

154591

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SONLU ARALIKTA VERİLMİŞ YÜKSEK MERTEBEDEN
LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖR ve BUNUN GREEN
FONKSİYONU**

Mat. Müh. Öğrt. Kaan GÖKBAYRAK

**FBE Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU


Prof. Dr. Hamit AVCİ


Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU


Prof. Dr. Mustafa SIVRI

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
ÖNSÖZ	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. LİNEER OPERATÖRLER.....	2
3. LİNEER FORMLAR	4
3.1 Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık.....	4
4. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN TANIMI ve TEMEL ÖZELLİKLERİ.....	6
4.1 Bir Lineer Vektör Uzayının ve Lineer Operatörün Genel Tanımı.....	6
4.2 Lineer Diferansiyel İfadeler	8
4.2.1 Sınır Koşulları	8
4.2.2 Homogen Sınır-Değer Problemi	9
4.2.3 Lagrange'ın Formülü: Eşlenik Diferansiyel İfade	12
4.2.4 Eşlenik Sınır Koşulları, Eşlenik Operatör.....	29
4.2.5 Eşlenik Sınır-Değer Problemi	31
5. BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN ÖZDEĞERLERİ ve ÖZFONKSİYONLARI	34
5.1 Özdeğerlerin ve Özfonksiyonların Tanımı.....	34
5.2 Eşlenik Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları Arasındaki İlişki.....	37
5.3 Kendine Eş Bir Operatörün Özdeğerleri ve Özfonksiyonları	38
5.4 Özdeğer Problemlerine Örnekler	39
6. BİR LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN GREEN FONKSİYONU	48
6.1 Ters Operatörün Genel Tanımı	48
6.2 Bir Diferansiyel Operatörün Ters Problemi.....	49
6.3 Green Fonksiyonunun Yapısı.....	50
6.4 Green Fonksiyonu Yardımıyla Bir Diferansiyel Operatörün Ters.....	54
6.5 Eşlenik Operatör İçin Green Fonksiyonu.....	58
6.6 Bir Parametre İçeren Sınır-Değer Problemleri ve Integral Denkleme İndirgenmeleri	59
6.7 $L - \lambda I$ Operatörü İçin Green Fonksiyonu	61
6.8 $L - \lambda I$ Operatörünün Green Fonksiyonunun Analitik Yapısı.....	64
7. SONUÇLAR	68

KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	70



SİMGE LİSTESİ

A^{-1}	A operatörünün tersi
$C^{(n)}[a, b]$	$[a, b]$ üzerinde n . mertebeden sürekli türevlenebilen fonksiyonlar kümesi
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
$G(x, \xi)$	L operatörünün Green fonksiyonu
$G(x, \xi, \lambda)$	$L - \lambda I$ operatörünün Green fonksiyonu
$G^*(x, \xi, \lambda)$	$L^* - \bar{\lambda} I$ operatörünün Green fonksiyonu
$H(x, \xi)$	L^* eşlenik operatörünün Green fonksiyonu
I_x	Özdeşlik (birim) operatör
$l(y)$	n . mertebeden lineer diferansiyel ifade
$l^*(z)$	$l(y)$ 'nin eşlenik diferansiyel ifadesi
L^*	L operatörünün eşleniği
$P(\eta, \zeta)$	Bilineer form
$R(A)$	A operatörünün değer kümesi
$\Delta(\lambda)$	Karakteristik determinant
$\Gamma(x, \xi, \lambda)$	$G(x, \xi)$ çekirdeğinin resolventi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 5.1 Bir ucundan sabitlenmiş diğer ucu serbest bükülen çubuk.....	40
Şekil 5.2 Denge durumundan diferansiyel sapmış çubuk	41
Şekil 5.3 Değişken kesitli çubuktaki diferansiyel sapmalar.....	42
Şekil 5.4 Bir ucu sabitlenmiş ve diğer ucu destekli bükülebilir çubuk kesiti	43
Şekil 5.5 $y=tank$ ve $y=k$ grafikleri	45
Şekil 5.6 Gergin bir telin uç noktalarındaki durumu.....	47



ÖNSÖZ

Fonksiyonel analiz, matematikte klasik matematik analiz, geometri ve lineer cebir düşüncelerinin ve yöntemlerinin sonsuz boyutlu durumlarda kullanılabildiği bir daldır. Fonksiyonel analizin gelişimi ise bu daldan elde edilen sonuçların matematiğin çeşitli alanlarında kullanılabilmesiyle olacaktır.

Önceleri dağınık ve rasgele yapılan çalışmalar, gittikçe düzenli ve daha bilimsel bir hal almış ve zaman içerisinde konu bugünkü düzeyine ulaşmıştır. Geriye dönülüp bakıldığında tekniğin gelişimi matematik gelişmeleri beraberinde getirmiş, matematik gelişmeler ise teknikte yeni çığırılar açmıştır.

Bu çalışmada fonksiyonel analizin temel konularından olan lineer operatörlerin spektral teorisi genel kapsamı içerisinde lineer diferansiyel operatörler ele alınmış, sonra operatörün Green fonksiyonu ile ilişkilendirilmesine ve bu bağlamdaki ayrıntılara değinilmiştir. Konuyla ilgili karşılaşılabilecek bazı uygulamalara yer verilmiştir.

Matematiğin birçok kişiye itici gelen teorik matematikle ilgili olan tezimde çeşitli üniversitelerden edindiğim kaynakların yanı sıra bana yol gösterici olan, araştırmalarımda sıkıntıya düştüğüm anlarda kapısını aşındırdığım ve belki de sorularıyla bunalttığım hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet Bayramoğlu'nun katkılarının payı yadsınamaz. O nedenle değerli hocama ve bir de verdikleri manevi destekten dolayı aile büyüklerime teşekkürü bir borç bilirim.

Matematik mühendisliği bölümünün son yıllarda değişim gösteren ders yapısı içerisinde bu gibi teorik bilgilere ihtiyaç duyacağına inandığım lisans öğrencisi arkadaşlarıma, benzer çalışmalarda kaynak sıkıntısı yaşayabilecek yüksek lisans ve doktora öğrencisi arkadaşlarıma yer verdiğim bilgilerle bir parça olsun yardımcı olabilirsem bu beni olsa olsa mutlu edecektir. Matematiğin uçsuz bucaksızlığı içerisinde adeta denizdeki bir çakıl taşı kadar yer kaplayan lineer diferansiyel operatörlerle ilgili anlatılanların herkese ışık tutması dileğiyle en derin saygılarımı sunarım.

ÖZET

Matematiğin teorik dünyasının bir parçası da spektral teoridir. Oldukça geniş kapsamlı olan spektral teorelinin adeta bir alt kümesi olan lineer diferansiyel operatörler ve buradan hareketle Green fonksiyonları yine kendi içinde bir alt küme hacminde ele alınmıştır. Çalışma ana başlıklarla ilgili her türlü uygulamayı ihtiva etmese de kendi içinde bir bütünlük içerisinde verilmeye çalışılmış, konu ile ilgili bilgisi olmayanlara bir başlangıç niteliğinde düşünülmüştür. Fonksiyonel analiz metotları ve klasik analitik metotlar harmanlanmıştır.

İlk bölümü giriş oluşturmaktadır. Ardından ikinci ve üçüncü bölümlerde konuya ön hazırlık niteliğinde lineer operatörler ve lineer formlarla ilgili birtakım temel kavramlar işlenmektedirler. Dördüncü bölüm konuya başlangıç anlamında lineer diferansiyel operatörler teorisinin temelini ortaya koymaktadır. Sınır koşulları altında homogen sınır-değer problemi, eşlenik operatör kavramı ve buna bağlı eşlenik sınır-değer problemi, kendine eş olma şartları açıklanmaktadır. Beşinci bölüm uygulama ağırlıklı olup fiziğin de konuya nasıl uyarlanacağını göstererek özdeğer ve özfonksiyon kavramlarına ayrılmaktadır. Yine eşlenik operatörler ve kendine eş operatörler için de ayrıca ele alınmaktadır. Bölüm sonunda sayısal örnekler konuyu somutlaştırmaktadır. Altıncı ve son bölüm ise Green Fonksiyonu bahsine ayrılmaktadır. Diferansiyel operatör ile Green fonksiyonu arasındaki bağlantıyı eşlenik operatörün konuya katılması izlemektedir. İntegral denklemlerin, parametrelili sınır-değer problemleri çözümündeki rolü belirtilmektedir. Parametre içeren diferansiyel operatörün Green fonksiyonunun yapısının incelenmesi gerek bölümün gerekse de çalışmanın son kısımlarını oluşturmaktadır.

Anahtar kelimeler: Lineer form, lineer operatör, sınır-değer problemi, eşlenik operatör, kendine eş operatör, özdeğer, özfonksiyon, diferansiyel operatörün Green fonksiyonu, integral operatör.

ABSTRACT

An item of mathematical theory matters is spectral theory. Linear differential operators that can be seen as a subgroup of the spectral theory being quite broad in scope and relating to this Green's functions that are also reviewed in some aspects. Even though the study does not comprehend all kinds of applications related with main titles, the effort to present in an unbroken manner is made, it is also intended to carry a starting point qualification for those who are not familiar with the subject. Functional analysis methods and classical analytic methods are combined.

The first part is introduction. Then in the second and third parts some basic concepts about linear operators and linear forms have been discussed as preliminary preparation to the subject. At the forth part the basis of linear differential operators theory has been put forward to get into the subject. Homogenous boundary-value problem under the boundary conditions, adjoint operator concept and related adjoint boundary-value problem, necessary conditions for a self adjoint have been explained. The fifth part concentrates on application, is about eigenvalue and eigenfunction, shows us how physics is adapted to the subject. In addition, eigenvalues and eigenfunctions have also been delt with for adjoint operators and self adjoint operators. At the end of the part the numerical examples have been given to concretize the subject. The sixth and last part has been assigned to the Green's function topic. After the relation between differential operator and Green's function, the inclusion of the adjoint operator to the subject comes. The role of integral equations in solving parametric boundary-value problems has been pointed out. Both the part and the study has been brought to an end by the examination of the structure of the parametric differential operator's Green's function.

Keywords: Linear form, linear operator, boundary-value problem, adjoint operator, self adjoint operator, eigenvalue, eigenfunction, differential operator's Green's function, integral operator.

1. GİRİŞ

Matematiksel fizikteki birçok konu diferansiyel operatörlerdeki özdeğer ve özfonksiyonları bulma problemine kılavuzluk eder. Bu tarz bir probleme örnek olarak bir kısmi diferansiyel denklemin başlangıç ve sınır koşulları altında Fourier metodu ile çözülmesi verilebilir. Yani diferansiyel operatörler birçok araştırmanın konusudur.

Bahsedilen ana problemle ilgili basılı çalışmaların çoğunda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi ele alınmıştır. Bu tip çalışmalar özellikle kuantum mekaniklerinin gelişimini canlandırmıştır. Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi kuantum mekaniklerindeki çoğu konuyu araştırmak için temel matematik metot olarak görülür. Kuantum mekanikleri özellikle singüler diferansiyel operatörlerin ayrıntılı bir çalışmasını gerektirir.

Lineer diferansiyel operatörlerle ilgili literatürde genellikle fonksiyonel analiz metotları kullanılmıştır. Bazı kaynaklarda ise klasik analitik metotlarla sınırlandırmalar yapıldığı gözlenmiştir. Bu çalışmada sonlu aralıkta verilmiş yüksek mertebeden diferansiyel ifade ve iki noktalı genel sınır koşulları tanımlanan operatörün Green fonksiyonu incelenmiştir. Ayrıca ele alınan operatörün eşleniği de öğrenilmiş ve kendine eşlik koşulları gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar fiziğin titreşim problemlerine uygulanmıştır. Bu konu Coddington ve Levinson (1955); Ince (1956); Naimark (1968); Stakgold (1979); Weidmann (1980); Sagan (1989) ve Akhiezer ve Glazman'ın (1993) çalışmalarında ele alınmıştır.

2. LİNEER OPERATÖRLER

Tanım 2.1 X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D 'nin her elemanına Y 'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D 'den Y 'ye bir operatör veya dönüşüm denir. Bir A operatörünün x 'e karşılık getirdiği eleman $A(x)$ ile gösterilir. A operatörünün $x \in D$ 'yi, $A(x) \in Y$ 'ye götürdüğünü belirtmek için $A: D \rightarrow Y$ gösterimi kullanılır. Bu gösterim, D 'yi Y 'ye gönderen A operatörü veya A , D 'den Y 'ye şeklinde okunur. Bu durumda D 'ye A operatörünün tanım kümesi denir ve genellikle $D(A)$ ile gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

$$R = R(A) = \{y \in Y : y = A(x), x \in D(A)\}$$

kümesine ise A operatörünün değer veya görüntü kümesi denir. A operatörünün yaptığı bu işlem kısaca $A: X \rightarrow Y$ biçiminde gösterilir. Bu gösterimde $D(A) \neq X$ veya $R(A) \neq Y$ olabilir.

Tanım 2.2 $A: X \rightarrow Y$ ve $B: X \rightarrow Y$ operatörleri verilmiş olsun. Eğer $D(A) = D(B) = D$ ve $\forall x \in D$ için $A(x) = B(x)$ ise A ile B operatörleri eşittir denir ve $A=B$ ile gösterilir. Eğer $D(A) \subset D(B)$ ve $\forall x \in D(A)$ için $A(x) = B(x)$ ise A operatörüne B operatörünün kısıtlaması veya B operatörüne A operatörünün genişlemesi denir ve $A \subset B$ ile gösterilir.

Tanım 2.3 $A: X \rightarrow Y$ ve $E \subset X, F \subset Y$ olsun.

$$A(E) = \{A(x) : x \in E\}$$

kümesine E 'nin görüntüsü, $A^{-1}(F) = \{x \in X : A(x) \in F\}$ kümesine F 'nin ters görüntüsü denir.

Tanım 2.4 $A: X \rightarrow Y$ bir operatör ve $b \in Y$ bir eleman olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $A(x) = b$ ise A operatörüne sabit operatör denir.

Tanım 2.5 $A: X \rightarrow X$ operatör verilsin. $\forall x \in X$ için $A(x) = x$ ise A operatörüne özdeşlik veya birim operatör denir. I_X veya I ile gösterilir.

Tanım 2.6 $A: X \rightarrow Y$ operatörü için $A(X) = Y$ oluyorsa, A operatörüne örten veya surjektif, aksi takdirde operatöre içine operatör adı verilir. Buna göre, eğer A örten bir operatör ise $\forall y \in Y$ için $A(x) = y$ olacak şekilde $x \in X$ vardır (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.7 $A: X \rightarrow Y$ operatörü için herhangi $x_1, x_2 \in X$ olmak üzere

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow A(x_1) \neq A(x_2)$$

ya da buna eşdeğer bir başka deyişle

$$A(x_1) = A(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

oluyorsa, A operatörüne birebir veya injektif operatör denir.

Tanım 2.8 Hem birebir hem de örten olan operatöre birebir örten veya bijektif operatör denir.

Tanım 2.9 X ve Y her ikisi reel ya da her ikisi kompleks olan herhangi iki lineer uzayken $D(A) \subset X$ ($D(A) \neq \emptyset$) olmak üzere $D(A)$ 'dan Y 'ye aşağıdaki koşulları sağlayan bir A operatörüne lineer operatör denir. Bu koşullar şöyledir:

1-) $D(A)$, X 'in bir lineer manifoldu yani alt uzayı olmalıdır. Bir başka anlatımla $x, y \in D(A)$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha x + \beta y \in D(A)$ olmalıdır.

2-) $\forall x, y \in D(A)$ için $A(x + y) = A(x) + A(y)$ (toplamsallık koşulu)

3-) $\forall x \in D(A)$ ve λ sayısı için $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ (homogenlik koşulu)

(3.3)

4. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN TANIMI ve TEMEL ÖZELLİKLERİ

4.1 Bir Lineer Vektör Uzayının ve Lineer Operatörün Genel Tanımı

$\mathfrak{R}$; $x, y, z, \dots$ elemanlarından oluşan herhangi bir küme olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\mathfrak{R}$ 'ye bir lineer vektör uzayı denir.

1) $\mathfrak{R}$ 'ye ait her x, y elemanlar çiftine bunların toplamı denilen ve $x + y$ ile gösterilen eleman karşılık getirilmişse, böyleki

$$a_1 : x, y \in \mathfrak{R} \text{ için } x + y \in \mathfrak{R}$$

$$b_1 : x + y = y + x$$

$$c_1 : (x + y) + z = x + (y + z)$$

$d_1 : \forall x \in \mathfrak{R}$ iken $x + 0 = x$ olacak şekilde $0 \in \mathfrak{R}$ elemanı vardır ve buna $\mathfrak{R}$ 'nin sıfırı denir.

$e_1 : \forall x \in \mathfrak{R}$ iken $x + (-x) = 0$ olacak şekilde bir $-x$ elemanı vardır. $x + (-y)$ elemanı $x - y$ şeklinde gösterilir. $-x$ 'e x 'in ters elemanı denir (Musayev ve Alp, 2000).

2) $\mathfrak{R}$ 'ye ait her x ve reel ya da kompleks λ sayısına λx elemanı karşılık getirilmişse, böyleki

$$a_2 : x \in \mathfrak{R} \text{ için } \lambda x \in \mathfrak{R}$$

$$b_2 : \lambda, \mu \text{ keyfi sayılar iken } \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$$

$$c_2 : 1.x = x$$

$d_2 : 0.x = 0$ (Burada eşitliğin sol yanındaki sıfır sayı olan sıfır ve sağ yandaki sıfır uzayın sıfırıdır)

$$e_2 : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

$$f_2 : \lambda, \mu \text{ keyfi sayılar iken } (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

$\mathfrak{R}$ uzayının $x, y, z, \dots$ elemanları $\mathfrak{R}$ 'de vektörler olarak isimlendirilir. Eğer sayılar olarak sadece reel sayılar alınırsa o zaman lineer vektör uzayına reel lineer vektör uzayı, kompleks sayılar alınırsa o zaman lineer vektör uzayına kompleks lineer vektör uzayı denir. Kompleks lineer vektör uzayında sadece reel sayılarla çarpım kullanılırsa o zaman kompleks lineer vektör uzayı reel lineer vektör uzayı oluşturur. $\mathfrak{R}$, aksi söylenmedikçe kompleks bir lineer vektör uzayı olarak alınır. $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ şeklindeki bir ifade $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonudur. Eğer ifadede $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ ise kombinasyon

anlamsızdır, diğer hallerde anlamlıdır. En azından bir tane anlamlı kombinasyon için bu çarpım sıfır oluyorsa $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımlı, eğer bu çarpımı sıfır yapan anlamlı kombinasyon yoksa $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörlerine lineer bağımsız denir.

$\mathfrak{R}$ 'nin $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonsuz sayıda vektörünü göz önüne alırsak eğer bu sistemin her sonlu sayıda vektörü lineer bağımsız ise o zaman $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektörler sistemi lineer bağımsızdır denir. Eğer $\mathfrak{R}$ lineer vektör uzayının n tane lineer bağımsız vektörü varsa ve her $n+1$ tane vektörü lineer bağımlı ise o zaman $\mathfrak{R}$ 'nin boyutu n dir veya $\mathfrak{R}$, n boyutlu uzaydır denir ve $\dim \mathfrak{R} = n$ şeklinde ifade edilir. Eğer $\mathfrak{R}$ 'de istenildiği sayıda lineer bağımsız vektör varsa o zaman $\mathfrak{R}$ 'ye sonsuz boyutlu lineer vektör uzayı denir. n boyutlu uzayın her n tane lineer bağımsız vektörler sistemine bu uzayın tabanı denir.

