

154485

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TORSAL VARYETELERİN GEOMETRİSİ

Matematikçi Ayşe ALTINTAŞ

**FBE Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Meral TOSUN

Dr. A. Ulukannan
Dr. Füsün UAS
Yrd. Doç. Dr. Meral TOSUN
Meral Tosun

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIMLAR.....	2
2.1 Yarı-Grup	2
2.2 Dışbükey Polihedral Koni	2
2.3 Afin Varyete	8
2.4 Projektif Varyete	14
3. AFİN TORSAL VARYETE	17
3.1 Afin Torsal Varyetenin Oluşturulması ve Örnekler	17
4. PROJEKTİF TORSAL VARYETE	27
4.1 Projektif Torsal Varyetenin Oluşturulması	27
4.2 Diğer Örnekler.....	36
5. TORUS ETKİSİ VE YÖRÜNGELERİ	40
5.1 Afin Torsal Varyete Üzerinde Yörüngeler.....	40
5.2 Projektif Torsal Varyete Üzerinde Yörüngeler	47
6. TORSAL VARYETELERİN MATRİSLERLE ELDE EDİLİŞİ	52
6.1 Torsal Varyeteleri Tanımlayan Denklemler.....	52
6.2 Groebner Tabanı.....	55
6.3 Torsal Kümeler.....	59
6.4 Uygulama	68
7. SONUÇ	71
KAYNAKLAR.....	72
ÖZGEÇMİŞ	74

SİMGE LİSTESİ

σ	tam dışbükey rasyonel polihedral koni
$\sigma^\vee$	dual koni
τ	σ konisinin yüzü
$BT(f)$	f polinomunun baş terimi
$C(n, k)$	n in k lı kombinasyonu
e_i	birim vektör
e_i^*	dual uzayda birim vektör
N	kafes
M	dual kafes
$N_{\mathbb{R}}$	N ile tanımlanan reel uzay
$M_{\mathbb{R}}$	M ile tanımlanan dual reel uzay
$N(\tau)$	bölüm kafesi
$M(\tau)$	bölüm kafesinin duali
O_τ	τ yüzüne karşılık gelen yörünge
S_σ	yarı-grup
$S(f, g)$	f ve g polinomlarının S-polinomu
T_N	afin cebirsel torus
U_i	projektif uzayın açık altkümeleri
U_σ	σ konisine karşılık gelen afin torsal varyete
$u^\perp$	u vektörüne dik olan vektörler
$V(\tau)$	τ yüzüne karşılık gelen yörüngenin kapanışı
$(x_0 : \dots : x_n)$	projektif uzayda homojen koordinatlar
x_τ	τ yüzüne karşılık gelen özel nokta
X_A	A matrisi ile tanımlanan torsal varyete
$\prec, \succ$	yüz işaretleri
$>$	üstel terim sıralaması
$>_{alf}$	alfabetik sıralama
$>_{dtersalf}$	derecelendirilmiş ters alfabetik sıralama
Δ	fan
$\Delta(\tau)$	τ yüzü ile tanımlanan fan
$X(\Delta)$	Δ fanına karşılık gelen projektif torsal varyete
χ''	u vektörüne karşılık gelen üstel terim

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 $N \cong \mathbb{Z}^2$ kafesi	3
Şekil 2.2 $N \cong \mathbb{Z}^2$ kafesinde tam dışbükey rasyonel polihedral koni	4
Şekil 2.3 $\sigma = \langle 2e_1 + e_2, e_2 \rangle \subset N_{\mathbb{R}}$ konisi.....	5
Şekil 2.4 Dual koni $\sigma^{\vee} = \langle e_1^*, e_1^* + 2e_2^* \rangle$	6
Şekil 3.1 $S_{\sigma} = \langle e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^* \rangle$ yarı-grubu.....	18
Şekil 3.2 Koni üzerine konik.....	24
Şekil 3.3 $\sigma = \langle e_1 \rangle$ konisinin duali	25
Şekil 4.1 $\Delta = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$	27
Şekil 4.2 $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$ konisi ve $\tau = \langle e_1 \rangle$ yüzü.....	28
Şekil 4.3 $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$ ve $\tau = \langle e_1 \rangle$ konilerinin dualleri.....	29
Şekil 4.4 $\Delta = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ fanı	31
Şekil 4.5 Koniler ve dualleri	33
Şekil 4.6 $\sigma_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ ve $\sigma_2 = \langle e_1, -e_2 \rangle$ konileri.....	36
Şekil 4.7 $\sigma_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$, $\sigma_2 = \langle -e_1, e_2 \rangle$, $\sigma_3 = \langle -e_1, -e_2 \rangle$, $\sigma_4 = \langle e_1, -e_2 \rangle$ konileri	38
Şekil 5.1 $U_{\sigma} = V(Z_2^2 - Z_1 Z_3)$ üzerinde $T_N = (\mathbb{C}^*)^2$	44
Şekil 5.2 $U_{\sigma} = V(Z_2^2 - Z_1 Z_3)$ üzerinde tüm yörüngeleri	44
Şekil 5.3 3-boyutlu kafeste bir τ yüzü ve $\Delta(\tau)$ fanı.....	48
Şekil 6.1 (A_2) grafi ve C_1 ve C_2 eğrilerinin birbirlerine göre durumları	69

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, cebirsel varyetelerin özel bir sınıfı olan torsal varyeteleri inceliyoruz. Torsal varyeteler, afin cebirsel torusu yoğun ve açık altküne olarak içeren varyetelerdir ve torusun kendi üzerindeki etkisi varyete üzerine genişletilebilir. Torsal varyetelerin geometrisi temelde basit kombinatorial yapılar olan konveks polihedral konilerden oluşur. Bu sayede, varyetenin pek çok özelliği, karşılık gelen konveks yapı kullanılarak elde edilmektedir.

Cebir ve geometrinin bir araya geldiği torsal varyetelerle ilgili bu güzel çalışmayı yapmam için beni teşvik eden, en başta cebirsel geometri ile tanışmamı sağlayan ve her zaman sabırla ve ilgiyle sorularımı yanıtlayan sayın danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Meral Tosun'a teşekkür ederim. Ayrıca Yrd. Doç. Dr. E. Mehmet Özkan'a, tüm çalışma arkadaşlarıma, hocalarıma ve aileme, gösterdikleri sabır ve destekleri için teşekkür ederim.



ÖZET

Bu çalışmadaki amacımız, torsal varyetelerin verilen bir konveks yapıdan ve verilen bir idealden nasıl oluşturulduğunu anlamaya çalışmaktır. Bu amaçla, çalışmamızı, Fulton (1997) kitabının birinci ve üçüncü bölümlerini ve Sturmfels (1997) makalesini temel alarak hazırladık. Burada, ayrıntılı bir şekilde bu iki kaynağı, tüm örnek ve çözümleri ile birlikte, anlamaya çalışıyoruz.

Öncelikle, ileriki bölümlerde karşımıza çıkacak temel kavramları tanımlamakla başlayacağız. Üçüncü bölümde, n -boyutlu bir uzayda verilen belirli özelliklere sahip bir koniden başlayarak afin torsal varyete oluşturacağız. Dördüncü bölümde, verilen birden fazla koniye (yani *fana*) karşılık gelen torsal yapıyı oluşturacağız. Bu işlem, fandaki her bir koniye karşılık gelen afin torsal varyeteyi oluşturduktan sonra konilerin birbirlerine göre durumlarını gözönünde bulundurarak bu varyeteleri *yapıştırmaktan* ibarettir. Böylece projektif torsal varyete elde etmiş olacağız. Bu bölümlerde, Fulton (1997) kitabının iki bölümünü ayrıntılı bir şekilde anlamaya ve önerilen alıştırma problemlerinin çözümlerini bulmaya çalışacağız.

Beşinci bölümde, elde ettiğimiz torsal varyetelerin, torus etkisini kullanarak yörüngelerini tanımlamaya çalışacağız. Önceki bölümlerde ele aldığımız örneklerin yörüngelerini inceleyeceğiz.

