler Fourier Serileri, The Johns Hopkins University, U.S.A.
- William E.B., Diprima R.C., (1970), İntroduction to Differential Equations, Rensselaer Polytechnic Institute, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto.
- Yurtsever B., (1981), Matematik Analiz Dersleri, Ekonomist Yayınevi, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	11.08.1980	
Doğum yeri	KARS/Sarıkamış	
Lise	1994-1995	Kültür Fen Lisesi
	1995-1997	Evrensel Fen Lisesi
Lisans	1998-2002	Ankara Üniversitesi
		Fen Fakültesi
		Matematik Bölümü
Yüksek Lisans		Yıldız Teknik Üniversitesi
		Fen Bilimleri Enstitüsü
		Matematik Anabilim Dalı,
		Matematik Programı

Çalıştığı Kurum

2002 Devam ediyor BİL Öğretim Kurumları