Eğer $\mathfrak{R}$ lineer vektör uzayına ait bir $\mathfrak{R}'$ kümesi $\mathfrak{R}$ 'de tanımlanan işlemlere göre (iki elemanın toplamı, elemanla sayının çarpımı) bir lineer vektör uzayı oluşturursa o zaman $\mathfrak{R}'$ ye $\mathfrak{R}$ 'nin bir lineer manifoldu denir. Bir başka deyişle $\forall x, y \in \mathfrak{R}'$ ve α, β keyfi sayılar iken $\alpha x + \beta y \in \mathfrak{R}'$ ise o zaman $\mathfrak{R}'$ ye $\mathfrak{R}$ 'nin bir lineer manifoldu denir.

D , $\mathfrak{R}$ lineer uzayının bir alt kümesi olsun. D 'nin her bir x elemanını $\mathfrak{R}$ 'nin bazı elemanlarına $x' = A(x)$ şeklinde eşleyen bir A fonksiyonu $\mathfrak{R}$ uzayında bir operatör ve D , A 'nın tanım kümesi olarak adlandırılır. Gösterim olarak genellikle $A(x)$ in yerine Ax , D yerine D_A kullanılır.

$x \in D_A$ olmak üzere tüm Ax vektörleri A operatörünün değer kümesi olarak adlandırılır ve R_A veya AD_A ile gösterilir. Anlaşılacağı üzere $AD_A = R_A$ dır.

Bir A operatörü, eğer D_A alt uzaysa ve keyfi $x, y \in D(A)$ vektörleri ve herhangi bir λ sayısı için

$$A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

$$A(x + y) = A(x) + A(y)$$

oluyorsa lineerdir.

4.2 Lineer Diferansiyel İfadeler

Bir lineer diferansiyel ifade

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y \quad (4.1)$$

şeklinde. Bu ifadedeki $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ katsayılar fonksiyonları olup $p_0(x)y^{(n)}$ terimindeki n sayısı diferansiyel denklemler teorisinden bilineceği üzere diferansiyel ifadenin mertebesidir. Konuyu ele alırken $\frac{1}{p_0(x)}, p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ fonksiyonları sabit tutulmuş, kapalı, $[a, b]$ sonlu aralığında sürekli varsayılacak; bazı hallerde ilave şartlar konulacaktır.

$C^{(n)}$ ile kapalı $[a, b]$ aralığında n . mertebeden sürekli türevli bütün $y(x)$ fonksiyonlarını göstereceğiz. Her $y \in C^{(n)}$ fonksiyonu için $l(y)$ diferansiyel ifadesi tanımlıdır ve $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur (Naimark, 1968).

4.2.1 Sınır Koşulları

y fonksiyonunun ve ardışık ilk $(n-1)$ tane türevinin $[a, b]$ aralığının a ve b sınır noktalarındaki değerlerini

$$y_a, y'_a, \dots, y_a^{(n-1)}; y_b, y'_b, \dots, y_b^{(n-1)} \quad (4.2)$$

ile gösterelim. $U(y)$, (4.2)'deki değişkenlerin

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y'_a + \dots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y'_b + \dots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)} \quad (4.3)$$

yazımıyla bir lineer formu olsun. Yani $y = (y_a, y'_a, \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \dots, y_b^{(n-1)})$ yapısındadır.

Eğer bu tarz $U_v(y)$ ($v = 1, 2, \dots, m$) formları verilmişse

$$U_v(y) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, m) \quad (4.4)$$

eşitliklerine $y(x) \in C^{(n)}$ fonksiyonunu belirlemeye yarayan sınır koşulları denir. (4.4) sınır koşullarını sağlayan tüm $y \in C^{(n)}$ fonksiyonlarının kümesini D ile gösteririz. D 'nin $C^{(n)}$ uzayında bir lineer alt uzay olduğu açıktır.

Belli bir $l(y)$ diferansiyel ifadesini ve (4.4)'de verilen koşullarla tanımlanmış özel bir D alt uzayını düşünelim. $\forall y \in D$ fonksiyonuna $u = l(y)$ eşitliği bir $u(x)$ fonksiyonunu karşılık

getirir. Bu gösterim D tanım kümesinde bir lineer operatör olup onu L ile gösteririz. Buna göre notasyon olarak

$$u = Ly$$

yazılır. L 'ye $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (4.4) sınır koşulları ile oluşturulmuş diferansiyel operatör denir. Aynı bir $l(y)$ diferansiyel ifadesi ile (4.4)'de seçilen sınır koşullarına bağlı olarak çeşitli diferansiyel operatörler oluşturulabilir. Eğer özel olarak (4.4) koşulları yoksa $D = C^{(n)}$ tanım kümesinde L_1 ile gösterilen bir diferansiyel operatör tanımlanabilir. L_1 'in aynı $l(y)$ diferansiyel ifadesi ile oluşturulmuş diğer tüm L operatörlerinin bir genişlemesi ($L_1 \supset L$) olduğu açıktır. Ancak çok sayıda problemlerde geniş şekilde tanımlanmış L_1 operatörünün yukarıda açıklanan sınır koşullarıyla daraltılmaları incelenir.

Bazen $U_v(y)$ formlarının bazıları geriye kalanlarının lineer birleşimi şeklinde ifade edilebilir. Bu takdirde bu tür form'a karşılık gelen $U_v(y) = 0$ geri kalanların sonucu olur ve bu dışarı atılabilir. Örneğin $m = 3$ alınırsa ve $U_2(y)$ diğerlerinin lineer birleşimi ise $U_2(y) = c_1 U_1(y) + c_3 U_3(y) = 0$ olur. Buna göre en baştan $U_v(y)$ formlarını lineer bağımsız alabiliriz. Lineer cebir'den bilindiği gibi bu $U_v(y)$ formlarının katsayılarından oluşan matrisin rankı m 'ye eşittir ($m \leq 2n$).

$U(y)$ yazılış yapısı incelendiğinde n . mertebeden ifadede $2n$ tane bilinmeyen vardır. O halde $m = 2n$ için (4.4) denklemleri yazılırsa lineer cebir bilgileri de kullanılarak

$$U_1(y) = U_2(y) = \dots = U_{2n}(y) = 0 \Rightarrow y_a = y'_a = \dots = y_a^{(n-1)} = y_b = y'_b = \dots = y_b^{(n-1)} = 0$$

olur. Çünkü $U_v(y)$ 'ler lineer bağımsız seçilmişlerdir (Naimark, 1968).

4.2.2 Homogen Sınır-Değer Problemi

Bir $y \in C^{(n)}$ fonksiyonunu tespit etme (belirleme) problemi

$$l(y) = 0 \tag{4.5}$$

$$U_v(y) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, m) \tag{4.6}$$

koşullarıyla homogen sınır-değer problemi olarak tanımlanır. Eğer L operatörü (4.5) ile verilen $l(y)$ diferansiyel ifadesinden ve (4.6) ile verilen sınır koşullarından meydana gelmiş

ise o zaman homogen sınır-değer problemi L operatörünün D tanım bölgesinde L 'yi dikkate almaksızın bir y fonksiyonu bulmak demektir.

Açıktır ki herhangi bir homogen sınır-değer probleminin her zaman en az bir çözümü vardır ki bu, $y = 0$ dır. Bu çözüme aşikâr çözüm denir. Bir homogen sınır-değer probleminin bunun yanında sıfır olmayan çözümleri de olabilir. Dolayısıyla esas olan bir homogen sınır-değer probleminin sıfır olmayan çözümlerinin hangi koşullar altında olduğunu araştırmaktır.

$y_1, y_2, \dots, y_n$; n . mertebeden $I(y) = 0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Lineer diferansiyel denklemler teorisinden bilineceği üzere $I(y) = 0$ denkleminin ve aynı zamanda homogen sınır değer probleminin herhangi çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (4.7)$$

formunda ifade edilmelidir. Buradaki $c_1, c_2, \dots, c_n$ bulunması gerekli sabitlerdir. Bu çözüm (4.6) sınır koşullarını sağlayacaktır. Örnek olması bakımından $v = 1$ için nasıl bir yapı olduğu ortaya konulacaktır. Şöyle ki:

$$U_1(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y'_a + \dots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y'_b + \dots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)} = 0 \quad (4.8)$$

olsun. (4.7)'deki çözüm ifadesi (4.8)'de yerine yazılırsa ve (4.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned} U_1(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n) = 0 \Rightarrow & \alpha_0 [c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + \dots + c_n y_n(a)] + \alpha_1 [c_1 y'_1(a) + c_2 y'_2(a) \\ & + \dots + c_n y'_n(a)] + \dots + \alpha_{n-1} [c_1 y_1^{(n-1)}(a) + c_2 y_2^{(n-1)}(a) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(a)] + \beta_0 [c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + \dots \\ & + c_n y_n(b)] + \beta_1 [c_1 y'_1(b) + c_2 y'_2(b) + \dots + c_n y'_n(b)] + \dots + \beta_{n-1} [c_1 y_1^{(n-1)}(b) + c_2 y_2^{(n-1)}(b) + \dots + c_n \\ & y_n^{(n-1)}(b)] = 0 \end{aligned}$$

ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} U_1(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n) = & c_1 [\alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 y'_1(a) + \dots + \alpha_{n-1} y_1^{(n-1)}(a) + \beta_0 y_1(b) + \beta_1 y'_1(b) + \dots \\ & + \beta_{n-1} y_1^{(n-1)}(b)] + c_2 [\alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 y'_2(a) + \dots + \alpha_{n-1} y_2^{(n-1)}(a) + \beta_0 y_2(b) + \beta_1 y'_2(b) + \dots + \beta_{n-1} \\ & y_2^{(n-1)}(b)] + \dots + c_n [\alpha_0 y_n(a) + \alpha_1 y'_n(a) + \dots + \alpha_{n-1} y_n^{(n-1)}(a) + \beta_0 y_n(b) + \beta_1 y'_n(b) + \dots + \beta_{n-1} y_n^{(n-1)}(b)] \\ & = 0 \end{aligned}$$

dan

$$U_1(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n) = c_1 U_1(y_1) + c_2 U_1(y_2) + \dots + c_n U_1(y_n) = 0$$

$$\hat{y}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.11)$$

lineer dönüşümüyle geçilebilir. Önemli olan yeni sistemin determinantının sıfır olmamasıdır. (4.11) dönüşümüyle U matrisi $[a_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) matrisiyle çarpılmakta ve rank aynı kalmaktadır. U matrisinin rankı sınır-değer probleminin rankıdır.

Verilen bir homogen sınır-değer problemi aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir:

$U_1(y), U_2(y), \dots, U_n(y); C^{(n)}$ uzayının lineer bağımsız fonksiyonları, $l(y)$ ise n . mertebeden bir diferansiyel ifade olsun ($C^{(n)}$ uzayında norm olarak $|y| = \sum_{k=0}^n \max_{a \leq x \leq b} |y^{(k)}(x)|$ alınabilir). Bu

takdirde genelleştirilmiş bir homogen sınır-değer probleminden kastedilen $C^{(n)}$ uzayında

$$l(y) = 0, \quad U_v(y) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

koşullarını sağlayan bir y fonksiyonu bulmaktır (Stakgold, 1979).

4.2.3 Lagrange'ın Formülü: Eşlenik Diferansiyel İfade

$$l(y) = p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + p_n(x) y \quad (4.12)$$

diferansiyel ifadesinin $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) katsayılarının $[a, b]$ aralığında $(n - k)$.

mertebeden türevleri sürekli ayrıca y ve z , $C^{(n)}$ 'de keyfi iki fonksiyon olsun. $\int_a^b l(y) \bar{z} dx$

integralini göz önüne alalım. Burada $\bar{z}$, $z(x)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğini göstermektedir. Yani $\bar{z} = \overline{z(x)}$ dir. Buna göre

$$\int_a^b l(y) \bar{z} dx = \int_a^b [p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_n(x) y] \bar{z} dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b p_{n-k} \bar{z} y^{(k)} dx \quad (4.13)$$

ifadesi ele alınmalıdır. Kısmi integrasyonlar uygulanarak

$$u = p_{n-k} \bar{z} \rightarrow du = (p_{n-k} \bar{z})' dx \quad (4.14)$$

$$dv = y^{(k)} dx \rightarrow v = y^{(k-1)} \quad (4.15)$$

bulunur. (4.14) ve (4.15) eşitlikleri (4.13)'de kullanılarak

$$\int_a^b p_{n-k} \bar{z} y^{(k)} dx = p_{n-k} \bar{z} y^{(k-1)} \Big|_a^b - \int_a^b (p_{n-k} \bar{z})' y^{(k-1)} dx \quad (4.16)$$

elde edilir. Bir kez daha kısmi integrasyon uygulanırsa

$$u = (p_{n-k} \bar{z})' \rightarrow du = (p_{n-k} \bar{z})'' dx \quad (4.17)$$

$$dv = y^{(k-1)} dx \rightarrow v = y^{(k-2)} \quad (4.18)$$

olarak (4.17) ve (4.18) eşitliklerinden kısmi integrasyon formülüne göre (4.16) eşitliği

$$\int_a^b p_{n-k} \bar{z} y^{(k)} dx = [p_{n-k} \bar{z} y^{(k-1)} - (p_{n-k} \bar{z})' y^{(k-2)}]_a^b + \int_a^b (p_{n-k} \bar{z})'' y^{(k-2)} dx \quad (4.19)$$

halini alır. Benzer işlemler sürdürülürse genel ifade olarak

$$\int_a^b p_{n-k} \bar{z} y^{(k)} dx = [p_{n-k} \bar{z} y^{(k-1)} - (p_{n-k} \bar{z})' y^{(k-2)} + \dots + (-1)^{k-1} (p_{n-k} \bar{z})^{(k-1)} y]_a^b + (-1)^k \int_a^b (p_{n-k} \bar{z})^{(k)} y dx \quad (4.20)$$

elde edilir. Bu ifadede $k = n, n-1, \dots, 0$ koyarsak ve sonuç denklemlerini toplarsak

$$\begin{aligned} \int_a^b l(y) \bar{z} dx &= [p_0 \bar{z} y^{(n-1)} - (p_0 \bar{z})' y^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} (p_0 \bar{z})^{(n-1)} y + p_1 \bar{z} y^{(n-2)} - (p_1 \bar{z})' y^{(n-3)} + \dots \\ &+ (-1)^{n-2} (p_1 \bar{z})^{(n-2)} y + p_2 \bar{z} y^{(n-3)} - (p_2 \bar{z})' y^{(n-4)} + \dots + (-1)^{n-3} (p_2 \bar{z})^{(n-3)} y + \dots + p_{n-1} \bar{z} y]_a^b + \\ &+ \int_a^b [(-1)^n (p_0 \bar{z})^{(n)} + (-1)^{n-1} (p_1 \bar{z})^{(n-1)} + (-1)^{n-2} (p_2 \bar{z})^{(n-2)} + \dots + p_n \bar{z}] y dx \end{aligned} \quad (4.21)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} P(\eta, \zeta) &= [p_0 \bar{z} y^{(n-1)} - (p_0 \bar{z})' y^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} (p_0 \bar{z})^{(n-1)} y + p_1 \bar{z} y^{(n-2)} - (p_1 \bar{z})' y^{(n-3)} + \dots \\ &+ (-1)^{n-2} (p_1 \bar{z})^{(n-2)} y + p_2 \bar{z} y^{(n-3)} - (p_2 \bar{z})' y^{(n-4)} + \dots + (-1)^{n-3} (p_2 \bar{z})^{(n-3)} y + \dots + p_{n-1} \bar{z} y]_a^b \end{aligned} \quad (4.22)$$

ve

$$l^*(z) = (-1)^n (\overline{p_0 z})^{(n)} + (-1)^{n-1} (\overline{p_1 z})^{(n-1)} + (-1)^{n-2} (\overline{p_2 z})^{(n-2)} + \dots + \overline{p_n z} \quad (4.23)$$

$$\overline{l^*(z)} = \overline{(-1)^n (\overline{p_0 z})^{(n)} + (-1)^{n-1} (\overline{p_1 z})^{(n-1)} + (-1)^{n-2} (\overline{p_2 z})^{(n-2)} + \dots + \overline{p_n z}} \quad (4.24)$$

olarak değerlendirilirse (4.22) ve (4.24)'den (4.21) eşitliği

$$\int_a^b l(y) \bar{z} dx = P(\eta, \zeta) + \int_a^b \overline{y l^*(z)} dx \quad (4.25)$$

olarak yazılır. (4.25)'deki $P(\eta, \zeta)$;

$$\eta = (y_a, y'_a, \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \dots, y_b^{(n-1)})$$

ve

$$\zeta = (z_a, z'_a, \dots, z_a^{(n-1)}, z_b, z'_b, \dots, z_b^{(n-1)})$$

değişkenlerinin bir bilinear formudur. Bilinear form genelde $C^{(n)}$ uzayında geçerlidir.

$x_i, y_i \in C$ olmak üzere

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

olarak $\forall x, y \in C^{(n)}$ ye bir $\phi(x, y)$ sayısı karşılık geliyorsa ve aşağıdaki koşulları sağlıyorsa o zaman $\phi(x, y)$ ye $C^{(n)}$ de bir bilinear form denir. Bu koşullar şöyledir:

1-) $\phi(x, y)$ y sabit iken x e göre lineer yani

$$\phi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n, y) = \alpha_1 \phi(x_1, y) + \alpha_2 \phi(x_2, y) + \dots + \alpha_n \phi(x_n, y)$$

2-) $\phi(x, y)$ x sabit tutulurken y ye göre antilineer yani

$$\phi(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n) = \overline{\alpha_1} \phi(x, y_1) + \overline{\alpha_2} \phi(x, y_2) + \dots + \overline{\alpha_n} \phi(x, y_n)$$

olmalıdır (Coddington ve Levinson, 1955).

(4.25) ile verilen eşitlik Lagrange'ın formülü, bu formülde geçen ve (4.23) ile verilen $l^*(z)$ diferansiyel ifadesi ise $l(y)$ 'nin eşlenik diferansiyel ifadesi olarak adlandırılır.

$\int_a^b l^*(z) \bar{y} dx$ integralini göz önüne alırsak (4.25) eşitliğinden yola çıkarak analoji yoluyla

$$\int_a^b l^*(z) \bar{y} dx = \theta(\eta, \zeta) + \int_a^b \overline{z l(y)} dx \quad (4.26)$$

şeklinde bir ifade elde edilir. (4.26) eşitliğindeki $l(y)$ diferansiyel ifadesi $l^*(z)$ diferansiyel ifadesinin eşleniği olduğundan

$$l^{**}(y) = l(y) \quad (4.27)$$

yazılabilir. Bir başka deyişle $l(y)$ ve $l^*(y)$ diferansiyel ifadeleri birbirlerinin eşleniğidirler. (4.23) dikkate alınarak eşlenik ifadeler için

$$(l_1 + l_2)^* = l_1^* + l_2^* \quad (4.28)$$

ve λ keyfi bir sayı olmak üzere

$$(\lambda l)^* = \bar{\lambda} l^* \quad (4.29)$$

olduğu anlaşılmaktadır.

Bir $l(y)$ diferansiyel ifadesinde eğer $l^* = l$ ise $l(y)$ 'ye kendine eş denir. (4.28) ve (4.29)'dan aşağıdaki sonuçlar söylenebilir:

Sonuç 4.2.5 Kendine eş diferansiyel ifadelerin toplamı da kendine eş bir diferansiyel ifadedir.

Sonuç 4.2.6 Bir reel sayıyla kendine eş bir diferansiyel ifadenin çarpımı da kendine eş bir diferansiyel ifadedir.