Altıncı bölümde, Sturmfels (1997) çalışmasından yararlanarak matrisler ve torsal varyeteler arasındaki ilişkiyi ve ideallerin Gröbner tabanını öğreneceğiz. Daha sonra, matrislerin hangi koşul altında aynı torsal varyeteyi verdiklerini öğrenmek için Katsabekis ve Thoma (2003) makalesini anlamaya çalışacağız.

Çalışmamızı, bir normal varyete ile bir torsal varyete arasındaki ilişki kurabilmek amacıyla Altınok ve Tosun (2004) makalesinden örnek vererek bitireceğiz.

Anahtar Kelimeler: Afin varyete, Projektif varyete, Torsal varyete, Yörünge, Torsal ideal, Torsal küme.

ABSTRACT

In this thesis, our aim is to understand two different constructions of a toric variety: starting from a rational polyhedral cone and starting from a matrix. For this purpose, we use the first and the third chapter of the book Fulton (1997) and the article Sturmfels (1997). We try to understand these two references in details with many examples.

First, we start by a brief introduction and give some basic definitions that we will need. In the third chapter, we construct a toric variety from a rational polyhedral n -dimensional. In the fourth chapter, we construct a toric variety from a given set of convex cones which is called a fan. This process consists of gluing of affine toric varieties.

In chapter 5, we define the orbits of the torus action on a toric variety. Then, we study the orbits of the varieties that we examined in the previous sections.

In the sixth chapter, we try to understand the construction of a toric variety from a matrix. For this, we study Sturmfels (1997). Then using Katsabekis and Thoma (2003), we state the necessary conditions for matrices which give the same toric variety.

We end our work by giving some examples from Altınok and Tosun (2004) in order to establish a relation between a normal variety and a toric variety.

Key Words: Affine variety, Projectif variety, Toric variety, Orbit, Toric ideal, Toric set.

1. GİRİŞ

Bir torsal varyete, üzerinde $(\mathbb{C}^*)^n$ grubunun etkisi olan ve bir yoğun yörünge içeren, kompleks uzayda tanımlı bir cebirsel varyetedir. Bu varyeteler, cebirsel geometri ve afin reel uzaydaki dışbükey şekillerin geometrisi arasında güzel bir ilişki tanımlar.

V. Danilov'un 1978 yılında yayınlanan çalışmasından itibaren bu varyetelerin üzerinde değişik bakış açıları ile yapılan çalışmalar hız kazanmıştır. Bugün konuyu etraflıca anlamamıza yardımcı olan pekçok, makale, kitap, dersnotu bulabiliyoruz. Üç temel kaynak olarak Fulton (1997), Oda (1985) ve Kempf, vd. (1973) gösterilebilir. Bu çalışmalarda, n -boyutlu reel uzayda sonlu sayıda vektörle üretilmiş tam dışbükey rasyonel bir koniden başlayarak torsal varyete elde edilmesini ve bu varyetelerin geometrik özelliklerini öğreniyoruz.

Yukardaki tanımdan başka, torsal varyeteleri *üstel terim-üstel terim* şeklindeki polinomlarla üretilen ideallerin sıfır kümeleri şeklinde de tanımlayabiliriz (Sturmfels, 1997). Bu ideallerin özel yapılarından faydalanarak torsal varyetelerin matrislerle de ilişkili olduğunu keşfediyoruz (Sturmfels, 1997; Katsabekis ve Thoma, 2003). Bu tanımlama, torsal varyetelerin kombinatorial (combinatorial) yanını daha da geliştirmiş ve bu varyetelerin geometrisini anlamak için hesaplamalı (computational) algoritmalar oluşturulmasına katkıda bulunmuştur. Ayrıca, verilen bir torsal varyetenin pek çok geometrik özelliğini, bilgisayar programları Singular, Maple ve Macaulay ile de araştırabiliyoruz (bkz. [1], [2], [3]).

2. TEMEL TANIMLAR

2.1 Yarı-Grup

Bir $S \neq \emptyset$ kümesi alalım. Bu küme üzerinde tanımlı bir ikili işlemi $\star$ ile gösterelim. Eğer bu işlem

$$(i) \text{ her } a, b, c \in S \text{ için } (a \star b) \star c = a \star (b \star c),$$

özellikliğini sağlıyorsa S kümesine *yarı-grup* denir. Buna ek olarak, eğer

$$(ii) \text{ her } a \in S \text{ için } a \star e = e \star a = a \text{ olacak şekilde } S \text{ kümesinde bir } e \text{ birim elemanı vardır.}$$

$$(iii) \text{ her } a \in S \text{ için } a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e \text{ olacak şekilde } S \text{ kümesine ait bir } a^{-1} \text{ elemanı vardır.}$$

özelliklerini de sağlıyorsa S kümesine *grup* denir. Son olarak, eğer $\star$ işlemi

$$(iv) \text{ her } a, b \in S \text{ için } a \star b = b \star a \text{ dır.}$$

özellikliğini de sağlıyorsa S kümesine *değişmeli grup* denir.

2.2 Dışbükey Polihedral Koni

Kafes. $\mathbb{R}^n$ uzayının orijini içeren bir N altgrubunu gözönüne alalım. Eğer N toplamaya göre ayrık bir grup ise N 'e kafes denir.

N grubunun ayrık olması, her $x \in N$ noktasının $N \cap U = \{x\}$ olacak şekilde bir U komşuluğunun olduğu anlamına gelmektedir. $\mathbb{R}^n$ uzayında $v_1, \dots, v_n$ lineer bağımsız vektörleri ile üretilen kafes

$$\{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Örnek olarak $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ birer kafestir.

Biz $N \cong \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ kafesi üzerinde çalışacağız. Yani N , tabanı $\mp e_1, \dots, \mp e_n$ birim vektörleri olan bir vektör uzayıdır (Hoffman ve Kunze, 1971):

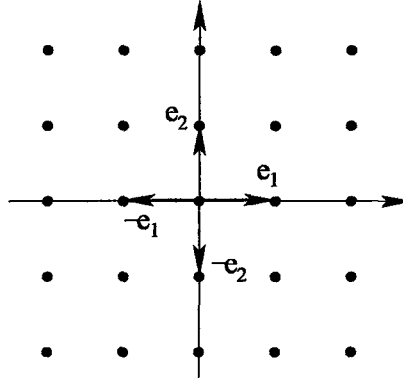
$$N = \mathbb{Z} \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \cdot e_n. \quad (2.2)$$

N üzerinde vektörlerden bahsedebilmemiz için

$$N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R} \cdot e_n \cong \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

reel vektör uzayına geçmemiz gerekir.

Örnek 2.1 $N \cong \mathbb{Z}^2$ kafesi Şekil 2.1'deki gibidir.



Şekil 2.1 $N \cong \mathbb{Z}^2$ kafesi.

Koni. Bir $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ altkümesini alalım. $\sigma \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Eğer, her $u \in \sigma$ ve $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot u \in \sigma$ ise σ altkümesine tepe noktası 0 olan *koni* denir. Bir koninin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası yine koniye ait ise *dışbükey koni* denir. Bir koninin dışbükey olması için gerek ve yeter koşul herhangi iki noktası u_1, u_2 için $\lambda \cdot u_1 + (1 - \lambda) \cdot u_2 \in \sigma$ olmasıdır. Burada $\lambda \in [0, 1]$ dir.

Sonlu sayıda vektörle üretilen dışbükey konilere *polihedral koni* denir. $N_{\mathbb{R}}$ uzayında tanımlı bir polihedral koni, sadece $N_{\mathbb{R}}$ uzayındaki vektörlerle üretilmiş ise *rasyonel polihedral koni* adını alır. Böyle bir koni şu şekilde tanımlanır:

$$\sigma = \langle u_1, \dots, u_n \rangle = \{u \in N_{\mathbb{R}} \mid u = \sum_{i=1}^n a_i u_i, a_i \geq 0\} \quad (2.4)$$

ve σ konisi, $u_1, \dots, u_n$ vektörleri ile üretilmiştir denir. Eğer σ , tepe noktasından geçen hiç bir doğru içermiyorsa, yani $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ ise, σ 'ya *tam dışbükey rasyonel polyhedral koni* denir. Çalışmamız boyunca “koni” sözcüğünü “tam dışbükey rasyonel polihedral koni” anlamında kullanacağız. Şekil 2.2 böyle bir koniyi gösterir.

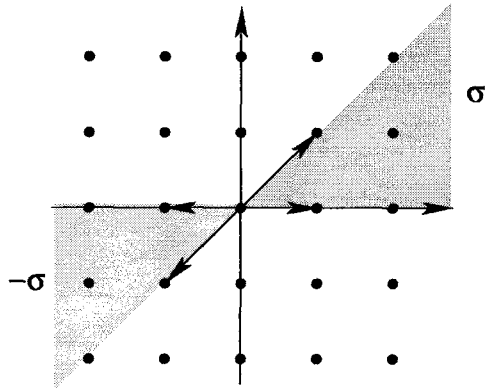
Not 2.2 Bir koninin boyutu kendisini kapsayan en küçük lineer uzayın boyutuna eşittir.

Dual Koni. Bir vektör uzayı olarak N uzayının duali $N^* = M$

$$M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z}) = \{v : N \rightarrow \mathbb{Z} \mid u \in N \text{ için } v(u) = (v, u)\} \quad (2.5)$$

ile tanımlanır. Eğer M dual uzayının $\mp e_1^*, \mp e_2^*, \dots, \mp e_n^*$ vektörleri ile üretildiğini varsayarsak

$$(e_i^*, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (2.6)$$



Şekil 2.2 $N \cong \mathbb{Z}^2$ kafesinde tam dışbükey rasyonel polihedral koni.

koşulu sağlanır. Burada $(\cdot, \cdot)$ skaler çarpımı ifade etmektedir.

M dual uzayına karşılık gelen reel vektör uzayı

$$M_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R} \cdot e_n \cong \mathbb{R}^n \quad (2.7)$$

üzerinde çalışacağız. Eğer, $u \in N_{\mathbb{R}}$ ve $v \in M_{\mathbb{R}}$ olmak üzere, $u = 2e_1 + e_2$ ve $v = 2e_1^* + e_2^*$ ise

$$(u, v) = (2e_1 + e_2) \cdot (2e_1^* + e_2^*) = 4(e_1, e_1^*) + (e_2, e_2^*) = 4 + 1 = 8.$$

Bir $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ konisinin dualini $\sigma^\vee$ ile göstereceğiz. $\sigma^\vee \subseteq M$ ve

$$\sigma^\vee = \{v \in M_{\mathbb{R}} \mid (u, v) \geq 0, \quad \forall u \in \sigma\} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.3 (Fulton, 1997) *Eğer σ bir rasyonel polihedral koni ise duali $\sigma^\vee$ de bir rasyonel polihedral konidir.*

Gerçekten de σ konisinin $u_i \in N_{\mathbb{R}}$ vektörleri ile üretildiğini kabul edersek $\sigma^\vee$ duali,

$$(u_i)^\vee = \{v \in M_{\mathbb{R}} \mid (u_i, v) \geq 0\} \text{ yarı-uzaylarının kesişimidir. Öyleyse } \sigma^\vee$$

$$(u_i, v_i) \geq 0 \quad (2.9)$$

lineer eşitsizlik sisteminin çözümü olan $v_i \in M_{\mathbb{R}}$ vektörleri ve bu vektörlerin tüm negatif olmayan lineer kombinasyonlarından oluşur. Dolayısıyla, $\sigma^\vee$ bir rasyonel polihedral konidir.

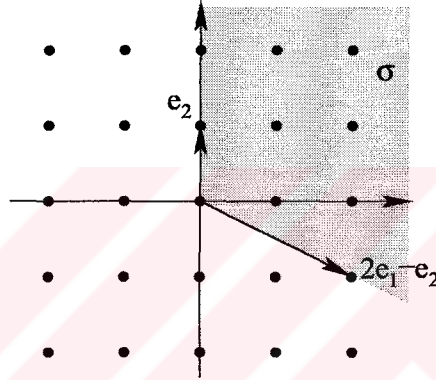
Buna karşılık, bir tam dışbükey rasyonel polihedral koninin duali her zaman bir tam rasyonel dışbükey polihedral koni değildir. Örnek olarak, σ konisini $\{0\}$ konisi olarak alırsak, dual koni tüm dual uzay olacaktır, yani $\sigma^\vee = M$ olacaktır. M dual uzayının tam dışbükey rasyonel polihedral olmadığı açıktır.

Önerme 2.4 Her $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ için $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ 'dır.

İspat. Bir $u \in (\sigma^\vee)^\vee$ vektörü alalım. Tanıma göre, her $v \in \sigma^\vee$ için $(u, v) \geq 0$ olur. Bu aynı zamanda $u \in \sigma$ olması demektir. O halde $(\sigma^\vee)^\vee \subseteq \sigma$ dir.

Bu kez $u \notin (\sigma^\vee)^\vee$ vektörünü alalım. Tanıma göre, $(u, v) < 0$ olacak şekilde en az bir $v \in \sigma^\vee$ vardır. O halde u vektörü σ konisinin bir elemanı değildir. Böylece $\sigma \subset (\sigma^\vee)^\vee$ olur. Dolayısıyla $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$ elde edilir. $\square$

Örnek 2.5 Diyelim ki $N \cong \mathbb{Z}^2$ ve $\sigma \in N_{\mathbb{R}}$ konisi $u_1 = 2e_1 - e_2$ ve $u_2 = e_2$ vektörleri ile üretilmiş bir koni olsun. Konimiz aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.3 $\sigma = \langle 2e_1 - e_2, e_2 \rangle \subset N_{\mathbb{R}}$ konisi.

$\sigma^\vee$ dual konisinin üreteçlerini bulalım: M dual uzayı, $\mp e_1^*, \mp e_2^*$ vektörleri ile üretildiğinden $\sigma^\vee$ konisinin üreteçleri, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $v_1 = ae_1^* + be_2^*$ ve $v_2 = ce_1^* + de_2^*$ olsun. Dual koni tanımından, $M_{\mathbb{R}}$ uzayında bulunan ve $N_{\mathbb{R}}$ uzayındaki bir vektöre dik, diğerleri ile skaler çarpımı ≥ 0 olan vektörleri arayacağız. Yani, $i = j$ için $(u_i, v_j) = 0$ ve $i \neq j$ için $(u_i, v_j) > 0$ olmalıdır, $i, j = 1, 2$. Böylece iki farklı denklem sistemi elde edilir:

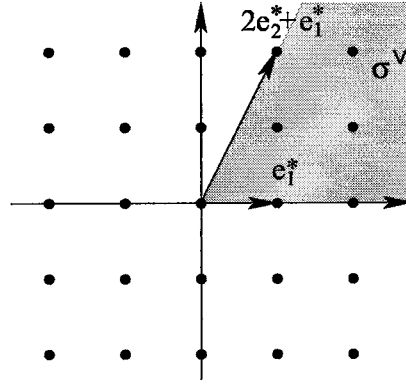
$$\begin{aligned} 2a - b &= 0 & 2c - d &> 0 \\ b &> 0 & d &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Buradan $v_1 = ae_1^* + 2ae_2^*$ ve $v_2 = ce_1^*$ çözümleri elde edilir. v_1 ve v_2 sırasıyla $e_1^* + 2e_2^*$ ve e_1^* ile üretildiğinden σ konisinin duali $\sigma^\vee = \langle e_1^*, e_1^* + 2e_2^* \rangle$ olur (Şekil 2.4).