Şimdi bütün kendine eş diferansiyel ifadelerin genel formunu bulmak hedeflenmektedir.

Teorem 4.2.7 $p; [a, b]$ aralığında reel değerli bir fonksiyon olmak üzere herhangi kendine eş diferansiyel ifade

$$l_{2v}(y) = (py^{(v)})^{(v)}; l_{2v-1}(y) = \frac{1}{2}[(ipy^{(v-1)})^{(v)} + (ipy^{(v)})^{(v-1)}]$$

formundaki diferansiyel ifadelerin bir toplamıdır.

İspat: $y, z \in C^{(n)}$ olmak üzere $\int_a^b l_{2v}(y) \bar{z} dx$ ve $\int_a^b l_{2v-1}(y) \bar{z} dx$ integrallerini göz önüne alalım.

Kısmi integrasyonlarla $l_{2v}(y)$ ve $l_{2v-1}(y)$ diferansiyel ifadelerinin ayrı ayrı kendine eş oldukları gösterilmelidir. Sonuç olarak bu gösterilebilirse bu formdaki ifadelerin her biri için toplam benzer şekilde kendine eş bir diferansiyel ifade olur.

$$\int_a^b l_{2v}(y) \bar{z} dx = \int_a^b (py^{(v)})^{(v)} \bar{z} dx \quad (4.30)$$

integralini göz önüne alırsak nasıl bir yapıda olduğunun ortaya konulması gerekmektedir. Bunun için $v = 1, 2, \dots$ alınarak genel ifade bulunmalıdır.

$$v = 1 \Rightarrow (py')' = py'' + p'y'$$

$$v = 2 \Rightarrow (py'')' = py''' + 2p'y'' + p''y'$$

$$v = 3 \Rightarrow (py''')' = py'''' + 3p'y''' + 3p''y'' + p'''y'$$

.....

$$v = v \Rightarrow (py^{(v)})^{(v)} = py^{(2v)} + vp'y^{(2v-1)} + \binom{v}{2} p''y^{(2v-2)} + \binom{v}{3} p'''y^{(2v-3)} + \dots + p^{(v)}y^{(v)} \quad (4.31)$$

(4.31), (4.30)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_a^b l_{2v}(y) \bar{z} dx &= \int_a^b (py^{(v)})^{(v)} \bar{z} dx = \int_a^b \left[py^{(2v)} + vp'y^{(2v-1)} + \binom{v}{2} p''y^{(2v-2)} + \binom{v}{3} p'''y^{(2v-3)} + \dots + p^{(v)}y^{(v)} \right] \\ \bar{z} dx &= \int_a^b p \bar{z} y^{(2v)} dx + v \int_a^b p' \bar{z} y^{(2v-1)} dx + \binom{v}{2} \int_a^b p'' \bar{z} y^{(2v-2)} dx + \binom{v}{3} \int_a^b p''' \bar{z} y^{(2v-3)} dx + \dots + \int_a^b p^{(v)} \bar{z} \\ &\quad y^{(v)} dx \quad (4.32) \end{aligned}$$

bulunur. Buradaki toplamın her bir terimine ayrı ayrı kısmi integrasyon uygulanmalıdır.

$$I_1 = \int_a^b p \bar{z} y^{(2v)} dx \quad (4.33)$$

alınırsa

$$u = p \bar{z} \rightarrow du = (p \bar{z})' dx \quad (4.34)$$

$$dv = y^{(2v)} dx \rightarrow v = y^{(2v-1)} \quad (4.35)$$

olarak (4.34) ve (4.35), (4.33)'de kullanılırsa

$$I_1 = \int_a^b p \bar{z} y^{(2v)} dx = p \bar{z} y^{(2v-1)} \Big|_a^b - \int_a^b (p \bar{z})' y^{(2v-1)} dx \quad (4.36)$$

olup tekrar kısmi integrasyonla

$$u = (p\bar{z})' \rightarrow du = (p\bar{z})'' dx \quad (4.37)$$

$$dv = y^{(2v-1)} dx \rightarrow v = y^{(2v-2)} \quad (4.38)$$

(4.36) için yazılırsa

$$I_1 = \int_a^b p\bar{z}y^{(2v)} dx = [p\bar{z}y^{(2v-1)} - (p\bar{z})'y^{(2v-2)}]_a^b + \int_a^b (p\bar{z})''y^{(2v-2)} dx \quad (4.39)$$

ve son kez kısmi integrasyonla

$$u = (p\bar{z})'' \rightarrow du = (p\bar{z})''' dx \quad (4.40)$$

$$dv = y^{(2v-2)} dx \rightarrow v = y^{(2v-3)} \quad (4.41)$$

(4.39)'da yazılırsa

$$I_1 = \int_a^b p\bar{z}y^{(2v)} dx = [p\bar{z}y^{(2v-1)} - (p\bar{z})'y^{(2v-2)} + (p\bar{z})''y^{(2v-3)}]_a^b - \int_a^b (p\bar{z})'''y^{(2v-3)} dx \quad (4.42)$$

ve genellemeye gidilirse

$$I_1 = \int_a^b p\bar{z}y^{(2v)} dx = [p\bar{z}y^{(2v-1)} - (p\bar{z})'y^{(2v-2)} + \dots + (-1)^{2v-1}(p\bar{z})^{(2v-1)}y]_a^b + \int_a^b (p\bar{z})^{(2v)}y dx \quad (4.43)$$

olur.

$$I_2 = \int_a^b p'z\bar{y}^{(2v-1)} dx \quad (4.44)$$

alınırsa

$$u = p'z \rightarrow du = (p'z)' dx \quad (4.45)$$

$$dv = y^{(2v-1)} dx \rightarrow v = y^{(2v-2)} \quad (4.46)$$

olur. (4.45) ve (4.46), (4.44)'de kullanılırsa

$$I_2 = \int_a^b p'z\bar{y}^{(2v-1)} dx = [p'z\bar{y}^{(2v-2)}]_a^b - \int_a^b (p'z)'\bar{y}^{(2v-2)} dx \quad (4.47)$$

olup tekrar kısmi integrasyonla

$$u = (p'z)' \rightarrow du = (p'z)'' dx \quad (4.48)$$

$$dv = y^{(2\nu-2)} dx \rightarrow v = y^{(2\nu-3)} \quad (4.49)$$

olur. (4.48) ve (4.49), (4.47)'de kullanılırsa

$$I_2 = \int_a^b p' \bar{z} y^{(2\nu-1)} dx = p' \bar{z} y^{(2\nu-2)} - (p' \bar{z})' y^{(2\nu-3)} \Big|_a^b + \int_a^b (p' \bar{z})'' y^{(2\nu-3)} dx \quad (4.50)$$

bulunur. Son kez kısmi integrasyonla

$$u = (p' \bar{z})'' \rightarrow du = (p' \bar{z})''' dx \quad (4.51)$$

$$dv = y^{(2\nu-3)} dx \rightarrow v = y^{(2\nu-4)} \quad (4.52)$$

olarak (4.51) ve (4.52), (4.50)'de değerlendirilirse

$$I_2 = \int_a^b p' \bar{z} y^{(2\nu-1)} dx = p' \bar{z} y^{(2\nu-2)} - (p' \bar{z})' y^{(2\nu-3)} + (p' \bar{z})'' y^{(2\nu-4)} \Big|_a^b - \int_a^b (p' \bar{z})''' y^{(2\nu-4)} dx \quad (4.53)$$

ve genellemeye gidilirse

$$I_2 = \int_a^b p' \bar{z} y^{(2\nu-1)} dx = p' \bar{z} y^{(2\nu-2)} - (p' \bar{z})' y^{(2\nu-3)} + \dots + (-1)^{2\nu-2} (p' \bar{z})^{(2\nu-2)} y \Big|_a^b + (-1)^{2\nu-1} \int_a^b (p' \bar{z})^{(2\nu-1)} y dx \quad (4.54)$$

olur.

$$I_3 = \int_a^b p'' \bar{z} y^{(2\nu-2)} dx \quad (4.55)$$

alınırsa kısmi integrasyona göre

$$u = p'' \bar{z} \rightarrow du = (p'' \bar{z})' dx \quad (4.56)$$

$$dv = y^{(2\nu-2)} dx \rightarrow v = y^{(2\nu-3)} \quad (4.57)$$

olur. (4.56) ve (4.57), (4.55) için yazılırsa

$$I_3 = \int_a^b p'' \bar{z} y^{(2\nu-2)} dx = p'' \bar{z} y^{(2\nu-3)} \Big|_a^b - \int_a^b (p'' \bar{z})' y^{(2\nu-3)} dx \quad (4.58)$$

olup tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$u = (p'' \bar{z})' \rightarrow du = (p'' \bar{z})'' dx \quad (4.59)$$

$$dv = y^{(2\nu-3)} dx \rightarrow v = y^{(2\nu-4)} \quad (4.60)$$

olarak (4.59) ve (4.60), (4.58)'de kullanılırsa

$$I_3 = \int_a^b p'' \bar{z} y^{(2\nu-2)} dx = p'' \bar{z} y^{(2\nu-3)} - (p'' \bar{z})' y^{(2\nu-4)} \Big|_a^b + \int_a^b (p'' \bar{z})'' y^{(2\nu-4)} dx \quad (4.61)$$

olup son kez kısmi integrasyonla

$$u = (p'' \bar{z})'' \rightarrow du = (p'' \bar{z})''' dx \quad (4.62)$$

$$dv = y^{(2\nu-4)} dx \rightarrow v = y^{(2\nu-5)} \quad (4.63)$$

olarak (4.61)'de yerlerine yazılırsa

$$I_3 = \int_a^b p'' \bar{z} y^{(2\nu-2)} dx = p'' \bar{z} y^{(2\nu-3)} - (p'' \bar{z})' y^{(2\nu-4)} + (p'' \bar{z})'' y^{(2\nu-5)} \Big|_a^b - \int_a^b (p'' \bar{z})''' y^{(2\nu-5)} dx \quad (4.64)$$

ve genellemeye gidilirse

$$I_3 = \int_a^b p'' \bar{z} y^{(2\nu-2)} dx = p'' \bar{z} y^{(2\nu-3)} - (p'' \bar{z})' y^{(2\nu-4)} + \dots + (-1)^{2\nu-3} (p'' \bar{z})^{(2\nu-3)} y \Big|_a^b + (-1)^{2\nu-2} \int_a^b (p'' \bar{z})^{(2\nu-2)} y dx \quad (4.65)$$

elde edilir.

$$I_4 = \int_a^b p''' \bar{z} y^{(2\nu-3)} dx \quad (4.66)$$

alınırsa kısmi integrasyon ifadeleri

$$u = p''' \bar{z} \rightarrow du = (p''' \bar{z})' dx \quad (4.67)$$

$$dv = y^{(2\nu-3)} dx \rightarrow v = y^{(2\nu-4)} \quad (4.68)$$

olarak (4.66) için yazılırsa

$$I_4 = \int_a^b p''' \bar{z} y^{(2\nu-3)} dx = p''' \bar{z} y^{(2\nu-4)} \Big|_a^b - \int_a^b (p''' \bar{z})' y^{(2\nu-4)} dx \quad (4.69)$$

bulunur. Bir kez daha kısmi integrasyonla

$$u = (p''' \bar{z})' \rightarrow du = (p''' \bar{z})'' dx \quad (4.70)$$

$$dv = y^{(2v-4)} dx \rightarrow v = y^{(2v-5)} \quad (4.71)$$

ifadeleri (4.69)'da yazılırsa

$$I_4 = \int_a^b p''' \bar{z} y^{(2v-3)} dx = p''' \bar{z} y^{(2v-4)} - (p''' \bar{z})' y^{(2v-5)} \Big|_a^b + \int_a^b (p''' \bar{z})'' y^{(2v-5)} dx \quad (4.72)$$

bulunur. Son kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$u = (p''' \bar{z})'' \rightarrow du = (p''' \bar{z})''' dx \quad (4.73)$$

$$dv = y^{(2v-5)} dx \rightarrow v = y^{(2v-6)} \quad (4.74)$$

olarak (4.72)'de değerlendirilirse

$$I_4 = \int_a^b p''' \bar{z} y^{(2v-3)} dx = p''' \bar{z} y^{(2v-4)} - (p''' \bar{z})' y^{(2v-5)} + (p''' \bar{z})'' y^{(2v-6)} \Big|_a^b - \int_a^b (p''' \bar{z})''' y^{(2v-6)} dx \quad (4.75)$$

ve genellemeye gidilirse

$$I_4 = \int_a^b p''' \bar{z} y^{(2v-3)} dx = p''' \bar{z} y^{(2v-4)} - (p''' \bar{z})' y^{(2v-5)} + \dots + (-1)^{2v-4} (p''' \bar{z})^{(2v-4)} y \Big|_a^b + (-1)^{2v-3} \cdot \int_a^b (p''' \bar{z})^{(2v-3)} y dx \quad (4.76)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$I_k = \int_a^b p^{(v)} \bar{z} y^{(v)} dx \quad (4.77)$$

$$I_k = \int_a^b p^{(v)} \bar{z} y^{(v)} dx = p^{(v)} \bar{z} y^{(v-1)} - (p^{(v)} \bar{z})' y^{(v-2)} + \dots + (-1)^{v-1} (p^{(v)} \bar{z})^{(v-1)} y \Big|_a^b + (-1)^v \int_a^b (p^{(v)} \bar{z})^{(v)} y dx \quad (4.78)$$

bulunur. Böylece (4.43), (4.54), (4.65), (4.76) ve (4.78) eşitlikleri (4.32)'de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_a^b l_{2\nu}(y) \bar{z} dx &= \int_a^b (py^{(\nu)})^{(\nu)} \bar{z} dx = [p\bar{z}y^{(2\nu-1)} - (p\bar{z})'y^{(2\nu-2)} + \dots + (-1)^{2\nu-1}(p\bar{z})^{(2\nu-1)}y]_a^b + \int_a^b (p\bar{z})^{(2\nu)} \\
&\cdot y dx + \nu [p'\bar{z}y^{(2\nu-2)} - (p'\bar{z})'y^{(2\nu-3)} + \dots + (-1)^{2\nu-2}(p'\bar{z})^{(2\nu-2)}y]_a^b + \nu(-1)^{2\nu-1} \int_a^b (p'\bar{z})^{(2\nu-1)} \cdot y dx + \\
&+ \binom{\nu}{2} [p''\bar{z}y^{(2\nu-3)} - (p''\bar{z})'y^{(2\nu-4)} + \dots + (-1)^{2\nu-3}(p''\bar{z})^{(2\nu-3)}y]_a^b + \binom{\nu}{2} (-1)^{2\nu-2} \int_a^b (p''\bar{z})^{(2\nu-2)} y dx + \\
&+ \binom{\nu}{3} [p'''\bar{z}y^{(2\nu-4)} - (p'''\bar{z})'y^{(2\nu-5)} + \dots + (-1)^{2\nu-4}(p'''\bar{z})^{(2\nu-4)}y]_a^b + \binom{\nu}{3} (-1)^{2\nu-3} \int_a^b (p'''\bar{z})^{(2\nu-3)} y dx + \\
&\dots + [p^{(\nu)}\bar{z}y^{(\nu-1)} - (p^{(\nu)}\bar{z})'y^{(\nu-2)} + \dots + (-1)^{\nu-1}(p^{(\nu)}\bar{z})^{(\nu-1)}y]_a^b + (-1)^\nu \int_a^b (p^{(\nu)}\bar{z})^{(\nu)} y dx \quad (4.79)
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$\int_a^b l_{2\nu}(y) \bar{z} dx = A(\eta, \zeta) + \int_a^b \overline{yl_{2\nu}^*(z)} dx \quad (4.80)$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
A(\eta, \zeta) &= \{p\bar{z}y^{(2\nu-1)} - (p\bar{z})'y^{(2\nu-2)} + \dots + (-1)^{2\nu-1}(p\bar{z})^{(2\nu-1)}y + \nu[p'\bar{z}y^{(2\nu-2)} - (p'\bar{z})'y^{(2\nu-3)} + \dots \\
&+ (-1)^{2\nu-2}(p'\bar{z})^{(2\nu-2)}y] + \binom{\nu}{2} [p''\bar{z}y^{(2\nu-3)} - (p''\bar{z})'y^{(2\nu-4)} + \dots + (-1)^{2\nu-3}(p''\bar{z})^{(2\nu-3)}y] + \binom{\nu}{3} [p'''\bar{z} \\
&\cdot y^{(2\nu-4)} - (p'''\bar{z})'y^{(2\nu-5)} + \dots + (-1)^{2\nu-4}(p'''\bar{z})^{(2\nu-4)}y] + \dots + p^{(\nu)}\bar{z}y^{(\nu-1)} - (p^{(\nu)}\bar{z})'y^{(\nu-2)} + \dots \\
&+ (-1)^{\nu-1} \cdot (p^{(\nu)}\bar{z})^{(\nu-1)}y\}_a^b \quad (4.81)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
l_{2\nu}^*(z) &= (\bar{p}z)^{(2\nu)} + \nu(-1)^{2\nu-1}(\bar{p}'z)^{(2\nu-1)} + \binom{\nu}{2}(-1)^{2\nu-2}(\bar{p}''z)^{(2\nu-2)} + \binom{\nu}{3}(-1)^{2\nu-3}(\bar{p}'''z)^{(2\nu-3)} + \dots \\
&+ (-1)^\nu (\bar{p}^{(\nu)}z)^{(\nu)} \quad (4.82)
\end{aligned}$$

dir. Burada p reel değerli bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
l_{2\nu}^*(z) &= (pz)^{(2\nu)} + \nu(-1)^{2\nu-1}(p'z)^{(2\nu-1)} + \binom{\nu}{2}(-1)^{2\nu-2}(p''z)^{(2\nu-2)} + \binom{\nu}{3}(-1)^{2\nu-3}(p'''z)^{(2\nu-3)} + \dots \\
&+ (-1)^\nu (p^{(\nu)}z)^{(\nu)} \quad (4.83)
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca (4.31)'den analogi yoluyla

$$l_{2\nu}(z) = pz^{(2\nu)} + \nu p'z^{(2\nu-1)} + \binom{\nu}{2} p''z^{(2\nu-2)} + \binom{\nu}{3} p'''z^{(2\nu-3)} + \dots + p^{(\nu)}z^{(\nu)} \quad (4.84)$$

yazılabilir. (4.83) ve (4.84) dikkatli incelenirse

$$l_{2\nu}^*(z) = l_{2\nu}(z) \quad (4.85)$$

olduğu görülür. O halde benzer şekilde

$$l_{2\nu}(y) = l_{2\nu}^*(y) \quad (4.86)$$

yazılabilir ki bu $l_{2\nu}(y)$ 'nin kendine eş olduğunu gösterir.

$$\int_a^b l_{2\nu-1}(y) \bar{z} dx = \int_a^b \frac{1}{2} [(ipy^{(\nu-1)})^{(\nu)} + (ipy^{(\nu)})^{(\nu-1)}] \bar{z} dx \quad (4.87)$$

integralini göz önüne alırsak nasıl bir yapıda olduğunun ortaya konulması gerekmektedir. Bunun için $\nu = 1, 2, \dots$ alınarak genel ifade bulunmalıdır.

$$\nu = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} [(ipy)' + ipy'] = \frac{1}{2} (2ipy' + ip'y)$$

$$\nu = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} [(ipy')'' + (ipy'')'] = \frac{1}{2} (2ipy''' + 3ip'y'' + ip''y')$$

$$\nu = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} [(ipy'')''' + (ipy''')''] = \frac{1}{2} (2ipy'''' + 5ip'y''' + 4ip''y'' + ip'''y'')$$

$$\begin{aligned} \nu = \nu \Rightarrow \frac{1}{2} [(ipy^{(\nu-1)})^{(\nu)} + (ipy^{(\nu)})^{(\nu-1)}] &= ipy^{(2\nu-1)} + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) ip'y^{(2\nu-2)} + \frac{1}{2}(\nu-1)^2 ip''y^{(2\nu-3)} + \dots \\ &+ \frac{1}{2} ip^{(\nu)} y^{(\nu-1)} \end{aligned} \quad (4.88)$$