Tanım 2.6 σ konisinin bir yüzü, $v \in \sigma^\vee$ için $\tau = \sigma \cap v^\perp$ kesişimi ile tanımlanır. Yani,

$$\tau = \{u \in \sigma \mid (u, v) = 0\} \tag{2.11}$$

şeklindedir ve $\tau \prec \sigma$ ile gösterilir.



Şekil 2.4 Dual koni $\sigma^\vee = \langle e_1^*, e_1^* + 2e_2^* \rangle$.

Koninin kendisi de bir yüz olarak kabul edilir. Kendisi dışındaki diğer tüm yüzleri *proper yüz* olarak adlandırılır. σ konisinin en küçük yüzü 0-boyutlu $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ tepe noktasıdır. 1-boyutlu yüzleri, yalnızca bir üreteç vektörü ile üretilir. 2-boyutlu yüzleri iki üreteç vektörü ile üretilen konilerdir, ...vb. Koninin $(n - 1)$ -boyutlu yüzlerine *facet* adı verilir.

Önerme 2.7 Eğer $\tau \not\preceq \sigma$ ise $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$ 'dir.

İspat. Eğer $v \in \sigma^\vee$ ise tanıma göre, her $u \in \sigma$ için $(u, v) \geq 0$ olacaktır. $\tau \prec \sigma$ olduğundan her $t \in \tau$ için de $(t, v) \geq 0$ sağlanır. O halde $v \in \tau^\vee$ 'dir. Böylece $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$ elde edilir. $\square$

Önerme 2.8 Bir dışbükey polihedral koninin yüzü de dışbükey polihedral konidir.

İspat. Bir $v \in \sigma^\vee$ için $\tau = \sigma \cap v^\perp$ olduğundan τ yüzü σ konisinin bir altkümesidir. Öyleyse, τ 'nın da dışbükey olduğu açıktır. Bildiğimiz gibi, σ konisinin $(v, u_i) = 0$ koşulunu sağlayan u_i üreteçleri τ yüzünü üretir. Bu şekilde tanımlı sonlu sayıda $u_i \in \sigma$ vardır. Dolayısıyla τ dışbükey polihedral konidir. $\square$

Önerme 2.9 Bir konide yüzlerin kesişimi de bir yüzdür.

İspat. σ 'nın herhangi s tane yüzünü gözönüne alalım. Bunlar, $v_i \in \sigma^\vee$ olmak üzere

$$\tau_i = \sigma \cap v_i^\perp$$

ile tanımlı olsun, $(i = 1, \dots, s)$. Bu yüzlerin kesişimine τ diyelim: $\tau = \tau_1 \cap \dots \cap \tau_s$. Eğer $\tau = \sigma \cap v^\perp$ olacak şekilde bir $v \in \sigma^\vee$ varsa τ , σ konisinin bir yüzüdür.

Bir $x \in \tau$ vektörü seçelim. O halde, her i için $x \in \tau_i = \sigma \cap v_i^\perp$ olur $(i = 1, \dots, s)$. Yani her i için $(x, v_i) = 0$ dır. Bu durumda

$$(x, v_1) + (x, v_2) + \dots + (x, v_s) = 0$$

elde ederiz. Bu da $v = v_1 + \cdots + v_s$ olmak üzere $(x, v) = 0$ demektir. O halde $\tau \subset \sigma \cap v^\perp$ olur.

Diğer yöndeki kapsamayı göstermek için $y \in \sigma \cap v^\perp$ olduğunu kabul edelim. O halde $(y, v) = (y, v_1) + \cdots + (y, v_s) = 0$ dır. $y \in \sigma$ ve her i için $v_i \in \sigma^\vee$ olduğuna göre bu ifade ancak $(y, v_i) = 0$ ise sağlanır. Bu durumda $y \in \tau_i$ ve de $y \in \tau$ olur. Böylece $\sigma \cap v^\perp \subset \tau$ elde ederiz. Dolayısıyla $\tau = \sigma \cap v^\perp$. $\square$

Önerme 2.10 (Fulton, 1997) Eğer $\tau \prec \sigma$ ise $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ kesişimi $\sigma^\vee$ nin bir yüzünü verir. Ayrıca $\text{boyut}(\tau) + \text{boyut}(\sigma^\vee \cap \tau^\perp) = n = \text{boyut}(M)$ sağlanır. Bu şekilde σ konisinin ve $\sigma^\vee$ konisinin yüzleri arasında yön-koruyan bire-bir eşleme elde edilir.



2.3 Afin Varyete

Tanım 2.11 Bir k cismi üzerinde tanımlı n -boyutlu afin uzay

$$\mathbb{A}^n(k) = k \times k \times \dots \times k = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in k, \forall i = 1, \dots, n\} \quad (2.12)$$

kümesi olarak tanımlanır.

Tanımda $k = \mathbb{R}$ ya da $k = \mathbb{C}$ olabilir. Biz, çalışmamız boyunca $k = \mathbb{C}$ alacağımız için $\mathbb{A}^n(k)$ yerine kısaca $\mathbb{A}^n$ yazılımını kullanacağız.

Sabitlerimiz $a_0, \dots, a_n \in k$ olmak üzere tüm

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \quad (2.13)$$

polinomlarının kümesine *tek değişkenli polinom halkası* denir ve $k[X]$ ile gösterilir. Daha genel olarak, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ olmak üzere $X = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ olarak oluşturulan (2.13) şeklindeki tüm polinomların kümesine *polinom halkası* denir ve $k[X_1, \dots, X_n]$ ile gösterilir. $k[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkası, birim elemanı $X_1^0 \dots X_n^0 = 1$ olan değişmeli bir halkadır (Dummit, 1991). Polinomlarla toplama ve çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \sum a_i X^i + \sum b_i X^i &= \sum (a_i + b_i) X^i \\ (\sum a_i X^i)(\sum b_i X^i) &= \sum c_i X^i \end{aligned} \quad (2.14)$$

Burada $c_i = a_i b_0 + a_{i-1} b_1 + \dots + a_0 b_i$ dir.

Tanım 2.12 Bir $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ polinomunun sıfırlarının kümesi

$$V(F) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid F(p) = 0\} \quad (2.15)$$

olarak tanımlanır.

Daha genel olarak, eğer $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$ bir polinomlar kümesi ise, S 'in sıfırlarının kümesi

$$V(S) = \bigcap_{F \in S} V(F) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid F(p) = 0, \forall F \in S\} \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.13 Bir $X \subset \mathbb{A}^n$ kümesini gözönüne alalım. Eğer $X = V(S)$ olacak şekilde bir $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$ polinomlar kümesi varsa X kümesine *afin cebirsel küme* denir.

Örnek olarak, $S = \{F_1 = X_1 + X_2^2, F_2 = X_1^2 + X_3\}$ ise $X = V(F_1, F_2) = V(F_1) \cap V(F_2)$ bir afin cebirsel kümedir.

Şimdi, $k[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkasının bir I altkümesini gözönüne alalım. Eğer

(i) her $f, g \in I$ için $f + g \in I$ ve

(ii) her $f \in I$ ve herhangi bir $r \in k[X_1, \dots, X_n]$ polinomu için $r \cdot f \in I$

ise I altkümesine $k[X_1, \dots, X_n]$ 'in bir *ideali* denir.

Önerme 2.14 Eğer $\{f_1, \dots, f_s\} \subset k[X_1, \dots, X_n]$ ve

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \{p_1 f_1 + \dots + p_s f_s \mid p_i \in k[X_1, \dots, X_n] \ i = 1, \dots, s\} \quad (2.17)$$

ise $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ kümesi $k[X_1, \dots, X_n]$ 'in bir idealidir.