(4.88), (4.87)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_a^b l_{2\nu-1}(y) \bar{z} dx &= \int_a^b \frac{1}{2} [(ipy^{(\nu-1)})^{(\nu)} + (ipy^{(\nu)})^{(\nu-1)}] \bar{z} dx = \int_a^b \left[ipy^{(2\nu-1)} + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) ip'y^{(2\nu-2)} + \frac{1}{2}(\nu-1)^2 \right. \\ &ip''y^{(2\nu-3)} + \dots + \frac{1}{2} ip^{(\nu)} y^{(\nu-1)} \left. \right] \bar{z} dx = \int_a^b ip \bar{z} y^{(2\nu-1)} dx + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \int_a^b ip' \bar{z} y^{(2\nu-2)} dx + \frac{1}{2}(\nu-1)^2 \int_a^b ip'' \bar{z} y^{(2\nu-3)} dx \\ &+ \dots + \frac{1}{2} \int_a^b ip^{(\nu)} \bar{z} y^{(\nu-1)} dx \end{aligned} \quad (4.89)$$

bulunur. Buradaki toplamın her bir terimine ayrı ayrı kısmi integrasyon uygulanmalıdır.

$$I_1 = \int_a^b ip\bar{z}y^{(2v-1)}dx \quad (4.90)$$

alınırsa

$$u = ip\bar{z} \rightarrow du = (ip\bar{z})'dx \quad (4.91)$$

$$dv = y^{(2v-1)}dx \rightarrow v = y^{(2v-2)} \quad (4.92)$$

olarak (4.90)'da kullanılırsa

$$I_1 = \int_a^b ip\bar{z}y^{(2v-1)}dx = ip\bar{z}y^{(2v-2)} \Big|_a^b - \int_a^b (ip\bar{z})'y^{(2v-2)}dx \quad (4.93)$$

olup tekrar kısmi integrasyonla

$$u = (ip\bar{z})' \rightarrow du = (ip\bar{z})''dx \quad (4.94)$$

$$dv = y^{(2v-2)}dx \rightarrow v = y^{(2v-3)} \quad (4.95)$$

(4.93) için yazılırsa

$$I_1 = \int_a^b ip\bar{z}y^{(2v-1)}dx = ip\bar{z}y^{(2v-2)} - (ip\bar{z})'y^{(2v-3)} \Big|_a^b + \int_a^b (ip\bar{z})''y^{(2v-3)}dx \quad (4.96)$$

ve son kez kısmi integrasyonla

$$u = (ip\bar{z})'' \rightarrow du = (ip\bar{z})'''dx \quad (4.97)$$

$$dv = y^{(2v-3)}dx \rightarrow v = y^{(2v-4)} \quad (4.98)$$

(4.96)'da yazılırsa

$$I_1 = \int_a^b ip\bar{z}y^{(2v-1)}dx = ip\bar{z}y^{(2v-2)} - (ip\bar{z})'y^{(2v-3)} + (ip\bar{z})''y^{(2v-4)} \Big|_a^b - \int_a^b (ip\bar{z})'''y^{(2v-4)}dx \quad (4.99)$$

ve genellemeye gidilirse

$$I_1 = \int_a^b ip\bar{z}y^{(2v-1)}dx = ip\bar{z}y^{(2v-2)} - (ip\bar{z})'y^{(2v-3)} + \dots + (-1)^{2v-2}(ip\bar{z})^{(2v-2)}y \Big|_a^b + (-1)^{2v-1} \int_a^b (ip\bar{z})^{(2v-1)} \cdot ydx \quad (4.100)$$

olur.

$$I_2 = \int_a^b ip' \bar{z} y^{(2\nu-2)} dx \quad (4.101)$$

alınırsa

$$u = ip' \bar{z} \rightarrow du = (ip' \bar{z})' dx \quad (4.102)$$

$$dv = y^{(2\nu-2)} dx \rightarrow v = y^{(2\nu-3)} \quad (4.103)$$

olur. (4.102) ve (4.103), (4.101)'de kullanılırsa

$$I_2 = \int_a^b ip' \bar{z} y^{(2\nu-2)} dx = ip' \bar{z} y^{(2\nu-3)} \Big|_a^b - \int_a^b (ip' \bar{z})' y^{(2\nu-3)} dx \quad (4.104)$$

olup tekrar kısmi integrasyonla

$$u = (ip' \bar{z})' \rightarrow du = (ip' \bar{z})'' dx \quad (4.105)$$

$$dv = y^{(2\nu-3)} dx \rightarrow v = y^{(2\nu-4)} \quad (4.106)$$

olur. (4.105) ve (4.106), (4.104)'de kullanılırsa

$$I_2 = \int_a^b ip' \bar{z} y^{(2\nu-2)} dx = ip' \bar{z} y^{(2\nu-3)} - (ip' \bar{z})' y^{(2\nu-4)} \Big|_a^b + \int_a^b (ip' \bar{z})'' y^{(2\nu-4)} dx \quad (4.107)$$

bulunur. Son kez kısmi integrasyonla

$$u = (ip' \bar{z})'' \rightarrow du = (ip' \bar{z})''' dx \quad (4.108)$$

$$dv = y^{(2\nu-4)} dx \rightarrow v = y^{(2\nu-5)} \quad (4.109)$$

olarak (4.108) ve (4.109), (4.107)'de değerlendirilirse

$$I_2 = \int_a^b ip' \bar{z} y^{(2\nu-2)} dx = ip' \bar{z} y^{(2\nu-3)} - (ip' \bar{z})' y^{(2\nu-4)} + (ip' \bar{z})'' y^{(2\nu-5)} \Big|_a^b - \int_a^b (ip' \bar{z})''' y^{(2\nu-5)} dx \quad (4.110)$$

ve genellemeye gidilirse

$$I_2 = \int_a^b ip' \bar{z} y^{(2\nu-2)} dx = ip' \bar{z} y^{(2\nu-3)} - (ip' \bar{z})' y^{(2\nu-4)} + \dots + (-1)^{2\nu-3} (ip' \bar{z})^{(2\nu-3)} y \Big|_a^b + (-1)^{2\nu-2}.$$

$$\int_a^b (ip' \bar{z})^{(2\nu-2)} y dx \quad (4.111)$$

olur.

$$I_3 = \int_a^b ip'' \bar{z} y^{(2\nu-3)} dx \quad (4.112)$$

alınırsa kısmi integrasyona göre

$$u = ip'' \bar{z} \rightarrow du = (ip'' \bar{z})' dx \quad (4.113)$$

$$dv = y^{(2\nu-3)} dx \rightarrow v = y^{(2\nu-4)} \quad (4.114)$$

olur. (4.113) ve (4.114), (4.112) için yazılırsa

$$I_3 = \int_a^b ip'' \bar{z} y^{(2\nu-3)} dx = ip'' \bar{z} y^{(2\nu-4)} \Big|_a^b - \int_a^b (ip'' \bar{z})' y^{(2\nu-4)} dx \quad (4.115)$$

olup tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$u = (ip'' \bar{z})' \rightarrow du = (ip'' \bar{z})'' dx \quad (4.116)$$

$$dv = y^{(2\nu-4)} dx \rightarrow v = y^{(2\nu-5)} \quad (4.117)$$

olarak (4.116) ve (4.117), (4.115)'de kullanılırsa

$$I_3 = \int_a^b ip'' \bar{z} y^{(2\nu-3)} dx = ip'' \bar{z} y^{(2\nu-4)} - (ip'' \bar{z})' y^{(2\nu-5)} \Big|_a^b + \int_a^b (ip'' \bar{z})'' y^{(2\nu-5)} dx \quad (4.118)$$

olup son kez kısmi integrasyonla

$$u = (ip'' \bar{z})'' \rightarrow du = (ip'' \bar{z})''' dx \quad (4.119)$$

$$dv = y^{(2\nu-5)} dx \rightarrow v = y^{(2\nu-6)} \quad (4.120)$$

olarak (4.118)'de yerlerine yazılırsa

$$I_3 = \int_a^b ip'' \bar{z} y^{(2\nu-3)} dx = ip'' \bar{z} y^{(2\nu-4)} - (ip'' \bar{z})' y^{(2\nu-5)} + (ip'' \bar{z})'' y^{(2\nu-6)} \Big|_a^b - \int_a^b (ip'' \bar{z})''' y^{(2\nu-6)} dx \quad (4.121)$$

ve genellemeye gidilirse

$$I_3 = \int_a^b ip'' \bar{z} y^{(2\nu-3)} dx = ip'' \bar{z} y^{(2\nu-4)} - (ip'' \bar{z})' y^{(2\nu-5)} + \dots + (-1)^{2\nu-4} (ip'' \bar{z})^{(2\nu-4)} y]_a^b + (-1)^{(2\nu-3)} \cdot \int_a^b (ip'' \bar{z})^{(2\nu-3)} y dx \quad (4.122)$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$I_k = \int_a^b ip^{(\nu)} \bar{z} y^{(\nu-1)} dx \quad (4.123)$$

alınırsa kısmi integrasyonlarla

$$I_k = \int_a^b ip^{(\nu)} \bar{z} y^{(\nu-1)} dx = ip^{(\nu)} \bar{z} y^{(\nu-2)} - (ip^{(\nu)} \bar{z})' y^{(\nu-3)} + \dots + (-1)^{\nu-2} (ip^{(\nu)} \bar{z})^{(\nu-2)} y]_a^b + (-1)^{\nu-1} \cdot \int_a^b (ip^{(\nu)} \bar{z})^{(\nu-1)} y dx \quad (4.124)$$

bulunur. Böylece (4.100), (4.111), (4.122) ve (4.124) eşitlikleri (4.89)'da yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_a^b l_{2\nu-1}(y) \bar{z} dx &= \int_a^b \frac{1}{2} [(ipy^{(\nu-1)})^{(\nu)} + (ipy^{(\nu)})^{(\nu-1)}] \bar{z} dx = ip \bar{z} y^{(2\nu-2)} - (ip \bar{z})' y^{(2\nu-3)} + \dots + (-1)^{2\nu-2} \cdot \\ &\cdot (ip \bar{z})^{(2\nu-2)} y]_a^b + (-1)^{2\nu-1} \int_a^b (ip \bar{z})^{(2\nu-1)} y dx + \left(\nu - \frac{1}{2} \right) [ip' \bar{z} y^{(2\nu-3)} - (ip' \bar{z})' y^{(2\nu-4)} + \dots + (-1)^{2\nu-3} \cdot \\ &\cdot (ip' \bar{z})^{(2\nu-3)} y]_a^b + \left(\nu - \frac{1}{2} \right) (-1)^{2\nu-2} \int_a^b (ip' \bar{z})^{(2\nu-2)} y dx + \frac{1}{2} (\nu-1)^2 [ip'' \bar{z} y^{(2\nu-4)} - (ip'' \bar{z})' y^{(2\nu-5)} + \dots \\ &+ (-1)^{2\nu-4} (ip'' \bar{z})^{(2\nu-4)} y]_a^b + \frac{1}{2} (\nu-1)^2 (-1)^{2\nu-3} \int_a^b (ip'' \bar{z})^{(2\nu-3)} y dx + \dots + \frac{1}{2} [ip^{(\nu)} \bar{z} y^{(\nu-2)} - (ip^{(\nu)} \bar{z})' y^{(\nu-3)} + \\ &\dots + (-1)^{\nu-2} (ip^{(\nu)} \bar{z})^{(\nu-2)} y]_a^b + \frac{1}{2} (-1)^{\nu-1} \int_a^b (ip^{(\nu)} \bar{z})^{(\nu-1)} y dx \end{aligned} \quad (4.125)$$

bulunur. Buna göre

$$\int_a^b l_{2\nu-1}(y) \bar{z} dx = C(\eta, \zeta) + \int_a^b y l_{2\nu-1}^*(z) dz \quad (4.126)$$

dir. Burada

$$C(\eta, \zeta) = \left\{ ip\bar{z}y^{(2v-2)} - (ip\bar{z})'y^{(2v-3)} + \dots + (-1)^{2v-2}(ip\bar{z})^{(2v-2)}y + \left(v - \frac{1}{2}\right) \left[ip'z y^{(2v-3)} - (ip'z)'y^{(2v-4)} \right. \right. \\ + \dots + (-1)^{2v-3}(ip'z)^{(2v-3)}y \left. \right] + \frac{1}{2}(v-1)^2 \left[ip''z y^{(2v-4)} - (ip''z)'y^{(2v-5)} + \dots + (-1)^{2v-4}(ip''z)^{(2v-4)}y \right] + \dots \\ + \frac{1}{2} \left[ip^{(v)}\bar{z}y^{(v-2)} - (ip^{(v)}\bar{z})'y^{(v-3)} + \dots + (-1)^{v-2}(ip^{(v)}\bar{z})^{(v-2)}y \right] \Bigg\}_a^b$$

ve p reel değerli bir fonksiyon olduğundan

$$l_{2v-1}^*(z) = i(pz)^{(2v-1)} - \left(v - \frac{1}{2}\right) i(p'z)^{(2v-2)} + \frac{1}{2}(v-1)^2 i(p''z)^{(2v-3)} + \dots + \frac{(-1)^v}{2} i(p^{(v)}z)^{(v-1)} \quad (4.127)$$

dir. Ayrıca (4.88)'den analoji yoluyla

$$l_{2v-1}(z) = ipz^{(2v-1)} + \left(v - \frac{1}{2}\right) ip'z^{(2v-2)} + \frac{1}{2}(v-1)^2 ip''z^{(2v-3)} + \dots + \frac{1}{2} ip^{(v)}z^{(v-1)} \quad (4.128)$$

yazılabilir. (4.127) ve (4.128) dikkatli incelenirse

$$l_{2v-1}^*(z) = l_{2v-1}(z) \quad (4.129)$$

olduğu görülür. O halde benzer şekilde

$$l_{2v-1}(y) = l_{2v-1}^*(y) \quad (4.130)$$

yazılabilir ki bu $l_{2v-1}(y)$ 'nin kendine eş olduğunu gösterir.

Sonuç olarak $l_{2v}(y)$ ve $l_{2v-1}(y)$ formundaki toplam ifadeler kendine eş diferansiyel ifadelerdir.

Diğer taraftan

$$l(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y \quad (4.131)$$

kendine eş bir diferansiyel ifade olsun; $l(y)$ 'nin $l_{2v}(y)$ ve $l_{2v-1}(y)$ 'nin toplam formunda ifade edilebileceği kanıtlanmalıdır.

(4.23)'den $l(y)$ 'nin eşlenik ifadesi

$$l^*(y) = (-1)^n (\overline{p_0 y})^{(n)} + (-1)^{n-1} (\overline{p_1 y})^{(n-1)} + \dots + \overline{p_n y} \quad (4.132)$$

ve daha açık yazılırsa

$$l^*(y) = (-1)^n \overline{p_0} y^{(n)} + \left[(-1)^n \cdot n \overline{p_0}' + (-1)^{n-1} \overline{p_1} \right] y^{n-1} + \dots \quad (4.133)$$

dır. (4.131) ve (4.133) karşılaştırılırsa

$$p_0 = (-1)^n \overline{p_0} \quad (4.134)$$

olur.

Eğer n çift sayı ($n = 2\mu$) ise (4.134)'e göre $p_0 = \overline{p_0}$ dir. Yani p_0 reel değerli bir fonksiyondur. Eğer $l(y)$ 'den kendine eş

$$l_{2\mu}(y) = (p_0 y^{(\mu)})^{(\mu)} = p_0 y^{(n)} + \mu p_0' y^{(n-1)} + \dots + p_0 \left(\frac{n}{2}\right) y^{\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (4.135)$$

ifadesini çıkarırsak $(n-1)$. mertebeden kendine eş $l(y) - l_{2\mu}(y)$ ifadesini elde ederiz.

Eğer n tek sayı ($n = 2\mu - 1$) ise $p_0 = -\overline{p_0}$ dir ve bu nedenle p reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $p_0 = ip$ yapısındadır. $l(y)$ 'den kendine eş

$$\begin{aligned} l_{2\mu-1}(y) &= \frac{1}{2} \left[(ipy^{(\mu-1)})^{(\mu)} + (ipy^{(\mu)})^{(\mu-1)} \right] = p_0 y^{(n)} + \frac{2\mu-1}{2} p_0' y^{(n-1)} + \frac{1}{2} (\mu-1)^2 p_0'' y^{(n-2)} + \dots \\ &+ \frac{1}{2} p_0 \left(\frac{n+1}{2}\right) y^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.136)$$

ifadesini çıkarırsak $(n-1)$. mertebeden kendine eş $l(y) - l_{2\mu-1}(y)$ diferansiyel ifadesini elde ederiz.

Buradan elde edilecek sonuç $l(y)$ 'den kendine eş $l_{2\mu}(y)$ ve $l_{2\mu-1}(y)$ ifadeleri uygun sırayla ard arda çıkarılırsa sonunda 0. mertebeden kendine eş bir ifade elde edilir. Bu, $l_0(y) = p_n y$ olmasını gerektirir. p_n reel değerli bir fonksiyon olmalıdır. Böylece teorem kanıtlanmış olur.

Eğer özel olarak $l(y)$ reel katsayılı kendine eş bir ifade ise $l_{2\mu-1}(y)$ formunda olamaz. Bu yüzden reel katsayılardan oluşmuş herhangi kendine eş diferansiyel ifadenin çift mertebeden

$$l(y) = (p_0 y^{(\mu)})^{(\mu)} + (p_1 y^{(\mu-1)})^{(\mu-1)} + \dots + (p_{\mu-1} y')' + p_\mu y \quad (4.137)$$

formunda olması gerekir. Buradaki $p_0, p_1, \dots, p_\mu$ reel değerli fonksiyonlardır.

4.2.4 Eşlenik Sınır Koşulları, Eşlenik Operatör

$U_1, U_2, \dots, U_m; y_a, y'_a, \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \dots, y_b^{(n-1)}$ değişkenlerini içeren lineer bağımsız formlar olsun; eğer $m < 2n$ ise $2n$ lik lineer bağımsız bir $U_1, U_2, \dots, U_{2n}$ sistemi elde etmek için $U_{m+1}, U_{m+2}, \dots, U_{2n}$ formlarını ilave etmek gerekir. Bu formlar lineer bağımsız olduklarından $y_a, y'_a, \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \dots, y_b^{(n-1)}$ değişkenleri $U_1, U_2, \dots, U_{2n}$ formlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Bu ifadeler (4.25)'deki bilineer $P(\eta, \zeta)$ formunda kullanılır. O nedenle $P(\eta, \zeta); U_1, U_2, \dots, U_{2n}$ değişkenlerinin ve $z_a, z'_a, \dots, z_a^{(n-1)}, z_b, z'_b, \dots, z_b^{(n-1)}$ değişkenlerini içeren $2n$ tane $V_{2n}, V_{2n-1}, \dots, V_1$ lineer homogen formdaki katsayıların bir lineer homogen formudur. Lagrange'ın formülü bu durumda

$$\int_a^b l(y) \bar{z} dx = U_1 V_{2n} + U_2 V_{2n-1} + \dots + U_{2n} V_1 + \int_a^b y \bar{l}^*(z) dx \quad (4.138)$$

halini alır. $V_1, V_2, \dots, V_{2n}$ formları lineer bağımsızdırlar (Akhiezer ve Glazman, 1993).

Bu iddiayı kanıtlamak için, kısmi integrasyonlarla elde edilen terimlerin $x = a$ ve $x = b$ uç noktalarındaki değerlerinin farkından oluşan $P(\eta, \zeta)$ formunu yeniden yazarsak

$$P(\eta, \zeta) = P_b(\eta, \zeta) - P_a(\eta, \zeta) \quad (4.139)$$

ve $P_a(\eta, \zeta)$ ve $P_b(\eta, \zeta); y, y', \dots, y^{(n-1)}, z, z', \dots, z^{(n-1)}$ fonksiyonlarının sırasıyla $x = a$ ve $x = b$ noktalarındaki değerlerini içerir. Bunun sonucu $P(\eta, \zeta)$ matris formunda

$$\begin{bmatrix} -\Delta_a & 0 \\ 0 & \Delta_b \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

şeklinde yazılır. Burada Δ_a ve Δ_b sırasıyla $P_a(\eta, \zeta)$ ve $P_b(\eta, \zeta)$ matrislerini, 0 ise 0(sıfır) matrisini göstermektedir. (4.20)'den Δ_a ve Δ_b matrislerinin her biri

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \dots & (-1)^{n-1} p_0 \\ \cdot & \cdot & \dots & (-1)^{n-2} p_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & -p_0 & \dots & 0 & 0 \\ p_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

yapısındadır. Buradaki p_0 , $x=a$ ve $x=b$ de Δ_a ve Δ_b için değerlendirilir. Matrisin köşegenindeki elemanlar karışıklık olmaması için yazılmamıştır. Matrislerin ikisinin de determinantı 0 değildir ve buna göre (4.140) ile verilen $P(\eta, \zeta)$ matris formunun determinantı da 0 değildir (Ince, 1956).

$y_a, y'_a, \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \dots, y_b^{(n-1)}$ değişkenlerinden $U_1, U_2, \dots, U_{2n}$ değişkenlerine geçiş determinantı 0 olmayan bir lineer dönüşümdür. Bu yüzden $U_1, \dots, U_{2n}$ ve $z_a, z'_a, \dots, z_a^{(n-1)}, z_b, z'_b, \dots, z_b^{(n-1)}$ değişkenlerinden oluşan P matrisinin determinantı da 0 değildir. Ancak bu matris de $V_{2n}, V_{2n-1}, \dots, V_1$ formlarının katsayılar matrisidir. Bu formlar üstelik lineer bağımsızdır.

$$V_1 = 0, V_2 = 0, \dots, V_{2n-m} = 0 \quad (4.142)$$

sınır koşulları

$$U_1 = 0, U_2 = 0, \dots, U_m = 0 \quad (4.143)$$

esas sınır koşullarının eşleniğidirler. Sınır koşulları eşlenik sınır koşullarının aynı ise kendine eştir.

L , $l(y)$ ifadesiyle ve (4.143) sınır koşullarıyla genellenen operatör olsun. $l^*(y)$ ve (4.142) sınır koşullarıyla genellenen operatör L^* ile gösterilecek olup L 'nin eşlenik operatörü olarak adlandırılır.

(4.138) formülünden ve (4.142)-(4.143) sınır koşullarından

$$\int_a^b Ly \bar{z} dx = \int_a^b y \overline{L^*(z)} dx \quad (4.144)$$

eşitliği L 'nin tanım bölgesindeki tüm y ler ve L^* 'in tanım bölgesindeki tüm z ler için L ve L^* operatörlerini içerir. Eğer kısaltılmış notasyonla ifade edersek

$$(y, z) = \int_a^b y(x) \overline{z(x)} dx \quad (4.145)$$

olarak (4.144) formülü

$$(Ly, z) = (y, L^* z) \quad (4.146)$$

halini alır. Eşlenik operatörün tanımından L operatörü L^* operatörünün eşleniği yani

$$L^{**} = L \quad (4.147)$$

dir. Eğer

$$L^* = L \quad (4.148)$$

ise operatöre kendine eş denir.

L^* tanımına göre şu da söylenebilir: Bir L operatörünün kendine eş olması için gerek ve yeter şart kendine eş bir diferansiyel ifade ve sınır koşullarıyla genelleştirilmesidir.

Kendine eş bir L operatörü için (4.146) formülü

$$(Ly, z) = (y, Lz) \quad (4.149)$$

olur.

4.2.5 Eşlenik Sınır-Değer Problemi

Eğer L^* , L 'nin eşlenik operatörü ise

$$L^*(z) = 0 \quad (4.150)$$

homogen sınır-değer problemine

$$Ly = 0 \quad (4.151)$$

homogen sınır-değer probleminin eşleniği denir (Akhiezer ve Glazman, 1993).

Daha ayrıntılı olarak (4.150) sınır-değer problemi

$$l^*(z) = 0 \quad (4.152)$$

$$V_\nu(z) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, 2n - m) \quad (4.153)$$

şeklinde yazılabilir. $l^*(z)$, $l(y)$ diferansiyel ifadesinin eşleniğidir ve (4.153) eşitliği L 'nin eşleniğinin sınır koşullarıdır.

Şimdi eşlenik sınır-değer problemlerinin rankları arasında bir bağıntı elde etmek incelenecektir.

$z_1, z_2, \dots, z_n$; $l^*(z) = 0$ eşitliğinin lineer bağımsız çözümleri ve r' ;

$$\begin{bmatrix} V_1(z_1) & \dots & \dots & V_1(z_n) \\ V_2(z_1) & \dots & \dots & V_2(z_n) \\ \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ V_{2n-m}(z_1) & \dots & \dots & V_{2n-m}(z_n) \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

matrisinin rankı olsun. Bu takdirde (4.152)-(4.153) eşlenik sınır-değer probleminin $(n - r')$ tane lineer bağımsız çözümü vardır.

Diğer taraftan, y , (4.151) sınır-değer probleminin keyfi bir çözümü ise (4.138) Lagrange formülünün sol tarafı $z = z_v$ için 0 olur. Ayrıca $U_1(y) = \dots = U_m(y) = 0$ dır. Bu durumda Lagrange'ın formülü sadeleşerek

$$U_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_v) + \dots + U_{2n}(y)V_1(z_v) = 0 \quad (4.155)$$

halini alır. $v = 1, 2, \dots, n$ konularak $U_{m+1}(y), \dots, U_{2n}(y)$ denklem sistemi formu

$$\left. \begin{aligned} U_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_1) + \dots + U_{2n}(y)V_1(z_1) &= 0 \\ U_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_2) + \dots + U_{2n}(y)V_1(z_2) &= 0 \\ \dots & \\ \dots & \\ U_{m+1}(y)V_{2n-m}(z_n) + \dots + U_{2n}(y)V_1(z_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.156)$$

elde edilir. Eğer (4.151) sınır-değer probleminin rankı r ve lineer bağımsız bir çözümler sistemi $y_1, y_2, \dots, y_{n-r}$ ise (4.156) sistemi Coddington ve Levinson'a (1955) göre

$$U_{m+1}(y_j), \dots, U_{2n}(y_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n - r)$$

şeklinde en az $(n - r)$ tane lineer bağımsız çözüme sahiptir. Bu nedenle (4.156) sisteminin matrisinin rankı $2n - m - (n - r) = n - m + r$ 'den çok olamaz. (4.156) sisteminin matrisi satır ve sütun düzeniyle (4.154) matrisiyle uyumlu olduğundan

$$r' \leq n - m + r \quad (4.157)$$

dir. İki sınır-değer probleminin karşılıklı eşlenik olduğunu hatırlarsak onları birbirlerinin yerine koyabiliriz. Böyle bir değişiklikte r ve r' yer değiştirir ve m yerine $(2n - m)$ gelir; o nedenle $r \leq n - (2n - m) + r'$ ya da bir başka deyişle

$$r \leq m - n + r' \quad (4.158)$$

olur. (4.157) ve (4.158) karşılaştırılırsa

$$r' = n - m + r \quad (4.159)$$

olduğu ortadadır.

Bu anlatılanlardan şu sonuçlar elde edilir:

Sonuç 4.2.8 Bir sınır-değer probleminin r rankı eşlenik sınır-değer probleminin r' rankıyla

$$r' = n - m + r$$

bağıntısıyla ilişkilidir. $m = n$ durumunda (4.159) formülünden $r' = r$ olur. Bu demektir ki eğer bağımsız sınır koşulları sayısı diferansiyel ifadenin mertebesine eşitse o takdirde sınır-değer probleminin rankı eşlenik sınır-değer probleminin rankına eşittir.

Sonuç 4.2.9 Eğer sınır koşullarının sayısı diferansiyel ifadenin mertebesine eşitse ve eğer homogen sınır-değer problemi sadece aşikâr çözüme sahipse o zaman eşlenik sınır-değer problemi de sadece aşikâr çözüme sahiptir.

Burada sınır koşulları aralığın uç noktaları için ele alınsa da matematiksel fizikte ve uygulamalarda bunun yanında bir $[a, b]$ aralığının n keyfi noktasında inceleme yapılmaktadır.

5. BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN ÖZDEĞERLERİ ve ÖZFONKSİYONLARI

5.1 Özdeğerlerin ve Özfonksiyonların Tanımı

Eğer bir L operatörünün tanım bölgesinde özdeş olarak sıfır olmayan

$$Ly = \lambda y \quad (5.1)$$

eşitliğini sağlayan bir y fonksiyonu varsa bu eşitlikteki λ sayısına L operatörünün bir özdeğeri denir. y fonksiyonuna ise L operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu denir.

L operatörü $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve

$$U_1(y) = 0, U_2(y) = 0, \dots, U_m(y) = 0 \quad (5.2)$$

sınır koşullarıyla genelleştirilebilir. Bir y özfonksiyonu L operatörünün tanım bölgesine ait olmak zorunda olduğundan (5.2) koşullarını sağlamak zorundadır. Üstelik $Ly = l(y)$ demek olduğundan buradan (5.1) eşitliği

$$l(y) = \lambda y \quad (5.3)$$

olur. Özetle bir L operatörünün özdeğerleri aşikâr olmayan çözümleri olan

$$l(y) = \lambda y, \quad U_v(y) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, m) \quad (5.4)$$

homogen sınır-değer probleminin λ parametre değerleri olup aşikâr olmayan çözümlerin her biri λ 'ya ait bir özfonksiyondur (Naimark, 1968).

Aynı λ özdeğerine ait özfonksiyonların bir lineer kombinasyonu da λ 'ya ait bir özfonksiyondur. Örneğin; eğer $Ly_1 = \lambda y_1$ ve $Ly_2 = \lambda y_2$ ise o zaman herhangi c_1 ve c_2 sabitleri için $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \lambda(c_1 y_1 + c_2 y_2)$ dir.

Verilen bir λ için (5.3)'teki bir homogen eşitliğin n 'den fazla lineer bağımsız çözümü olamayacağından aynı özdeğere ait bütün özfonksiyonların lineer manifoldu sonlu boyutlu bir uzaydır ve boyutu $\leq n$ dir. Bu uzayın boyutu basit olarak verilen λ özdeğeri için (5.4) sınır-değer probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır; bu sayı özdeğerin katlılığı olarak tanımlanır (Sagan, 1989).

Özdeğerlerin bulunması için koşullar belirlenmesi gerekmektedir.

$$y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda); \quad (5.5)$$

(5.3) diferansiyel denkleminin

$$y_j^{(v-1)}(a, \lambda) = \begin{cases} 0, & j \neq v \\ 1, & j = v \end{cases} \quad (j, v = 1, 2, \dots, n) \quad (5.6)$$

başlangıç koşullarıyla belirlenen bir temel çözüm sistemi olsun. Yani

$$\begin{aligned}
y_1(a, \lambda) &= 1, & y_1'(a, \lambda) &= 0, & y_1''(a, \lambda) &= 0, \dots, y_1^{(n-1)}(a, \lambda) &= 0 \\
y_2(a, \lambda) &= 0, & y_2'(a, \lambda) &= 1, & y_2''(a, \lambda) &= 0, \dots, y_2^{(n-1)}(a, \lambda) &= 0 \\
y_3(a, \lambda) &= 0, & y_3'(a, \lambda) &= 0, & y_3''(a, \lambda) &= 1, \dots, y_3^{(n-1)}(a, \lambda) &= 0 \\
&\dots & & & & & \\
&\dots & & & & & \\
y_n(a, \lambda) &= 0, & y_n'(a, \lambda) &= 0, & y_n''(a, \lambda) &= 0, \dots, y_n^{(n-1)}(a, \lambda) &= 1
\end{aligned}$$

olur. Lineer diferansiyel denklemlerin çözüm teoremlerinden bilindiği gibi $[a, b]$ aralığındaki her bir sabit x değeri için (5.5) fonksiyonları λ parametresinin tam fonksiyonlarıdır (Ince, 1956). Yani düzlemin her noktasında sonlu türevi olan fonksiyonlardır.

Homogen sınır-değer probleminin matris formu hatırlanırsa (5.4) sınır-değer probleminin aşikâr olmayan bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart (4.10) matrisinin r rankının n 'den az olmasıdır ve eğer $m < n$ ise o zaman $r < n$ demektir ve bu durumda (5.4) sınır-değer problemi herhangi λ değeri için aşikâr olmayan bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla eğer $m < n$ ise herhangi λ değeri bir özdeğerdir. Eğer $m \geq n$ ise (4.10) matrisinin rankının n 'den küçük olması için gerek ve yeter şart matrisin n . mertebeden bütün minörlerinin 0 olmasıdır. Ama bu minörlerin her biri λ 'nın tam fonksiyonlarıdır. Burada mümkün olabilecek alternatifler şöyledir:

1-) (4.10) matrisinin n . mertebeden bütün minörleri 0 olarak bulunmuşsa bu nedenle yukarıda açıklanan sonuçtan dolayı herhangi λ değeri bir özdeğerdir.

2-) (4.10) matrisinin n . mertebeden en az 1 tane minörü 0 değilse bu durumda yalnız 0 olan minörler için özdeğerler olabilir. Daha özel olarak n . mertebeden minörlerin biri hariç diğerleri 0 değilse sadece 0 olan minör için bir özdeğer bulunabilir.

Özdeş olarak sıfır olmayan bir tam fonksiyon en fazla sayılabilir sayıda sıfırdır. Bu sıfırların

limit noktası sonlu olamaz. Buradan yukarıdaki 2. duruma göre L operatörünün en fazla sayılabilir sayıda özdeğeri vardır ve bu özdeğerlerin sonlu limit noktası yoktur.

Böylece aşağıdaki sonuçlar söz konusudur:

Sonuç 5.1.1 Herhangi L diferansiyel operatörü için sadece iki mümkün durum vardır:

- a) Her λ sayısı L için bir özdeğerdir.
- b) Operatör en fazla sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir. Yani ya özdeğeri yoktur, ya sonlu tane vardır veya sonsuz tanedir. Sonsuz tane halinde numaralanabilir (sayılabilir) ve limit noktası sonlu değildir yani sonsuzdur.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $m = n$ durumu incelenecektir. Buna göre

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} U_1(y_1) & \dots & \dots & U_1(y_n) \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ U_n(y_1) & \dots & \dots & U_n(y_n) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

dır. Önceki açıklamalara göre $\Delta(\lambda)$, λ 'nın bir tam fonksiyonudur ve bu nedenle L operatörünün veya $Ly = 0$ sınır-değer probleminin karakteristik determinantı olarak adlandırılır (Naimark, 1968).

Sonuç 5.1.2 L operatörünün özdeğerleri $\Delta(\lambda) \equiv 0$ olması halinde vardır. Eğer $\Delta(\lambda) \equiv 0$ ise o takdirde herhangi λ sayısı L operatörünün bir özdeğeridir. Buna karşın, $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$ ise L operatörü en fazla sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir ve bu özdeğerlerin limit noktası sonlu değildir. Özel olarak $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu hiçbir şekilde sıfır değilse o zaman L operatörünün özdeğerleri yoktur.

Sonuç 5.1.3 Bir λ özdeğeri $\Delta(\lambda)$ 'nın katlı sıfırı olabilir.

Teorem 5.1.4 Eğer λ_0 , $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının ν katlı bir sıfırıysa o takdirde λ_0 özdeğerinin katlılığı $\leq \nu$ dir.

İspat: $\Delta(\lambda_0)$ determinantına ait matrisin rankı r olsun; o zaman λ_0 özdeğerinin katlılığı $(n-r)$ 'ye eşittir. Öte yandan, determinantların iyi bilinen bir kuralı gereğince $\lambda = \lambda_0$ için $\Delta(\lambda)$ determinantının $(n-r-1)$. mertebe dahil bütün alt determinantları sıfırdır. λ_0 , ν katlı bir sıfır olduğundan $n-r-1 \leq \nu-1$ ve buradan $n-r \leq \nu$ dür. Eğer özel olarak $\nu = 1$ alınırsa

o zaman $n-r \leq 1$ ve öte yandan $\Delta(\lambda_0) = 0$ için $n-r \geq 1$ dir. Buradan $n-r = 1$ bulunur ve aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 5.1.5 Eğer λ_0 , $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının tek katlı bir sıfırıysa o zaman L operatörünün λ_0 özdeğerinin katlılığı da tektir.

5.2 Eşlenik Operatörlerin Özdeğerleri ve Özfonksiyonları Arasındaki İlişki*

Teorem 5.2.1 Eğer λ , L operatörünün p katlı bir özdeğeri ise o takdirde $\bar{\lambda}$, L^* eşlenik operatörünün aynı p katlı bir özdeğeridir.

İspat: L operatörü $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve $U_v(y) = 0$ ($v = 1, 2, \dots, n$) sınır koşullarıyla genelleştirilirken L^* operatörü $l^*(y)$ diferansiyel ifadesi ve $V_v(y) = 0$ ($v = 1, 2, \dots, n$) sınır koşullarıyla genelleştirilebilir.

$$l_1(y) = l(y) - \lambda y \quad (5.8)$$

yazarsak o zaman

$$l_1^*(y) = l^*(y) - \bar{\lambda} y \quad (5.9)$$

yazılır. Eğer λ , L operatörünün p katlı bir özdeğeri ise o takdirde

$$l_1(y) = 0, \quad U_v(y) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (5.10)$$

sınır-değer probleminin p tane lineer bağımsız çözümü vardır. Bir önceki bölümdeki Sonuç 4.2.8 gereğince

$$l_1^*(y) = 0, \quad V_v(y) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (5.11)$$

eşlenik sınır-değer probleminin de p tane lineer bağımsız çözümü vardır. Bu demektir ki $\bar{\lambda}$, L^* eşlenik operatörünün p katlı özdeğeridir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.2 L ve L^* operatörlerinin sırasıyla λ ve μ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları eğer $\lambda \neq \bar{\mu}$ ise ortogonaldır.

* Sadece $m=n$ durumu incelenmektedir.

İspat: y , L operatörünün λ özdeğerine karşı gelen bir özfonksiyonu; z , L^* operatörünün μ özdeğerine karşı gelen bir özfonksiyonu olsun. Böylece

$$Ly = \lambda y \quad (5.12)$$

ve

$$L^* z = \mu z \quad (5.13)$$

yazılabilir. Buradan

$$(Ly, z) = (\lambda y, z) = \lambda(y, z) \quad (5.14)$$

ve

$$(y, L^* z) = (y, \mu z) = \overline{\mu}(y, z) \quad (5.15)$$

dir. (4.146) dikkate alınırsa (5.14)'den (5.15) eşitliği çıkarılırsa

$$(\lambda - \overline{\mu})(y, z) = 0 \quad (5.16)$$

elde edilir. Eğer $\lambda \neq \overline{\mu}$ ise bu demektir ki $(y, z) = 0^*$ dır. Bir başka deyişle y ve z fonksiyonları ortogonaldır. Bunlar özfonksiyonlar olarak ele alındığından y ve z özfonksiyonlarının ortogonallığı ispatlanmış olur (Naimark, 1968).