İspat. $g_1, g_2 \in I$ ve $h \in k[X_1, \dots, X_n]$ olsun. $p_i, q_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ olmak üzere bu polinomlar $g_1 = p_1 \cdot f_1 + \dots + p_s \cdot f_s$ ve $g_2 = q_1 \cdot f_1 + \dots + q_s \cdot f_s$ olarak yazılabilir. Buradan

$$g_1 + g_2 = (p_1 + q_1) \cdot f_1 + \dots + (p_s + q_s) \cdot f_s \quad (2.18)$$

elde edilir. Her $i = 1, \dots, s$ için $p_i + q_i$ toplamı da $k[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkasına ait olduğundan $g_1 + g_2 \in I$ olur. Ayrıca $g_1 \cdot h$ çarpımı

$$g_1 \cdot h = h \cdot p_1 \cdot f_1 + \dots + h \cdot p_s \cdot f_s \quad (2.19)$$

şeklinde yazılır. Her i için $h \cdot p_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ olduğundan $g_1 \cdot h \in I$ dır. Dolayısıyla I , $k[X_1, \dots, X_n]$ halkasının bir idealidir. $\square$

Eğer J , bir R halkasının bir ideali ise J 'nin *radikali*

$$\sqrt{J} = \{x \in R \mid x^n \in J \text{ olacak şekilde bir } n \in \mathbb{N} \text{ vardır}\} \quad (2.20)$$

ile tanımlıdır. Açıkça görüleceği üzere, $\sqrt{J}$ bir idealdir ve eğer, $J = \sqrt{J}$ ise J 'ye *radikal ideal* denir.

Önerme 2.15 $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$ ve $J = \langle S \rangle \subset k[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkasında S ile üretilmiş bir ideal olsun. Öyleyse

$$V(S) = V(J) = V(\sqrt{J}) \quad \text{dir.} \quad (2.21)$$

Hilbert'in taban teoreminden (Sharp, 2000), $k[X_1, \dots, X_n]$ bir Noetherian halkadır. Böylece, her J ideali için, $V(J) = V(\{f_1, \dots, f_m\})$ olacak şekilde sonlu bir $\{f_1, \dots, f_m\} \subset k[X_1, \dots, X_n]$ polinom kümesi vardır.

Bundan başka, $k[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkasından farklı olan ve $k[X_1, \dots, X_n]$ 'deki daha büyük bir ideal tarafından içerilmeyen ideale *maksimal ideal* denir, yalnız ve yalnız M bir maksimal ideal ise, her $I \in k[X_1, \dots, X_n]$ için, $I \supseteq M$ iken $I = M$ ya da $I = k[X_1, \dots, X_n]$ olur.

$f \cdot g \in I$ iken $f \in I$ ya da $g \in I$ ise I idealine *asal ideal* denir (daha ayrıntılı bilgi için bkz. Dummit, (1991)).

Şimdi, cebirsel bir nesne olan $k[X_1, \dots, X_n]$ 'deki bir ideale afin uzayın bir altkümelerini karşılık getireceğiz.

Tanım 2.16 $X \subset \mathbb{A}^n$ olsun. X kümesinin ideali

$$\mathcal{I}(X) = \{F \in k[X_1, \dots, X_n] \mid F(x) = 0, \forall x \in X\} \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanır ve X üzerinde sıfırlanan ideal diye adlandırılır.

Tanım 2.17 Eğer $X \subset \mathbb{A}^n$ ise $\mathcal{I}(X)$ ideali $k[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkasında bir radikal idealdir.

Eğer $X \subset Y \subset \mathbb{A}^n$ ise bu kümelerin sıfırlanan idealleri arasında $\mathcal{I}(X) \supset \mathcal{I}(Y)$ ilişkisi vardır. Afin cebirsel kümeler ve karşılık gelen idealler hakkında daha ayrıntılı bilgi için Fulton (1969)'u önerebiliriz.

Eğer bir cebirsel küme $X \subset \mathbb{A}^n$, kendisinden ve boştan farklı iki cebirsel kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa X kümesine *indirgenemez küme* denir, yani $X = X'_1 \cup X'_2$ olması sadece $X'_1 = X$ ya da $X'_2 = X$ olması ile mümkündür. Aksi durumda, X kümesi indirgenebilir denir, bu durumda $X = X'_1 \cup X'_2$ olacak şekilde $X'_1 \neq \emptyset, X$ ve $X'_2 \neq \emptyset, X$ vardır.

Önerme 2.18 (Fulton, 1969) Bir $X \subset \mathbb{A}^n$ cebirsel kümesi yalnız ve yalnız $\mathcal{I}(X)$ asal ideal ise indirgenemezdir.

Tanım 2.19 İndirgenemez cebirsel kümeye afin cebirsel varyete denir.

Böylece afin uzay ile polinom halkası arasında şu şekilde bir eşleme elde edilir:

$$\begin{aligned} k[X_1, \dots, X_n] &\longleftrightarrow \mathbb{A}^n \\ I &\longrightarrow V(I) \\ \mathcal{I}(X) &\longleftarrow X \end{aligned} \quad (2.23)$$

Polinom halkasının asal idealleri ile afin uzayın indirgenemez cebirsel kümeleri arasında bire-bir bir eşleme vardır (Fulton, 1969). Bir $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ noktasına karşılık gelen maksimal ideal $M_a = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$ şeklindedir. Böylece, polinom halkasının maksimal idealleri ile afin uzayın noktaları arasında da bire-bir eşleme elde edilir.

Tanım 2.20 $X \subset \mathbb{A}^n$ bir cebirsel küme olsun. $X'_0, \dots, X'_n$ indirgenemez kümeler olmak üzere $X'_0 \subsetneq X'_1 \subsetneq \dots \subsetneq X'_n \subsetneq X$ zinciri ile tanımlı maksimum $n \in \mathbb{N}$ sayısına X kümesinin boyutu denir ve $\text{boyut}(X)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.21 R bir değişmeli halka ve $P_0, \dots, P_n$, R halkasında asal idealler olmak üzere

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_n \quad (2.24)$$

ise R 'deki P_i asal idealleri zinciri n uzunluğundadır denir. R halkasının Krull boyutu

$$\text{Krull.boyut}(R) = \sup\{n \in \mathbb{N}\} \quad (2.25)$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.22 Eğer $X \subset \mathbb{A}^n$ ise

$$\text{boyut}(X) = \text{Krull.boyut}(k[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(X)) \quad (2.26)$$

şeklindedir.

Teorem 2.23 k bir cisim ve B bir tamlık bölgesi olsun. Eğer B sonlu üretilmiş bir k -cebrî ise herhangi bir p asal ideali için

$$\text{yükseklik } p + \text{boyut}(B/p) = \text{boyut}(B) \quad (2.27)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. bkz. Hartshorne (1977) ya da Sharp (2000).

Koordinat halkası. $k[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkası, $\mathbb{A}^n$ üzerinde tanımlı ve $X_1, \dots, X_n$ ile üretilen tüm polinomları içerdiği için, $k[X_1, \dots, X_n]$ 'e $\mathbb{A}^n$ afin uzayının koordinat halkası da denir (Kendig, 1984). Herhangi bir afin varyetenin koordinat halkası şöyle tanımlanır:

Tanım 2.24 $X \subset \mathbb{A}^n$ olsun. X kümesinin koordinat halkası

$$A(X) = k[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(X) \quad (2.28)$$

olarak tanımlanır.

Örnek olarak, $X_2 \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ için $X = V(X_2)$ kümesi $\mathbb{C}^2$ uzayının X_1 eksenidir. Buradan $\mathcal{I} = \langle X_2 \rangle$ ve

$$A(X) = \mathbb{C}[X_1, X_2]/\langle X_2 \rangle \cong \mathbb{C}[X_1]$$

olur.

Önerme 2.22, $k[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(X)$ koordinat halkasının afin cebirsel küme üzerinde çalışırken önemli olduğunu gösteriyor.

Tanım 2.25 $f : X \rightarrow k$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer, her $p \in X$ için, $f(p) = F(p)$ olacak şekilde bir $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ varsa f fonksiyonuna polinom fonksiyonu denir.