5.3 Kendine Eş Bir Operatörün Özdeğerleri ve Özfonksiyonları

Teorem 5.3.1 Kendine eş bir operatörün bütün özdeğerleri reeldir.

İspat: Kendine eş bir operatör için

$$(Ly, z) = (y, Lz) \quad (5.17)$$

olup özel olarak

$$(Ly, y) = (y, Ly) \quad (5.18)$$

dir. Ayrıca

$$^*(y, z) = \int_a^b y(x) \overline{z(x)} dx$$

$$(y, Ly) = \overline{(Ly, y)} \quad (5.19)$$

olduğundan

$$(Ly, y) = \overline{(Ly, y)} \quad (5.20)$$

gereğince (Ly, y) reeldir.

λ , L operatörünün bir özdeğeri ve y , λ 'ya ait bir özfonksiyon olsun. $Ly = \lambda y$ eşitliğine göre

$$(Ly, y) = \lambda(y, y) \quad (5.21)$$

olur. $(y, y) > 0$ ve (Ly, y) reel olduğundan

$$\lambda = \frac{(Ly, y)}{(y, y)} \quad (5.22)$$

reel olmak zorundadır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.2 ve Teorem 5.3.1'in doğal bir sonucu olarak kendine eş bir operatörün farklı özdeğerlerine ait özfonksiyonları ortogonaldır. Aynı özdeğere ait özfonksiyonlar da ortogonal seçilebilir. Bunu yapmak için aynı özdeğere ait özfonksiyonların alt uzayında bir ortogonal baz seçilmelidir. Dolayısıyla kendine eş L operatörünün özfonksiyonları ortogonal alınabilir.

5.4 Özdeğer Problemlerine Örnekler

$$\textbf{Örnek 5.4.1} \quad -y'' = \lambda y; \quad y(0) = y(1); \quad y'(0) = y'(1) \quad (5.23)$$

diferansiyel denkleminin genel çözümü karakteristik denklemden hareketle

$$-r^2 - \lambda = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \mp \sqrt{\lambda} i \quad (5.24)$$

olacağından

$$y = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x \quad (5.25)$$

dir. Sınır koşullarını kullanırsak

$$y(0) = y(1) \Rightarrow A = A \cos \sqrt{\lambda} + B \sin \sqrt{\lambda} \quad (5.26)$$

ve diğer koşul değerlendirilirse

$$y'(0) = y'(l) \Rightarrow B\sqrt{\lambda} = -A\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} + B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \quad (5.27)$$

olur. (5.26) ve (5.27) denklem sistemi λ için çözülürse özdeğerler

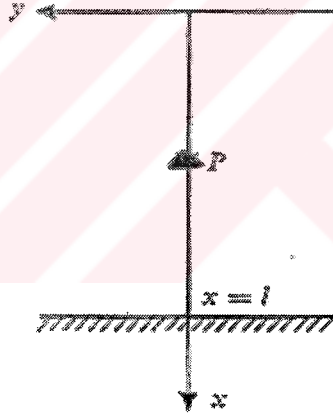
$$\lambda_n = (2n\pi)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.28)$$

olarak bulunur.

$n \neq 0$ için λ_0 özdeğerine karşılık gelen iki lineer bağımsız $\cos(2n\pi x)$ ve $(\sin 2n\pi x)$ özfonksiyonu vardır ve buradan hareketle $n \neq 0$ için λ_n çift katlı bir özdeğerdir.

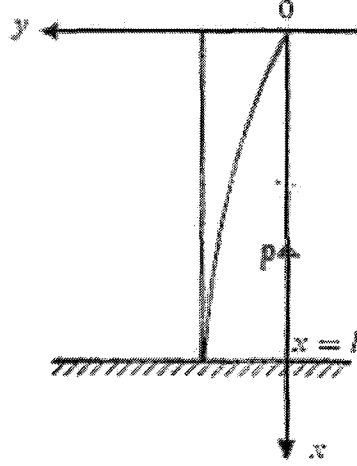
$n = 0$ için λ_0 özdeğerine karşılık sadece bir $y = 1$ (sabit sayı) özfonksiyonu vardır; bu nedenle λ_0 tek katlı bir özdeğerdir (Sagan, 1989).

Örnek 5.4.2 Bir ucundan sabitlenmiş diğer ucu serbest bükülen bir çubuk için bir problem oluşturalım.



Şekil 5.1 Bir ucundan sabitlenmiş diğer ucu serbest bükülen çubuk

Şekil 5.1'de $x = 0$ ucundan sıkıca sabitlenmiş ve diğer ucu $x = l$ 'de serbest bir çubuk gösterilmiştir. Serbest uca bir P dış kuvveti uygulanırsa çubuk boyunca etki eder. P 'nin yeterince küçük değerleri için çubuğun şeklinin bozulmadan kalacağı bilinen bir gerçektir ancak öyle kritik bir P_0 kuvveti vardır ki $P > P_0$ olduğunda çubuk düzgünlüğünü kaybeder ve bükülür.



Şekil 5.2 Denge durumundan diferansiyel sapsmış çubuk

Şekil 5.2’de görüldüğü gibi denge durumundan diferansiyel sapsmalar ele alınacaktır. Çubuğun bükülme eksenini $y = y(x)$ olduğundan

$$Py = -EIy'' \quad (5.29)$$

dür. Burada I çubuk kesitinin eylemsizlik momenti ve E esneklik modülüdür. Eşitliğin sağ yanı uygulanan kuvvete göre bükülme momentini ve sol yanı çubuktaki bükülmenin orijinden uzaklığını ifade etmektedir.

Durumu basitleştirmek için homogen sabit kesitli bir çubukla kendimizi sınırlarsak bu takdirde EI sertliği sabit alınır.

$$\lambda = \frac{P}{EI} \quad (5.30)$$

dönüşümüyle

$$-y'' = \lambda y \quad (5.31)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Şekil 5.2’den açıktır ki $y(x)$ fonksiyonu

$$y(0) = 0, \quad y'(l) = 0 \quad (5.32)$$

koşullarını sağlar. Böylece (5.31) ve (5.32) eşitlikleri vasıtasıyla özdeğer problemi formüle edilir.

(5.31) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x \quad (5.33)$$

şeklinde olup (5.32) sınır koşulları kullanılırsa

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y = B \sin \sqrt{\lambda} x \quad (5.34)$$

ve diğer koşuldan

$$y'(l) = 0 \Rightarrow B \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \cos \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{2n-1}{2l} \pi$$

olduğundan

$$\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2l} \pi\right)^2 \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (5.35)$$

bulunur. Bu özdeğerlere karşılık özfonksiyonlar

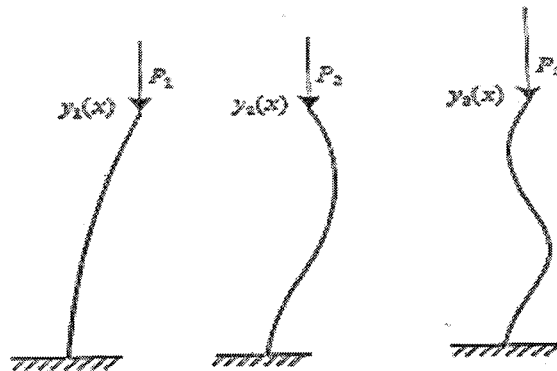
$$y_n(x) = B \sin \frac{2n-1}{2l} \pi x \quad (5.36)$$

dir. Özdeğerlere karşılık kritik P kuvveti

$$P_n = EI \left(\frac{2n-1}{2l} \pi\right)^2 \quad (5.37)$$

olur.

Değişken kesitli veya homogen olmayan bir çubuk için ise denge biçimleri aşağıda Şekil 5.3'de verilmiştir.



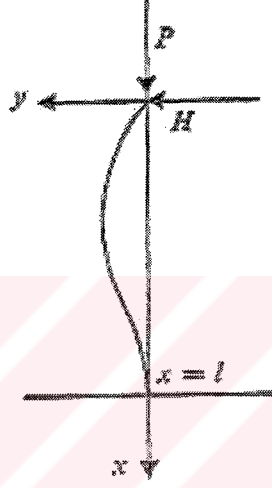
Şekil 5.3 Değişken kesitli çubuktaki diferansiyel sapmalar

Bu halde EI , x 'in bir fonksiyonudur. $\frac{1}{EI} = \rho(x)$ yazılırsa

$$-y'' = P\rho(x)y, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0 \quad (5.38)$$

özdeğer problemi elde edilir. Genel olarak keyfi bir $\rho(x)$ fonksiyonu için özdeğerleri ve özfonksiyonları hesaplamak sadece yaklaşık metotlarla mümkündür.

Örnek 5.4.3 Bir ucu sabitlenmiş ve diğer ucu destekli bükülebilir bir çubuğu ele alalım.



Şekil 5.4 Bir ucu sabitlenmiş ve diğer ucu destekli bükülebilir çubuk kesiti

Bu halde $x = 0$ ucunda yatay bir H tepkisi vardır. Bu nedenle bükülme momenti

$$M = Py - Hx = -EIy'' \quad (5.39)$$

dür. Bu eşitliğin iki kez türevi alınırsa

$$(EIy'')'' = -Py'' \quad (5.40)$$

elde edilir. y fonksiyonunu bulmamızı sağlayacak

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(l) = 0 \quad (5.41)$$

sınır koşullarıdır. Bu koşullardan birinci ve üçüncüsü apaçıktır; ikinci koşul $x = 0$ 'da çubuk desteklendiğinden bükülme momentinin olmadığını ifade eder; dördüncüsü ise $x = l$ ucunun sabitlendiğini ve bu nedenle teğetin x eksenine paralel olduğunu içermektedir. Böylelikle (5.40)-(5.41) özdeğer problemi söz konusudur. EI sabit kabul edilirse

$$\frac{P}{EI} = k^2 \quad (5.42)$$

yazılabilir ve de basitlik açısından $l = 1$ alınırsa (5.40) denklemi

$$y''' = -k^2 y'' \quad (5.43)$$

şeklinde yazılabilir. $k \neq 0$ için genel çözüme karakteristik denklemden ulaşılabileceğinden

$$r^4 + r^2 k^2 = 0 \Rightarrow r^2 (r^2 + k^2) = 0$$

dan

$$r_{1,2} = 0, \quad r_{3,4} = \pm ki \quad (5.44)$$

vasıtasıyla

$$y = A + Bx + C \cos kx + D \sin kx \quad (5.45)$$

bulunur. (5.41)'den sınır koşulları değerlendirilirse

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + C = 0 \quad (5.46)$$

$$y''(0) = 0 \Rightarrow -Ck^2 = 0 \Rightarrow C = 0 \quad (5.47)$$

ve (5.47), (5.46)'da yerine yazılırsa

$$A = 0 \quad (5.48)$$

bulunur. Buradan genel çözüm

$$y = Bx + D \sin kx \quad (5.49)$$

yapısındadır. Yine sınır koşullarından

$$y(1) = 0 \Rightarrow B + D \sin k = 0 \Rightarrow \sin k = -\frac{B}{D} \quad (5.50)$$

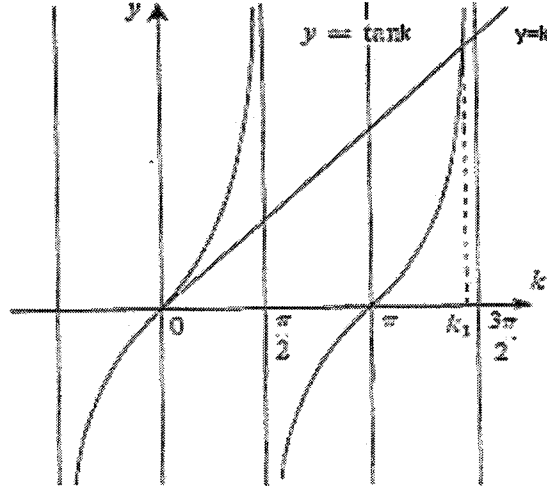
ve

$$y'(1) = 0 \Rightarrow B + Dk \cos k = 0 \Rightarrow \cos k = -\frac{B}{Dk} \quad (5.51)$$

olur. (5.50) ile (5.51) taraf tarafa oranlanırsa

$$\tan k = k \quad (5.52)$$

eşitliğinden bulunacak kökler özdeğerler olur. Bunlar ise Şekil 5.5'deki $y = \tan k$ ve $y = k$ grafiklerinin kesim noktalarının apsisleridir.



Şekil 5.5 $y = \tan k$ ve $y = k$ grafikleri

Özdeğerler böylece kolaylıkla bulunur ve buna bağlı özfonksiyonlar

$$B = -D \sin k = -Dk \cos k \quad (5.53)$$

için

$$D = 1 \Rightarrow B = -\sin k \quad (5.54)$$

dan yararlanarak

$$y = \sin kx - x \sin k \quad (5.55)$$

olur.

$k = 0$ için diferansiyel denklemin genel çözümü karakteristik denklem $r^4 = 0$ olduğu için

$$r_{1,2,3,4} = 0 \quad (5.56)$$

kökleri yardımıyla

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \quad (5.57)$$

yapısındadır. Sınır koşulları dikkate alınırsa bu denklem ancak

$$A = B = C = D = 0 \quad (5.58)$$

olduğunda sağlanır. $k = 0$ olmasının sonucu olarak problemin bir özdeğeri yoktur.

Örnek 5.4.4 4. mertebeden

$$y'''' = -k^2 y''; \quad y''(0) = y'''(0) = y(1) = y'(1) = 0 \quad (5.59)$$

diferansiyel denkleminin $k = 0$ için (5.57) ile verilen genel çözümü sınır koşullarını sadece $A = B = C = D = 0$ ise sağlar. Eğer $k \neq 0$ ise diferansiyel denklemin (5.45) ile verilen genel çözümü sınır koşullarını yine sadece $A = B = C = D = 0$ ise sağlar. Bunların sonucu bu problemin özdeğeri yoktur (Sagan, 1989).

Örnek 5.4.5 4. mertebeden

$$y'''' = -k^2 y''; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = 0 \quad (5.60)$$

diferansiyel denkleminde $k = 0$ için özdeğer yoktur. Eğer $k \neq 0$ ise (5.45) genel çözümünü ve sınır koşullarını kullanarak

$$\sin k = k \quad (5.61)$$

elde edilir. Bu denklemin sıfırdan başka reel kökleri yoktur. Bu nedenle problemin sadece reel olmayan özdeğerleri vardır (Sagan, 1989).

Örnek 5.4.6 Gerilmiş (gergin) bir telin doğal titreşimleri düşünelim.

Serbest, enlemesine titreşen bir tel denklemin formu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.62)$$

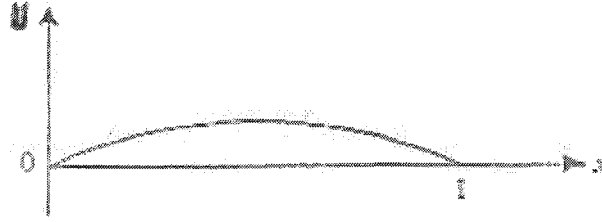
şeklindedir. Buradaki $u = u(x, t)$ telin noktasının x ekseninden t zamanına göre olan yer değiştirmesi ve a bir sabittir. (5.62) denkleminin

$$u = u(x, t) = y(x) \sin(a\omega t + \varphi) \quad (5.63)$$

şeklindeki çözümü telin doğal titreşimlerini belirtmektedir. (5.63), (5.62)'de yerine yazılırsa

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (5.64)$$

diferansiyel denklemini sağlaması gerektiği görülür (Sagan, 1989).



Şekil 5.6 Gergin bir telin uç noktalarındaki durumu

Eğer telin boyunu 1 olarak alırsak, telin uç noktalarındaki sınır koşulları Şekil 5.6'ya göre

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (5.65)$$

olarak yazılabilir. Böylece (5.64)-(5.65) bir özdeğer problemi belirtir.

Genel çözüm, karakteristik denklem $r^2 + \omega^2 = 0$ olduğundan

$$r_{1,2} = \pm \omega i \quad (5.66)$$

göz önüne alınarak

$$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x \quad (5.67)$$

olarak bulunur. (5.65) koşullarından

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y = B \sin \omega x \quad (5.68)$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow B \sin \omega = 0 \Rightarrow \sin \omega = 0 \Rightarrow \omega = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.69)$$

bulunarak özdeğerler

$$\omega_n^2 = (n\pi)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.70)$$

olup özdeğerlere karşılık özfonksiyonlar

$$y_n(x) = B_n \sin n\pi x \quad (5.71)$$

olarak ifade edilir.

6. BİR LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN GREEN FONKSİYONU

6.1 Ters Operatörün Genel Tanımı

Eğer B operatörünün D_B tanım kümesi A operatörünün R_A değer kümesiyle aynı ve ayrıca tüm $x \in D_A$ için

$$B(Ax) = x \quad (6.1)$$

bağıntısı sağlanıyorsa böyle bir B operatörü bir A operatörünün tersi olarak adlandırılır. A 'nın ters operatörü A^{-1} ile gösterilir. Buradan tüm $x \in D_A$ için

$$A^{-1}(Ax) = x \quad (6.2)$$

olacağı açıktır (Naimark, 1968).

Teorem 6.1.1 Eğer A operatörünün bir A^{-1} ters operatörü varsa o takdirde A operatörü A^{-1} operatörünün tersidir. Bir başka deyişle

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (6.3)$$

dır.

İspat: (6.2)'ye göre A^{-1} operatörünün $R_{A^{-1}}$ değer kümesi A operatörünün D_A tanım kümesiyle aynıdır. Ayrıca, (6.2) eşitliğinin her iki yanına A operatörünü uyguluyor ve $y = Ax$ yazarsak tüm $y \in R_A = D_{A^{-1}}$ için

$$AA^{-1}y = y \quad (6.4)$$

elde edilir ve bu kesin olarak A 'nın A^{-1} 'in tersi olduğunu gösterir.

Teorem 6.1.2 A operatörünün bir tersi olması için gerek ve yeter şart

$$Ax = 0 \quad (6.5)$$

eşitliğinin yalnızca $x = 0$ aşikâr çözümünün olmasıdır.

İspat: Varsayalım ki A operatörünün bir A^{-1} ters operatörü olsun. Eğer A^{-1} operatörünü (6.5)'in her iki yanına uygularsak $x = 0$ elde edilir. Buradan (6.5)'in gerekli olduğu sonucu çıkar.

Diğer taraftan (6.5) eşitliğinin doğru olduğu varsayılırsa o zaman tüm $y \in R_A$ için

$$Ax = y \quad (6.6)$$

eşitliğini sağlayan tek bir $x \in D_A$ çözümü vardır; çünkü böyle y 'lerin her biri için R_A değer kümesi tanımından dolayı en az bir çözüm vardır ve çözümün tekliğinden eğer $Ax' = y$ de doğruysa o zaman $A(x - x') = 0$ olmalıdır. Hipotezden bu sadece $x - x' = 0$ ise mümkündür yani bir başka deyişle $x = x'$ dir. Her bir $y \in R_A$ için (6.6) eşitliğinden x çözümü tespit edilir. Önceki bilgilerimizden bu ilişki bir lineer operatördür ve üstelik A 'nın tersidir.

6.2 Bir Diferansiyel Operatörün Ters Problemi

L ;

$$l(y) = p_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n(x) y \quad (6.7)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$U_v(y) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (6.8)$$

sınır koşullarıyla genelleştirilmiş bir diferansiyel operatör olsun.

Varsayalım ki $Ly = 0$ homogen sınır-değer probleminin yalnız $y = 0$ aşikâr çözümü bir başka deyişle $l(y) = 0$ denkleminin bir $y_1, y_2, \dots, y_n$ keyfi çözüm takımı için

$$\begin{bmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & \dots & U_2(y_n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & \dots & U_n(y_n) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

matrisinin rankı n olsun. Bu yüzden

$$\det[U_i(y_j)] \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (6.10)$$

dir. Teorem 6.1.2'ye göre L operatörünün bir L^{-1} ters operatörü vardır ve L operatörünün değer kümesi L^{-1} operatörünün tanım kümesiyle aynıdır. L^{-1} için açık bir ifade bulma işiyle uğraşılır. Göreceğimiz gibi, L^{-1} 'in sürekli bir çekirdekte bir integral operatör olduğu anlaşılır;

çekirdek L operatörünün Green fonksiyonu olarak tanımlanır. Aşağıda Green fonksiyonunun açık bir ifadesi verilmektedir.

6.3 Green Fonksiyonunun Yapısı

Bir L operatörü için Green fonksiyonu deyince aşağıdaki koşulları sağlayan bir $G(x, \xi)$ fonksiyonu anlaşılmalıdır.

1-) $G(x, \xi)$ sürekli fonksiyondur ve $[a, b]$ aralığındaki bütün x ve ξ değerleri için x 'e göre $(n-2)$. mertebe dahil sürekli türevlidir.

2-) $G(x, \xi)$ fonksiyonu (a, b) aralığındaki sabit tutulmuş her ξ değeri için x 'e göre $[a, \xi)$ ve $(\xi, b]$ yarı açık aralıklarında $(n-1)$. ve n . türevi sürekli olan fonksiyondur; $(n-1)$. türev

$x = \xi$ 'de $\frac{1}{p_0(\xi)}$ sıçrama süreksizliğine sahiptir yani

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi + 0, \xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{p_0(\xi)} \quad (6.11)$$

dir.

3-) $G(x, \xi)$, $[a, \xi)$ ve $(\xi, b]$ aralıklarının her birinde x 'in

$$l(G) = 0 \quad (6.12)$$

denklemini ve

$$U_\nu(G) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (6.13)$$

sınır koşullarını sağlayan bir fonksiyonu olarak göz önüne alınır (Stakgold, 1979).

Teorem 6.3.1 Eğer $Ly = 0$ sınır-değer problemi sadece aşikâr çözüme sahipse o takdirde L operatörünün sadece ve sadece bir Green fonksiyonu vardır.

İspat: $Ly = 0$ n . mertebeden lineer homogen diferansiyel denkleminin n tane lineer bağımsız çözümü vardır. Bu tür çözümlerin herhangi takımı $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ olsun. $Ly = 0$ denklemi için genel çözüm

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad (6.14)$$

dir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitlerdir. y fonksiyonunun $Ly = 0$ denkleminin çözümü olması için (6.8)'i de sağlaması gerekir. Buna göre

$$\begin{aligned} U_1(y) = 0 &\Rightarrow U_1(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n) = 0 \text{ dan} \\ c_1 U_1(y_1) + c_2 U_1(y_2) + \dots + c_n U_1(y_n) &= 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} U_2(y) = 0 &\Rightarrow U_2(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n) = 0 \text{ dan} \\ c_1 U_2(y_1) + c_2 U_2(y_2) + \dots + c_n U_2(y_n) &= 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

ve bu şekilde devam edilerek

$$\begin{aligned} U_n(y) = 0 &\Rightarrow U_n(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n) = 0 \text{ dan} \\ c_1 U_n(y_1) + c_2 U_n(y_2) + \dots + c_n U_n(y_n) &= 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

yazılabilir. Böylece (6.15), (6.16) ve (6.17) beraberce değerlendirilirse

[illegible]

sistemi elde edilir. Bu sistemin sadece $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ çözümünün olması için

$$\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & \dots & U_2(y_n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (6.19)$$

gerek ve yeter koşuldur. Böylece $Ly = 0$, $U_1(y) = U_2(y) = \dots = U_n(y) = 0$ homogen sınır-değer problemi varsayıma göre sadece $y = 0$ çözümüne sahip olduğundan dolayı (6.19) ile verilen şartı gerçekleştirmelidir.

$G(x, \xi)$ fonksiyonu $x < \xi$ iken $Ly = 0$ denkleminin çözümü olduğundan

$$G(x, \xi) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \dots + a_n y_n(x) \quad (a \leq x < \xi) \quad (6.20)$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde $G(x, \xi)$ fonksiyonu $x > \xi$ iken de $Ly = 0$ denkleminin çözümü olduğundan

$$G(x, \xi) = b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \dots + b_n y_n(x) \quad (\xi < x \leq b) \quad (6.21)$$

olacaktır.

$G(x, \xi)$ fonksiyonunun sürekliliğinden $x = \xi$ için

$$G(\xi, \xi) = a_1 y_1(\xi) + a_2 y_2(\xi) + \dots + a_n y_n(\xi) = b_1 y_1(\xi) + b_2 y_2(\xi) + \dots + b_n y_n(\xi) \quad (6.22)$$

veya

$$[b_1y_1(\xi)+b_2y_2(\xi)+...+b_ny_n(\xi)]-[a_1y_1(\xi)+a_2y_2(\xi)+...+a_ny_n(\xi)]=0 \quad (6.23)$$

yazılabilir.

$G(x, \xi)$ fonksiyonunun $x = \xi$ için ilk $(n-2)$ türevi oluşturulmalıdır.

$$\frac{\partial G(\xi+0, \xi)}{\partial x} = b_1 y_1'(\xi) + b_2 y_2'(\xi) + \dots + b_n y_n'(\xi) \quad (6.24)$$

ve 6.21)'e göre

$$\frac{\partial G(\xi-0, \xi)}{\partial x} = a_1 y_1'(\xi) + a_2 y_2'(\xi) + \dots + a_n y_n'(\xi) \quad (6.25)$$

olacaktır. (6.24)'den (6.25) çıkarılırsa

$$\left[b_1 y_1'(\xi) + b_2 y_2'(\xi) + \dots + b_n y_n'(\xi) \right] - \left[a_1 y_1'(\xi) + a_2 y_2'(\xi) + \dots + a_n y_n'(\xi) \right] = 0 \quad (6.26)$$

bulunur. Bu düşünceyle türev işlemleri sürdürülürse (6.23) ile beraber

$$\left. \begin{aligned} & [b_1 y_1(\xi) + \dots + b_n y_n(\xi)] - [a_1 y_1(\xi) + \dots + a_n y_n(\xi)] = 0 \\ & [b_1 y_1'(\xi) + \dots + b_n y_n'(\xi)] - [a_1 y_1'(\xi) + \dots + a_n y_n'(\xi)] = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & [b_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + b_n y_n^{(n-2)}(\xi)] - [a_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + a_n y_n^{(n-2)}(\xi)] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

sistemi oluşur. Ayrıca (6.11) koşulu dikkate alınırsa

$$\left[b_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + b_n y_n^{(n-1)}(\xi) \right] - \left[a_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + a_n y_n^{(n-1)}(\xi) \right] = \frac{1}{p_0(\xi)} \quad (6.28)$$

ve böylece (6.27) sistemi ile beraber (6.28) birleştirilirse

$$\left. \begin{aligned} & \left[b_1 y_1(\xi) + \dots + b_n y_n(\xi) \right] - \left[a_1 y_1(\xi) + \dots + a_n y_n(\xi) \right] = 0 \\ & \left[b_1 y_1'(\xi) + \dots + b_n y_n'(\xi) \right] - \left[a_1 y_1'(\xi) + \dots + a_n y_n'(\xi) \right] = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \\ & \left[b_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + b_n y_n^{(n-2)}(\xi) \right] - \left[a_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + a_n y_n^{(n-2)}(\xi) \right] = 0 \\ & \left[b_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + b_n y_n^{(n-1)}(\xi) \right] - \left[a_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + a_n y_n^{(n-1)}(\xi) \right] = \frac{1}{p_0(\xi)} \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

sistemi elde edilir. Bu sistemde

$$d_v = b_v - a_v \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (6.30)$$

yazılırsa d_v ler için

$$\left. \begin{aligned} & d_1 y_1(\xi) + \dots + d_n y_n(\xi) = 0 \\ & d_1 y_1'(\xi) + \dots + d_n y_n'(\xi) = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \\ & d_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \dots + d_n y_n^{(n-2)}(\xi) = 0 \\ & d_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \dots + d_n y_n^{(n-1)}(\xi) = \frac{1}{p_0(\xi)} \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

denklem sistem elde edilir. Bu, $x = \xi$ için $y_1, y_2, \dots, y_n$ temel çözüm sisteminin Wronskiye determinantıdır ve bu nedenle sıfır değildir. Buna göre sistemin her zaman bir çözümü vardır ve d_v fonksiyonları (6.31) sistemi vasıtasıyla tek türlü bulunur.

a_v ve b_v fonksiyonlarını bulmak için sınır koşullarını kullanırız. $U_v(y)$ formunu

$$U_v(y) = U_{va}(y) + U_{vb}(y) \quad (6.32)$$

olarak yazarız. Buradaki $U_{va}(y); y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)}$ leri içeren bütün toplamalar ve

$U_{vb}(y); y_b, y'_b, \dots, y_b^{(n-1)}$ leri içeren bütün toplamlardır.

$G(x, \xi)$ fonksiyonu x 'e göre (6.13) koşulunu sağladığından

$$U_v(G) = U_{va}(a_1 y_1 + \dots + a_n y_n) + U_{vb}(b_1 y_1 + \dots + b_n y_n) = 0 \quad (6.33)$$

olur. Düzenlenirse

$$U_v(G) = a_1 U_{va}(y_1) + \dots + a_n U_{va}(y_n) + b_1 U_{vb}(y_1) + \dots + b_n U_{vb}(y_n) = 0 \quad (6.34)$$

olur. a_v katsayıları yerine (6.30)'dan hareketle

$$a_v = b_v - d_v \quad (6.35)$$

yerleştirilerek

$$b_1 U_{vb}(y_1) + \dots + b_n U_{vb}(y_n) + (b_1 - d_1) U_{va}(y_1) + \dots + (b_n - d_n) U_{va}(y_n) = 0 \quad (6.36)$$

ve açık yazılırsa

$$b_1 [U_{va}(y_1) + U_{vb}(y_1)] + \dots + b_n [U_{va}(y_n) + U_{vb}(y_n)] = d_1 U_{va}(y_1) + \dots + d_n U_{va}(y_n) \quad (6.37)$$

olup (6.32) vasıtasıyla

$$b_1 U_v(y_1) + \dots + b_n U_v(y_n) = d_1 U_{va}(y_1) + \dots + d_n U_{va}(y_n) \quad (6.38)$$

elde edilir. $v = 1, 2, \dots, n$ konularak (6.38)'den $b_1, b_2, \dots, b_n$ bilinmeyenleri için bir denklem sistemi oluşur ve (6.10)'dan determinantı sıfır değildir. Bunun sonucu olarak (6.38)'in tek türlü bir $b_1, b_2, \dots, b_n$ çözümü vardır. Böylelikle a_v fonksiyonları da (6.35)'e göre tek türlü belirlenir. Bu şekilde Green fonksiyonunun varlığı ve tekliği kanıtlanmış olur.

6.4 Green Fonksiyonu Yardımıyla Bir Diferansiyel Operatörün Tersİ

Varsayalım ki $Ly = 0$ denkleminin yalnızca $y = 0$ aşikâr çözümü olsun, buna göre önceki bilgilerimizden L^{-1} tersi ve Green fonksiyonu vardır. Eğer $L^{-1}f = y$ ise o takdirde

$$Ly = f \quad (6.39)$$

yani bir başka deyişle y ,

$$I(y) = f \quad (6.40)$$

denkleminin bir çözümüdür ve de

$$U_\nu(y) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (6.41)$$

sınır koşullarını sağlar.

$[a, b]$ aralığında herhangi sürekli $f(x)$ fonksiyonu için bu çözümün geçerli olduğu ve Green fonksiyonu yardımıyla bulunabileceği gösterilecektir. Daha doğrusu aşağıdaki teoremin geçerli olduğu gösterilmelidir.

Teorem 6.4.1 Eğer $Ly = 0$ denkleminin sadece aşıkâr çözümü varsa o takdirde $[a, b]$ aralığındaki herhangi sürekli $f(x)$ fonksiyonu için $Ly = f$ denkleminin bir çözümü vardır ve bu çözüm; $G(x, \xi)$, L operatörünün Green fonksiyonu olmak üzere

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (6.42)$$

formülüyle ifade edilir.

İspat: $y(x)$, (6.42) formülüyle tanımlanan fonksiyon olsun. $y(x)$ 'in (6.40) ve (6.41) koşullarını sağladığı gösterilmelidir. Bunlar gösterilebilirse $y(x)$, $Ly = f$ denkleminin bir çözümü olur.

$G(x, \xi)$ fonksiyonu x 'e göre $(n-2)$. mertebe dahil sürekli türevlidir. Bu nedenle (6.42)'yi integral işareti altında x 'e göre $(n-2)$ kez türetebiliriz. Yani

$$y^{(v)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^v G(x, \xi)}{\partial x^v} f(\xi) d\xi \quad (v = 1, 2, \dots, n-2) \quad (6.43)$$

dir. Böylece $y(x)$ fonksiyonu ve $(n-2)$. mertebe dahil $y^{(v)}(x)$ türevleri $[a, b]$ aralığında sürekli'dir.

Öte yandan $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}$ fonksiyonu $x = \xi$ 'de bir süreksizlik içerir. Bunun için $y^{(n-1)}$ ve $y^{(n)}$ türevlerini direkt integral işareti altında türev hesabıyla bulamayız. Bu sebeple (6.43) formülü $v = n-2$ için

$$y^{(n-2)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{n-2} G(x, \xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi) d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n-2} G(x, \xi)}{\partial x^{n-2}} f(\xi) d\xi \quad (6.44)$$

şeklinde yazılır. (a, x) ve (x, b) aralıklarının her birinde integrand ve x 'e göre türevi süreklidir, bu nedenle integral işareti altında x 'e göre (6.44)'ün sol tarafının türevi

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi + \left[\frac{\partial^{n-2} G(x, \xi)}{\partial x^{n-2}} \right]_{\xi=x-0} f(x) + \int_x^b \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi - \left[\frac{\partial^{n-2} G(x, \xi)}{\partial x^{n-2}} \right]_{\xi=x+0} f(x) \quad (6.45)$$

şeklinde yazılabilir. $\frac{\partial^{n-2} G}{\partial x^{n-2}}$, $x = \xi$ 'de sürekli olduğundan integrali alınmış iki terim sadeleşir ve (6.45) ifadesi

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi \quad (6.46)$$

olarak ya da bir başka biçimde

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi \quad (6.47)$$

olarak yazılır. (6.46) formülü tekrar türetilirse

$$y^{(n)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n} f(\xi) d\xi + \left[\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right]_{\xi=x-0} f(x) + \int_x^b \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n} f(\xi) d\xi - \left[\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right]_{\xi=x+0} f(x) \quad (6.48)$$

bulunur. Green fonksiyonunun tanımındaki (6.11)'den

$$\left[\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right]_{\xi=x-0} - \left[\frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right]_{\xi=x+0} = \frac{1}{p_0(x)} \quad (6.49)$$

dir. Böylece (6.48) formülü

$$y^{(n)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n} f(\xi) d\xi + \frac{1}{p_0(x)} f(x) \quad (6.50)$$

biçiminde yazılabilir.

$y(x)$ fonksiyonunun kendisi ve türevleri için elimizdeki (6.42), (6.47) ve (6.50) ifadeleri $l(y)$ 'nin (6.7) ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$l(y) = p_0(x) \int_a^b \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n} f(\xi) d\xi + f(x) + p_1(x) \int_a^b \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi + \dots + p_n(x) \int_a^b G(x, \xi) \cdot f(\xi) d\xi \quad (6.51)$$

ve düzenlenirse

$$l(y) = \int_a^b \left[p_0(x) \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n} + p_1(x) \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} + \dots + p_n(x) G(x, \xi) \right] f(\xi) d\xi + f(x) \quad (6.52)$$

olur. Bu eşitlikteki köşeli parantez içindeki ifadeye dikkat edilirse

$$l(y) = \int_a^b l(G) f(\xi) d\xi + f(x) \quad (6.53)$$

bulunur. Bu formüldeki integral sıfıra eşittir. Çünkü Green fonksiyonu ile ilgili (6.12)'den yararlanılırsa $G(x, \xi)$ fonksiyonu $[a, \xi]$ ve $(\xi, b]$ aralıklarının her birinde $l(G) = 0$ denklemini sağlayan x 'in bir fonksiyonudur. Böylece (6.40)'ın doğruluğu gösterilmiş olur.

Sınır koşullarının doğruluğunu göstermek için $U_\nu(y)$ formları oluşturulmalıdır. $U_\nu(y)$ formları $y(x)$ fonksiyonunun ve $(n-1)$. mertebeye kadar $(n-1)$. mertebe dahil türevlerinin $x = a$ ve $x = b$ sınır noktalarındaki değerlerini içerdiğinden

$$U_\nu(y) = U_\nu \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_a^b U_\nu [G(x, \xi)] f(\xi) d\xi \quad (6.54)$$

olarak yazılabilir. Burada (6.13)'den yararlanılırsa $U_\nu(G) = 0$ olduğu görülür. O halde $U_\nu(y) = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) olacağından $y(x)$ fonksiyonunun (6.41) sınır koşullarını da sağladığı gösterilmiş ve böylece teorem ispatlanmış olur (Weidmann, 1980).

Sürekli bütün $f(x)$ fonksiyonları için

$$Af(x) = \int_a^b k(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (6.55)$$

eşitliğiyle tanımlanan bir A operatörüne $k(x, \xi)$ çekirdeğinde bir integral operatör denir.

Teorem 6.4.1'den, L^{-1} operatörünün $G(x, \xi)$ çekirdeğinde bir integral operatör olduğu anlaşılmaktadır.

6.5 Eşlenik Operatör İçin Green Fonksiyonu

Eğer L tersi olan bir operatörse Sonuç 4.2.9'dan L^* eşlenik operatörünün de tersi vardır. Bunun sonucu L^* operatörünün benzer şekilde bir Green fonksiyonu vardır ki biz bunu $H(x, \xi)$ ile göstereceğiz.

L operatörünün $G(x, \xi)$ ve L^* operatörünün $H(x, \xi)$ Green fonksiyonları arasındaki bağıntıyı bulalım.

$$L^{-1}f = \varphi \quad (6.56)$$

ve

$$L^{*-1}g = \psi \quad (6.57)$$

alınırsa o zaman (6.56)'ya L operatörünü uygulayarak

$$f = L\varphi \quad (6.58)$$

ve (6.57)'ye L^* operatörünü uygulayarak

$$g = L^*\psi \quad (6.59)$$

olur. (4.146)'dan yararlanarak

$$(\varphi, L^*\psi) = (L\varphi, \psi) \quad (6.60)$$

eşitliği

$$(L^{-1}f, g) = (f, L^{*-1}g) \quad (6.61)$$

formunda yazılabilir. Buradan herhangi sürekli $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için

$$\int_a^b \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) \overline{g(x)} dx d\xi = \int_a^b \int_a^b f(\xi) \overline{H(\xi, x) g(x)} dx d\xi \quad (6.62)$$

dir. Bu eşitlik bize

$$G(x, \xi) = \overline{H(\xi, x)} \quad (6.63)$$

olduğunu gösterir. Bu şekilde ilişkilendirilen G ve H çekirdekleri birbirinin eşleniği olarak tanımlanır. Yani birbirinin eşleniği iki diferansiyel operatörün Green fonksiyonları eşlenik çekirdektirler (Naimark, 1968).