Böylece, her $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ polinomu X üzerinde bir polinom fonksiyonu tanımlar. Verilen herhangi iki F, G polinomları yalnız ve yalnız her $p \in X$ için $F(p) - G(p) = 0$ ise X üzerinde aynı fonksiyonu tanımlar. Bu da, yalnız ve yalnız $F - G \in \mathcal{I}(X)$ olduğu anlamına gelir. Böylece, X üzerindeki polinom fonksiyonları halkası ile koordinat halkası arasında doğal bir izomorfizma elde etmiş oluyoruz.

Halka olma özelliği yanında, $A(X)$ aynı zamanda bir k -cebri yapısına sahiptir. Bir k -cebri, çarpma ikili işlemi ile birlikte bir k -vektör uzayıdır, (çarpma işleminin dağılma özelliği vardır ve $t \in K, a, b \in M$ için $(ta)b = t(ab) = a(tb)$ 'dir. Burada M vektör uzayını gösteriyor). Bizim için $M = (A(X), +)$ 'dir. Ayrıca, k -cebirlerinin bir homomorfizması bir doğrusal dönüşümdür, yani $\phi(kab) = k\phi(ab) = k\phi(a)\phi(b)$.

Tanım 2.26 $X \subset \mathbb{A}^n$ ve $Y \subset \mathbb{A}^m$ olsun. Eğer $T_1, \dots, T_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ polinomları, her $p \in X$ için $\phi(p) = (T_1(p), \dots, T_m(p))$ olacak şekilde $\phi : X \rightarrow Y$ varsa ϕ fonksiyonuna polinom tasviri denir.

Örnek olarak, $X = V(X_2) \subset \mathbb{C}^2$ ve $Y = V(X_2 - X_1^2) \subset \mathbb{C}^2$ ise $(a, 0) \mapsto (a, a^2)$ şeklinde tanımlı $\phi : X \rightarrow Y$ fonksiyonu polinom tasviridir ($T_1 = X_1$ ve $T_2 = X_1^2$ dir).

Her $\phi : X \rightarrow Y$ polinom tasviri, her $g \in A(Y)$ için, $\tilde{\phi}(g) = g \circ \phi$ şeklinde tanımlı k -cebirlerinin bir $\tilde{\phi} : A(Y) \rightarrow A(X)$ homomorfizmasına indirgenir.

Tanım 2.27 Eğer $\phi \circ \psi = id_Y$ ve $\psi \circ \phi = id_X$ olacak şekilde bir $\psi : Y \rightarrow X$ polinom tasviri varsa $\phi : X \rightarrow Y$ polinom tasvirine bir izomorfizma denir.

Önerme 2.28 (Fulton, 1969) $X \subset \mathbb{A}^n$ ve $Y \subset \mathbb{A}^m$ olsun. $\phi : X \rightarrow Y$ polinom tasvirlerinin kümesi ile k -cebirlerinin $\tilde{\phi} : A(Y) \rightarrow A(X)$ homomorfizmalarının kümesi arasında bire-bir eşleme vardır.

Tanım 2.29 $X \subset \mathbb{A}^n$ ve $f \in A(X)$ olsun. f ile tanımlanan

$$D(f) = X - V(f) \tag{2.29}$$

kümesine X varyetesinin bir temel açık altkümesi denir.

Diğer bir deyişle X varyetesinin temel açık altkümeleri

$$D(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \tag{2.30}$$

şeklindedir ve $D(f)$ kümesi bir afin varyetedir.

Örnek olarak, $X = V(X_2 - X_1^2)$ varyetesini gözönüne alalım. Öyleyse $A(X) = \mathbb{C}[X_1, X_2]/\langle X_2 - X_1^2 \rangle$ olur. O halde X varyetesinin $f = X_2 \in A(X)$ ile tanımlanan açık altkümesi

$$\begin{aligned} D(f) &= V(X_2 - X_1^2) - V(X_2) \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid a^2 = b, b \neq 0\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Spektrum. Afin uzay ile polinom halkası arasındaki eşlemeler halka üzerinde spektrum kavramını tanımlamamızı sağlar. Bir afin varyetenin altkümeleri, asal ideallerle ve maksimal ideallerle tanımlananlar olmak üzere ikiye ayrılabilir. Bu altkümelerden yola çıkarak varyetenin kendisine ulaşmak istediğimizde bu idealler üzerinde çalışmamız gerekir. Bu amaçla bir halkanın spektrumu tanımlanır:

R , birimli ve değişmeli bir halka olsun. R halkasının tüm asal ideallerinin kümesine R nin *spektrumu* denir ve $\text{Spek}(R)$ ile gösterilir (Shafarevich, 1997). R halkasındaki maksimal idealler $\text{Spek}(R)$ 'nin noktalarına, asal idealleri de altvaryetelerine karşılık gelir.

Örnek 2.30 $\mathbb{Z}$ nin asal idealleri asal sayılardır. Dolayısıyla $\text{Spek}(\mathbb{Z}) = \{0, 2, 3, 5, 7, \dots\}$ dir (Shafarevich, 1997).

Örnek 2.31 k cebirsel kapalı bir cisim olsun. Bu durumda tek değişkenli $k[X]$ polinom halkasındaki asal idealler, maksimal idealler olup bir $a \in k$ için $\langle X - a \rangle$ şeklindedir. Bu maksimal idealler, k cisminin noktalarına karşılık geldiğinden $\text{Spek}(k[X]) = k$ olur (Mumford, 1999).

Örnek 2.32 k cebirsel kapalı bir cisim olsun. $k[X, Y]$ polinom halkasına gözönüne alalım. Biliyoruz ki $a, b \in k$ olmak üzere, $\langle X - a, Y - b \rangle$ idealleri $k[X, Y]$ nin maksimal ideal-leridir. Ayrıca, $f(X, Y) \in k[X, Y]$ indirgenemez polinomuyla üretilen $\langle f(X, Y) \rangle$ ideal-leri ve $\langle 0 \rangle$ ideali asal ideallerdir. Yani, maksimal idealler $\mathbb{A}^2$ de noktalara, asal idealler de indirgenemez eğrilere karşılık gelir. Öyleyse $\text{Spek}(k[X, Y]) = \mathbb{A}^2$ dir (Mumford, 1999).

Genel olarak, $\text{Spek}(k[X_1, \dots, X_n]) = \mathbb{A}^n$ olur. Bir afin varyetenin koordinat halkasının spektrumu varyetenin kendisi ile hemen hemen aynıdır. Yani, $\text{Spek}(A(X))$, $X = V(I)$ varyetesi olarak görülebilir (daha ayrıntılı bilgi için bkz. Mumford (1999)).

2.4 Projektif Varyete

V herhangi bir k cismi üzerinde bir vektör uzayı ise V 'nin tanımladığı $\mathbb{P}(V)$ projektif uzayı, V 'nin 1-boyutlu altuzaylarının kümesi olur. $k = \mathbb{C}$ ve $V = \mathbb{C}^{n+1}$ için kısaca $\mathbb{P}^n$ yazılımını kullanacağız.

Tanım 2.33 $\mathbb{P}^n$ projektif uzayı, $\mathbb{C}^{n+1}$ uzayında orijinden geçen doğrulardan oluşur.

Herhangi bir $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ noktası bir tek doğru belirler. $\mathbb{P}^n$ projektif uzayı, $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ afin uzayındaki noktaların bir denklik sınıfı ile özdeşleştirilir: Eğer, $a = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ ve $b = (x'_0, \dots, x'_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ için $b = \lambda \cdot a$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ varsa a ve b noktaları denktir ve $a \sim b$ şeklinde gösterilir. $\mathbb{C}^{n+1}$ uzayında sıfırdan farklı herhangi bir $(x_0, \dots, x_n)$ vektörü bir $[x] \in \mathbb{P}^n$ noktasını temsil eder. $(x_0, \dots, x_n)$ vektörüne x noktasının *homojen koordinatları* denir ve $[x] = (x_0 : \dots : x_n)$ şeklinde yazılır. Böylece

Tanım 2.34 n -boyutlu projektif uzay

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) / \sim = \{[x] = (x_0 : \dots : x_n) \mid [x] \neq 0\} \quad (2.31)$$

kümesidir.

$\mathbb{P}^n$ projektif uzayının $U_0, \dots, U_n$ açık altkümeleri

$$U_j = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_j \neq 0\} \quad (2.32)$$

şeklindedir. Böylece, her j için, $\phi_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ izomorfizması elde edilir:

$$(x_0 : \dots : \hat{x}_j : \dots : x_n) \xrightarrow{\phi_j} \left(\frac{x_1}{\hat{x}_j}, \dots, \frac{x_n}{\hat{x}_j} \right) \quad (2.33)$$

Eğer $\beta_j = \phi_j^{-1}$ alırsak $\beta_j : \mathbb{C}^n \rightarrow U_j$ tasviri

$$(y_1, \dots, y_n) \xrightarrow{\beta_j} (y_1 : \dots : 1 : \dots : y_n) \quad (2.34)$$

kuralı ile tanımlıdır. Yukardaki $(y_1, \dots, y_n)$ koordinatlarına U_j üzerinde *homojen olmayan koordinatlar* denir.

Tanım 2.35 Eğer $d \in \mathbb{N}$ sayısı için

$$F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n)$$

eşitliğini sağlayan bir $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ varsa $F \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ polinomuna d . dereceden *homojen polinom* denir.

$\mathbb{P}^n$ projektif uzayında, $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ polinom halkasındaki homojen polinomlarla çalışılır. $F \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ d. dereceden homojen polinom olsun. Afin varyetelerde olduğu gibi, $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ noktasına $F(a)$ değerini karşılık getirerek $\mathbb{C}^{n+1}$ üzerinde $\mathbb{C}$ -değerli bir fonksiyon elde ederiz. Eğer, $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ olacak şekilde $b = \lambda \cdot a$ ise $F(\lambda \cdot a) = \lambda^d F(a)$ elde ederiz. Yani, a noktası F için bir sıfır ise herhangi bir $\lambda \cdot a$ noktası da F için bir sıfır noktası olacaktır.

Tanım 2.36 *Bir homojen polinomun sıfır kümesi*

$$V(F) = \{[x] \in \mathbb{P}^n \mid F(x) = 0\} \quad (2.35)$$

şeklindedir.

Daha genel olarak, her i için, $F_i \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ olacak şekilde $S = \{F_1, \dots, F_s\}$ polinom kümesinin sıfır kümesi

$$V(F) = \{[x] \in \mathbb{P}^n \mid F_1(x) = \dots = F_s(x) = 0\} \quad (2.36)$$

dir. Her F polinomu için, $V(F)$ kümesi kapalı ve bu kümenin $\mathbb{P}^n - V(F)$ tümleyeni açık bir kümedir. Kompleks sayılar cismi üzerinde çalıştığımız için, Zariski topolojisine göre kapalı (benzer şekilde, açık) kümeler olağan topolojiye göre de kapalıdır (benzer şekilde, açıktır) (Fulton, 1969).

Tanım 2.37 $Y \subset \mathbb{P}^n$ olsun. Eğer $Y = V(F)$ olacak şekilde bir $F \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ homojen polinomu varsa Y kümesine projektif cebirsel küme denir.

Örnek olarak $F = \{F_1 = X_0^2 + X_1 X_2, F_2 = X_0 X_2^2 - X_1^3\}$ ise $Y = V(F_1, F_2) = V(F_1) \cap V(F_2)$ bir projektif cebirsel kümedir.

Yine afin varyetelerde olduğu gibi, eğer bir $Y \subset \mathbb{P}^n$ projektif cebirsel küme, kendisinden farklı boş olmayan iki projektif cebirsel kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa Y kümesine indirgenemez projektif cebirsel küme denir.

Tanım 2.38 $\mathbb{P}^n$ projektif uzayında indirgenemez bir cebirsel kümeye projektif cebirsel varyete ya da kısaca projektif varyete denir.

Tanım 2.39 Bir $Y \subset \mathbb{P}^n$ projektif varyetenin boyutu, $\text{boyut}(Y)$,

$$\emptyset \subsetneq Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n = Y \quad (2.37)$$

indirgenemez altvaryetelerinin maksimal uzunluğu olarak tanımlanır.

Yani 0-boyutlu altvaryeteler noktalar, 1-boyutlu altvaryeteler eğrilerdir,... vs.

Şimdi, $Y = V(F_1, \dots, F_s)$ bir projektif varyete olsun. $F_1, \dots, F_s$ polinomları ile üretilmiş

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^s g_i F_i \mid g_i \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n], i = 1, \dots, s \right\} \quad (2.38)$$

idealini gözönüne alalım. Açıkça görüleceği üzere, $Y = V(I)$ 'dir. Homojen polinomlarla üretilmiş ideale *homojen ideal* denir ve projektif varyeteler, homojen ideallerin sıfır kümeleri olarak tanımlanır. Bunun tersi de her zaman doğrudur: Doğal olarak,

$$V(I) = \{[x] \in \mathbb{P}^n \mid F(x) = 0, \forall F \in I\} \quad (2.39)$$

kümesi, F polinomları homojen olduğundan, $\mathbb{P}^n$ uzayının bir altkümesidir.

Tanım 2.40 Bir $Y = V(I) \subset \mathbb{P}^n$ bir projektif varyetenin ideali

$$\mathcal{I}(Y) = \{F \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n] \mid F(x) = 0, \forall x \in Y\} \quad (2.40)$$

ile tanımlıdır.

$\mathcal{I}(Y)$ ideali homojendir ve Y 'yi tanımlayan bütün I ideallerini içerir. Burada, iki farklı idealin aynı varyeteyi tanımlayabileceğine dikkat edelim. Örnek olarak $I = \langle X_0 \rangle$ olacak şekilde $Y = V(I)$ ve $I' = \langle X_0^2 \rangle$ olacak şekilde $Z = V(I')$ ise $I' \subset I$ dir ve $V(I) = V(I')$ dir. Başka bir deyişle, verilen bir varyeteyi tanımlayan “en geniş” ideal $\mathcal{I}(Y)$ idealidir.

Bundan başka, eğer I homojen bir ideal ise $\sqrt{I}$ ideali de homojendir ve $V(I) \neq \emptyset$ dir ve

$$\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I} \quad (2.41)$$

dir (Fulton, 1969). Eğer $V(I) = \emptyset$ ise $\mathcal{I}(V(I)) = \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ ve $\mathcal{I}(V(I)) = \langle X_0, \dots, X_n \rangle$ idealleri bulunur. Çünkü, $\mathcal{I}(V(I)) = \langle X_0, \dots, X_n \rangle$ idealinin tek sıfırı 0 dir ama o da projektif uzayın elemanı değildir.

Teorem 2.41 (Shafarevich, 1997) $I = \langle F_1, \dots, F_s \rangle$ homojen ideal olmak üzere

$Y = V(I) \subset \mathbb{P}^n$ projektif varyetesinin boyutunu r ile gösterirsek

$$r \geq n - s \quad (2.42)$$

dir.

Projektif varyeteler hakkında daha geniş bilgi için Hartshorne (1977), Mumford (1999),...vs. görülebilir.

3. AFİN TORSAL VARYETE

3.1 Afın Torsal Varyetenin Oluşturulması ve Örnekler

Daha önce tanımladığımız $N_{\mathbb{R}}$ kafesini ve bu uzayda içerilen bir σ konisini gözönüne alalım. Bu bölümde, σ konisine karşılık gelen afın varyeteyi oluşturacağız. Bu oluşumu, üç adımda verebiliriz:

(a) S_{σ} yarı-grubunun oluşturulması.