Özel olarak, eğer L operatörü kendine eş ise bu takdirde $L^* = L$ olduğundan

$$H(x, \xi) = G(x, \xi) \quad (6.64)$$

dir. Bu duruma göre (6.63) ile verilen eşitlik için

$$G(x, \xi) = \overline{G(\xi, x)} \quad (6.65)$$

olur. (6.65) koşulunu sağlayan bir çekirdeğe hermityen denir (Naimark, 1968).

Sonuç 6.5.1 Kendine eş bir diferansiyel operatörün Green fonksiyonu hermityen bir çekirdektir.

6.6 Bir Parametre İçeren Sınır-Değer Problemleri ve Integral Denkleme İndirgenmeleri

Çoğu kez uygulamalarda

$$l(y) = \lambda y + f(x) \quad (6.66)$$

$$U_\nu(y) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (6.67)$$

biçimindeki sınır-değer problemleri incelenmektedir. Burada λ , bilinen bir parametreyi ve $f(x)$, x 'in yine bilinen sürekli bir fonksiyonunun gösterir. L operatörünü kullanarak (6.66) ile ifade edilen $l(y)$ diferansiyel ifadesini ve (6.67) ile belirtilen sınır koşullarını genelleştirsek bu sınır-değer problemini

$$Ly = \lambda y + f \quad (6.68)$$

formunda ifade edebiliriz. $f = 0$ özel halinde (6.68) eşitliği

$$Ly = \lambda y \quad (6.69)$$

biçimini alır ve buradan homogen sınır-değer problemi

$$l(y) = \lambda y; \quad U_\nu(y) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (6.70)$$

olarak yazılabilir. (6.69) denkleminin veya (6.70) sınır-değer probleminin aşikâr olmayan bir çözümü için λ değerleri L operatörünün özdeğerleridir ve aşikâr olmayan her bir çözüm bir özfonksiyona aittir.

Varsayalım ki L 'nin bir L^{-1} tersi var olsun; $G(x, \xi)$, Green fonksiyonunu temsil etsin. (6.68) denkleminin her iki yanına L^{-1} operatörü uygulanırsa

$$g = L^{-1} f \quad (6.71)$$

olmak üzere

$$y = \lambda L^{-1} y + g \quad (6.72)$$

elde edilir. (6.72) denklemi

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi + g(x) \quad (6.73)$$

anlamına gelmektedir. Dolayısıyla eğer $U_\nu(y) = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) sınır koşullarına bağlı $l(y)$ diferansiyel ifadesinin $G(x, \xi)$ Green fonksiyonu varsa o takdirde (6.66)-(6.67) sınır-değer problemi (6.73) integral denklemine denktir. (6.73)'de geçen $g(x)$ ise

$$g(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (6.74)$$

dir.

Özel olarak, (6.70) homogen sınır-değer problemi

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi \quad (6.75)$$

homogen integral denklemine denktir (Aksoy, 1998).

$G(x, \xi)$ sürekli bir çekirdek olduğundan integral denkleme ait Fredholm teorisi uygulanabilir. Buna göre (6.75) homogen integral denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ şeklinde sayılabilir sayıda özdeğeri vardır ve yığılma noktası sonlu değildir. L 'nin özdeğeri olmayan her bir λ sayısı için sağ tarafında keyfî sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu içeren (6.73) homogen olmayan denklemin çözümü

$$y(x) = \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi, \lambda) g(\xi) d\xi \quad (6.76)$$

formülüyle ifade edilir (Aksoy, 1998). Burada $\Gamma(x, \xi, \lambda)$, $G(x, \xi)$ çekirdeğinin resolventini göstermektedir ve $[a, b]$ aralığında keyfi sabit x ve ξ değerleri için λ 'nın meromorf yani iki tam fonksiyonun oranı şeklinde yazılabilen bir fonksiyonudur. Sadece homogen integral denklemin özdeğerlerinde kutbu olabilir. İntegral denklemleri sınır-değer problemlerine bağlı olarak ele alırsak aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 6.6.1 Eğer $l(y) = 0$ diferansiyel denkleminin $U_\nu(y) = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) sınır koşulları altında sadece aşikâr çözümü varsa o takdirde

a) $l(y) = \lambda y$; $U_\nu(y) = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) homogen sınır-değer problemi en fazla sayılabilir sayıda $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ şeklinde özdeğerlere sahiptir ve bunların yığılma noktası sonlu değildir.

b) $l(y) = \lambda y + f$; $U_\nu(y) = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) homogen olmayan sınır-değer probleminin özdeğer olmayan tüm λ değerleri için homogen probleme ve herhangi sürekli $f(x)$ fonksiyonuna bağlı bir çözümü vardır.

6.7 $L - \lambda I$ * Operatörü İçin Green Fonksiyonu

Önceden olduğu gibi $L, l(y)$ diferansiyel ifadesini ve $U_\nu(y) = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) koşullarını genelleleyen bir operatör olsun. $L - \lambda I$ operatörünün Green fonksiyonu için bir ifade bulmak bir başka deyişle $L - \lambda I$ operatörünün tersini oluşturmak istenmektedir.

$$y_\nu = y_\nu(x, \lambda) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (6.77)$$

ile $l(y) = \lambda y$ denkleminin

$$y_j^{(\nu-1)}(a, \lambda) = \begin{cases} 0, & j \neq \nu \\ 1, & j = \nu \end{cases} \quad (6.78)$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir çözüm sistemini gösterelim.

$$l(y) - \lambda y = f \quad (6.79)$$

* λ , özdeğer değildir.

denkleminin parametrelerine değişik metotlar uygulayarak

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^n C_{\nu}' y_{\nu}(x) + \int_a^x f(\xi) \left(\sum_{\nu=1}^n y_{\nu}(x) \frac{W_{\nu}(\xi)}{W(\xi)} \right) d\xi \quad (6.80)$$

ve de

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^n C_{\nu}'' y_{\nu}(x) - \int_x^b f(\xi) \left(\sum_{\nu=1}^n y_{\nu}(x) \frac{W_{\nu}(\xi)}{W(\xi)} \right) d\xi \quad (6.81)$$

elde edilir. (6.80) ve (6.81)'deki $C_1', \dots, C_n', C_1'', \dots, C_n''$ sabitler ve $W; y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının

$$W = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & \dots & y_n^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ y_1 & y_2 & \dots & \dots & y_n \end{vmatrix} \quad (6.82)$$

Wronskiyan determinantıdır (Ince, 1956). $W_1, W_2, \dots, W_n$ ise W 'nin birinci satırındaki elemanların kofaktörleridir. (6.80) ve (6.81) toplanarak 2 ile bölünürse

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^n C_{\nu} y_{\nu}(x) + \int_a^b g(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (6.83)$$

elde edilir. Burada da $C_1, \dots, C_n$ sabitler ve

$$g(x, \xi) = \pm \frac{1}{2W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & \dots & y_n(x) \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \dots & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & \dots & y_n(\xi) \end{vmatrix} \quad (6.84)$$

fonksiyonu eğer $x > \xi$ ise pozitif ve eğer $x < \xi$ ise negatif işaretlidir. (6.83) ile verilen y fonksiyonunun $U_{\nu}(y) = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) sınır koşullarını sağlaması gerektiğinden bir başka deyişle $I(y) = \lambda y + f$, $U_{\nu}(y) = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) sınır-değer probleminin bir çözümü olacağından bu

$$\sum_{j=1}^n C_j U_\nu(y_j) + \int_a^b f(\xi) U_\nu(g) d\xi = 0 \quad (6.85)$$

olmasını gerektirir. C_j için (6.85) denklemleri çözülerek (6.83)'de yerine yazılırsa

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi \quad (6.86)$$

elde edilir. $G(x, \xi, \lambda)$ ise

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{(-1)^n}{\Delta(\lambda)} H(x, \xi, \lambda) \quad (6.87)$$

dır. Bu formüldeki $\Delta(\lambda)$,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & \dots & U_2(y_n) \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \quad (6.88)$$

ve $H(x, \xi, \lambda)$,

$$H(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & \dots & y_n(x) & g(x, \xi) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & \dots & U_1(y_n) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & \dots & U_2(y_n) & U_2(g) \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & \dots & U_n(y_n) & U_n(g) \end{vmatrix} \quad (6.89)$$

dir. Eğer λ , L operatörünün bir özdeğeri değilse o takdirde $\Delta(\lambda) \neq 0$ dır ve (6.86) ile (6.87) formülleri anlamlıdır. (6.86) formülü $G(x, \xi, \lambda)$ 'nın $L - \lambda I$ operatörünün Green fonksiyonu olduğunu göstermektedir. Yani $L - \lambda I$ operatörünün Green fonksiyonu (6.84), (6.87), (6.88) ve (6.89) ile bulunur.

Teorem 6.7.1 X bir lineer uzay ve $L : D(L) \rightarrow X$ ($D(L) \subset X$) bir lineer operatör olsun. Bir $\lambda \in K$ sayısı için $L - \lambda I$ operatörünün $(L - \lambda I)^{-1}$ tersinin var olması için gerek ve yeter koşul, λ sayısının L 'nin özdeğeri olmamasıdır.

İspat:

a) Yeterlilik: λ sayısının L operatörünün özdeğeri olmadığını varsayıp $(L - \lambda I)^{-1}$ 'in olduğunu gösterelim.

Bir $y \in \mathfrak{R}(L - \lambda I)$ için

$$(L - \lambda I)x_1 = y \quad (6.90)$$

$$(L - \lambda I)x_2 = y \quad (6.91)$$

olsun. Buradan (6.90)'dan (6.91) çıkarılırsa

$$(L - \lambda I)(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow L(x_1 - x_2) = \lambda(x_1 - x_2) \quad (6.92)$$

bulunur. λ , L operatörünün özdeğeri olmadığından $x_1 - x_2 = 0$ ya da $x_1 = x_2$ elde edilir. Sonuç olarak $(L - \lambda I)^{-1}$ operatörü vardır.

b) Gerekliklik: $(L - \lambda I)$ operatörünün $(L - \lambda I)^{-1}$ tersinin var olduğunu kabul edelim. O halde

$$(L - \lambda I)x = 0 \quad (6.93)$$

denkleminin bir tek $x = 0$ çözümü vardır. Bir başka deyişle $Lx = \lambda x$ olacak şekilde bir tek $x = 0$ elemanı vardır. Dolayısıyla λ , L operatörünün özdeğeri değildir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.8 $L - \lambda I$ Operatörünün Green Fonksiyonunun Analitik Yapısı

$\Delta(\lambda)$ ve $H(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonları (6.88) ve (6.89)'dan anlaşılacağı üzere λ parametresinin tam fonksiyonlarıdır. Bu nedenle (6.87)'ye göre $(L - \lambda I)$ operatörünün $G(x, \xi, \lambda)$ Green fonksiyonu λ parametresinin meromorf bir fonksiyonudur ve kutupları sadece operatörün özdeğerleri olabilir (Naimark, 1968).

λ_0 , $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun tek katlı bir sıfırı olsun. O zaman λ_0 , $G(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonunun da sadece tek katlı bir kutbu olabilir. Yani

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{R(x, \xi)}{\lambda - \lambda_0} + G_1(x, \xi, \lambda) \quad (6.94)$$

dır. Burada $G_1(x, \xi, \lambda)$, λ_0 noktasının bir civarında regülerdir.

Eğer λ_0 , $G(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonunun singüler bir noktası değilse $R(x, \xi) = 0$ olmalıdır. Rezidü teorisinin bilinen formülüne göre

$$R(x, \xi) = (-1)^n \frac{H(x, \xi, \lambda_0)}{\Delta'(\lambda_0)} \quad (6.95)$$

dır. $H(x, \xi, \lambda)$ determinantının 1. satır elemanlarına göre açılımındaki $g(x, \xi)$ 'nin katsayısı $\Delta(\lambda_0) = 0$ dır. Böylece $R(x, \xi)$ fonksiyonu ve x 'e göre ilk n türevi $a \leq x$, $\xi \leq b$ karesinde süreklidir. Sonuç olarak (6.89)'dan $R(x, \xi)$ 'nin $y_1(x), \dots, y_n(x)$ fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonu olduğu görülür. Buradan belirli bir ξ değeri için $R(x, \xi)$,

$$L(R) - \lambda_0(R) = 0 \quad (6.96)$$

denklemini sağlar. (6.89)'dan $H(x, \xi, \lambda)$ ve $R(x, \xi)$ 'nin sınır koşullarını da sağladığı sonucu çıkarılır. Üstelik her sabit tutulmuş ξ değeri için $R(x, \xi)$, L operatörünün λ_0 özdeğerine ait bir özfonksiyondur. Çünkü, λ_0 , $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun tek katlı bir sıfırındır ve buna bağlı sadece bir $y_0(x)$ özfonksiyonu vardır ve bunun x 'den bağımsız bir sabit çarpan kesimiyle ifadesi

$$R(x, \xi) = a(\xi)y_0(x) \quad (6.97)$$

dir.

$$G^*(x, \xi, \lambda) = \overline{G(\xi, x, \lambda)} \quad (6.98)$$

yazılırsa o zaman $G^*(x, \xi, \lambda)$, $L^* - \bar{\lambda}I$ operatörünün $-l(y)$ ifadesinin katsayılarının l^* için gerektiği kadar türetilmesi şartıyla- Green fonksiyonudur.

(6.94)'den çıkartılacak diğer bir sonuç

$$G^*(x, \xi, \lambda) = \frac{\overline{R(\xi, x)}}{\lambda - \lambda_0} + \overline{G_1(\xi, x, \lambda)} \quad (6.99)$$

dir. Böylece sabit tutulmuş bir ξ değeri için $\overline{R(\xi, x)}$, L^* operatörünün $\bar{\lambda}_0$ özdeğerine ait bir özfonksiyondur. Eğer bu fonksiyonların birini $z_0(x)$ ile gösterirsek o zaman

$$\overline{R(\xi, x)} = b(\xi)z_0(x) \quad (6.100)$$

den

$$R(x, \xi) = \overline{b(x)z_0(\xi)} \quad (6.101)$$

dir. Bu eşitlik (6.97) ile karşılaştırılarak

$$R(x, \xi) = cy_0(x)\overline{z_0(\xi)} \quad (6.102)$$

bulunur. c sabitini bulmak gerekir. (6.94) ve (6.102)'den

$$(\lambda - \lambda_0) \int_a^b G(x, \xi, \lambda) y_0(\xi) d\xi = cy_0(x) \int_a^b y_0(\xi) \overline{z_0(\xi)} d\xi + (\lambda - \lambda_0) \int_a^b G_1(x, \xi, \lambda) y_0(\xi) d\xi \quad (6.103)$$

yazılabilir. Son terimdeki integrand λ_0 noktasının bir civarında λ parametresinin regüler bir fonksiyonudur, böylece (6.103)'den

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (\lambda - \lambda_0) \int_a^b G(x, \xi, \lambda) y_0(\xi) d\xi = cy_0(x) \int_a^b y_0(\xi) \overline{z_0(\xi)} d\xi \quad (6.104)$$

bulunur. Öte yandan,

$$(L - \lambda I) y_0 = (\lambda_0 - \lambda) y_0 \quad (6.105)$$

dan

$$(L - \lambda I)^{-1} y_0 = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} y_0 \quad (6.106)$$

dır. $G(x, \xi, \lambda)$, $(L - \lambda I)$ operatörünün Green fonksiyonu olduğundan (6.106)'da göz önüne alınırsa

$$\int_a^b G(x, \xi, \lambda) y_0(\xi) d\xi = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} y_0(x) \quad (6.107)$$

biçiminde yazılabilir. (6.107) denklemi de (6.104)'de yerine yazılırsa

$$-y_0(x) = cy_0(x) \int_a^b y_0(\xi) \overline{z_0(\xi)} d\xi \quad (6.108)$$

elde edilir. Buradan c ise

$$c = -\frac{1}{\int_a^b y_0(\xi) \overline{z_0(\xi)} d\xi} \quad (6.109)$$

olup (6.102)'de yerine yazılırsa

$$R(x, \xi) = -\frac{y_0(x) \overline{z_0(\xi)}}{\int_a^b y_0(\xi) \overline{z_0(\xi)} d\xi} \quad (6.110)$$

ile bulunur. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun her λ_0 tek katlı sıfırı için (6.110), (6.94)'de yerine yazılırsa

$$G(x, \xi, \lambda) = -\frac{y_0(x) \overline{z_0(\xi)}}{(\lambda - \lambda_0) \int_a^b y_0(\xi) \overline{z_0(\xi)} d\xi} + G_1(x, \xi, \lambda) \quad (6.111)$$

olacaktır. Burada $G_1(x, \xi, \lambda)$, λ_0 noktasının bir komşuluğunda regülerdir. Eğer $y_0(x)$ ve $z_0(x)$ fonksiyonları normalize edilirse

$$\int_a^b y_0(\xi) \overline{z_0(\xi)} d\xi = 1 \quad (6.112)$$

olarak (6.111)'de göz önüne alınırsa (6.111) formülü kısmen sadeleşerek

$$G(x, \xi, \lambda) = -\frac{y_0(x) \overline{z_0(\xi)}}{\lambda - \lambda_0} + G_1(x, \xi, \lambda) \quad (6.113)$$

halini alır.

7. SONUÇLAR

Belirttiğimiz gibi bu tez çalışmasında sonlu aralıkta verilmiş yüksek mertebeden lineer diferansiyel ifade ve genel sınır koşulları ile tanımlanmış diferansiyel operatörün Green fonksiyonu incelenmiştir. Bu çalışmanın devamı olarak sonralar sonsuz aralıkta verilmiş diferansiyel operatörlerin spektral özelliklerinin incelenmesi öngörülmektedir.



KAYNAKLAR

Naimark, M. A., (1968), Elementary Theory of Linear Differential Operators, George Harrap & Company, LTD., London.

Coddington, E. A. ve Levinson, N., (1955), Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw-Hill, New York.

Stakgold, I., (1979), Green's Functions and Boundary-Value Problems, John Waley & Sons, New York.

Sagan, H., (1989), Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics, Dover, New York.

Akhiezer, N. I. ve Glazman, I. M., (1993), Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces, Dover, New York.

Weidmann, J., (1980), Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer-Verlag, New York.

Ince, E. L., (1956), Ordinary Differential Equations, Dover, New York.

Musayev, B. ve Alp, M., (2000), Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.

Aksoy, Y., (1998), Integral Denklemler, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi Matbaası, İstanbul.

Özdemir, Y. ve Aksoy, Y., (1995), Çözümlü Lineer Cebir Problemleri, Arıkan Ofset AŞ., İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 24.01.1978

Doğum yeri İstanbul

İlköğretim 1984-1989 Nurettin Teksan İlköğretim Okulu
1989-1992 Fenerbahçe Lisesi

Lise 1992-1995 Fenerbahçe Lisesi

Lisans 1996-1997 Yıldız Teknik Üniversitesi Yabancı Dil Eğitimi
1997-2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya-Metalurji Fak.
Matematik Mühendisliği BölümüYüksek Lisans 2002-2004 Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ortaöğretim Fen-Matematik Alanları Anabilim Dalı,
Matematik Öğretmenliği Bilim DalıYüksek Lisans 2002-2004 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı**Çalıştığı kurum**

2001-2002 Erba Bilgisayar Ltd. Şti.