Önerme 3.1 (*Oda, 1985*) *Aşağıdaki küme bir yarı-gruptur:*

$$S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M = \{v \in M \mid \forall u \in \sigma \text{ için } (u, v) \geq 0\} \quad (3.1)$$

İspat. $\sigma^{\vee}$ dual konisi $M_{\mathbb{R}}$ kafesinde tanımlı olduğundan S_{σ} yarı-grubunda işlem toplamadır. Tanıma göre, her $v_1, v_2, v_3 \in S_{\sigma}$ için $v_1 + v_2 \in S_{\sigma}$ ve de $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ tür. $\square$

Teorem 3.2 (*Gordan Lemması*) (*Fulton, 1997*) *Eğer σ tam rasyonel dışbükey polihedral koni ise S_{σ} sonlu üretilmiştir.*

İspat. $\sigma^{\vee}$ sonlu sayıda vektör ile üretilmiştir. $\sigma^{\vee}$ dual konisinin $v_1, \dots, v_s \in M_{\mathbb{R}}$ vektörleri ile üretildiğini kabul edelim ve

$$K = \{t_1 v_1 + \dots + t_s v_s \mid 0 \leq t_i \leq 1\}$$

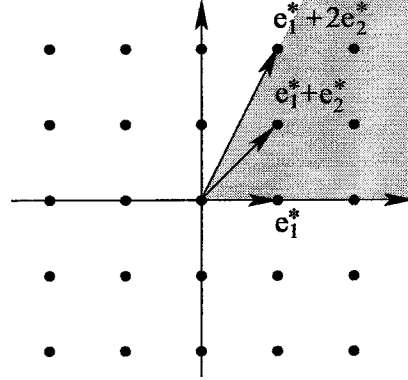
kümesini alalım. K kapalı ve M ayrık olduğundan $K \cap M$ sonlu sayıda eleman içerir. Eğer $v \in S_{\sigma}$ ise, her i için, $a_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ olmak üzere $v = a_1 v_1 + \dots + a_s v_s$ yazılsın. $[a_i]$, a_i katsayısının tam kısmını göstermek üzere, $a_i = [a_i] + t_i$ yazarsak $v = \sum [a_i] v_i + \sum t_i v_i$ olur. Öyleyse S_{σ} , v_i 'ler ve $K \cap M$ ile üretilir. $\square$

Not 3.3 *Eğer $\sigma = \{0\}$ ise $S_{\{0\}} = M$ dir. Daha genel olarak, herhangi bir koni $\sigma' \subset N_{\mathbb{R}}$ için $S_{\sigma'} \subset S_{\{0\}}$ dir.*

Örnek 3.4 *Eğer $\sigma = \langle 2e_1 - e_2, e_2 \rangle \subset N_{\mathbb{R}}$ ise S_{σ} yarı-grubunu bulalım:*

Örnek 2.5'te, σ konisinin dualinin $v_1 = e_1^*$ ve $v_2 = e_1^* + 2e_2^*$ vektörleri ile üretildiğini bulduk. S_{σ} yarı-grubu, $\sigma^{\vee}$ nin taradığı bölgedeki vektörlerin tüm tamsayı katlarını içerir. Eğer S_{σ} yarı-grubunun her elemanı, katsayıları $\mathbb{Z}$ de olacak şekilde v_1 ve v_2 vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabiliyorsa $S_{\sigma} = \langle v_1, v_2 \rangle$ diyeceğiz. Ama, $w = e_1^* + e_2^*$ vektörünü, ancak $w = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ şeklinde yazabildiğimiz için ve w deki vektörlerin katsayıları rasyonel olduğu için, w vektörünü de S_{σ} yarı-grubunun bir üretici olarak almalıyız.

Dolayısıyla $S_\sigma = \langle e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^* \rangle$ olur. Yani, S_σ aşağıdaki şekilde verilen taralı bölgedir. $\square$



Şekil 3.1 $S_\sigma = \langle e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^* \rangle$ yarı-grubu.

(b) $\mathbb{C}[S_\sigma]$ 'nin oluşturulması.

Bir *Laurent polinomu*, yalnızca sonlu sayıda $a_i \in \mathbb{C}$ sıfırdan farklı olmak üzere

$$\dots + a_{-n}t^{-n} + a_{-n+1}t^{-n+1} + \dots + a_{-1}t^{-1} + a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n + \dots \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Tüm Laurent polinomlarının kümesi $k[t, t^{-1}]$ ile gösterilir. Eğer $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_n^{\alpha_n}$, ($\alpha_i \in \mathbb{Z}$), ise n değişkenli Laurent polinomlarının halkası $k[t_1, \dots, t_n, t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}]$ i elde ederiz. Şimdi

$$\theta : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n, t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}] \quad (3.3)$$

tasvirini gözönüne alalım. Tasvirimiz

$$a = (a_1, \dots, a_n) \xrightarrow{\theta} t^a = t_1^{a_1} \dots t_n^{a_n} \quad (3.4)$$

olarak tanımlı bir izomorfizmadır.

Şimdi, M dual uzayının $\mp e_1^*, \dots, \mp e_n^*$ ile üretildiğini hatırlayalım. Dual uzayın her bir elemanını

$$\begin{aligned} \chi^{e_i^*} &= X_i \\ \chi^{-e_i^*} &= X_i^{-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

şeklinde X_i lere karşılık getirelim. Böylece,

$$\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}] \quad (3.6)$$

olacak şekilde bir $\chi : M \rightarrow \mathbb{C}[M]$ tasviri tanımlanmış olur.

Not 3.5 Eğer $\sigma = \{0\}$ ise $S_{\{0\}} = M$ ve $\mathbb{C}[S_{\{0\}}] = \mathbb{C}[M]$ dir.

Benzer şekilde, S_σ yarı-grubuna karşılık gelen Laurent polinomlarının halkasını da χ tasviri ile elde edebiliriz. Bu durumda, S_σ yarı-grubunun her v üreteğine $\mathbb{C}[S_\sigma]$ halkasında bir χ^v üreteci karşılık gelir. S_σ sonlu üretildiğinden (bkz. Teorem 3.2) $\mathbb{C}[S_\sigma]$ 'nin da sonlu sayıda üreteci vardır. Her $v, v' \in S_\sigma$ için

$$\chi^v \cdot \chi^{v'} = \chi^{v+v'} \quad (3.7)$$

dir ve birim eleman, $0 \in S_\sigma$ a karşılık gelen $\chi^0 = 1$ sabit polinomudur. Böylece $\mathbb{C}[S_\sigma]$

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \left\{ \sum a_v \chi^v \mid v \in S_\sigma \right\} \quad (3.8)$$

ile tanımlanır.

Not 3.6 Her $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ için $S_\sigma \subset M_{\mathbb{R}}$ olduğundan $\mathbb{C}[S_\sigma] \subset \mathbb{C}[M]$ dir.

Örnek 3.7 Örnek 3.4'de bulduğumuz $v_1 = e_1^*$, $v_2 = e_1^* + e_2^*$ ve $v_3 = e_1^* + 2e_2^*$ ile üretilen S_σ yarı-grubunu gözönüne alalım. Bu durumda $\mathbb{C}[S_\sigma]$ 'nin üreteçleri $\chi^{e_1^*} = X_1$, $\chi^{e_1^*+e_2^*} = X_1X_2$ ve $\chi^{e_1^*+2e_2^*} = X_1X_2^2$ dir. Yani $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1, X_1X_2, X_1X_2^2]$ dir.

(c) Afin Torsal varyetenin oluşturulması.

S_σ yarı-grubu $v_1, \dots, v_m$ ile üretilsin. $\mathbb{C}[S_\sigma]$ sonlu üretildiği için $\mathbb{C}[S_\sigma]$ ile $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_m]$ arasında $\chi^{v_i} = Z_i$ değişken dönüşümünü kullanarak $\gamma : \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_m] \rightarrow \mathbb{C}[S_\sigma]$ tasvirini tanımlayalım. γ tasvirinin çekirdeği $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_m]$ polinom halkasının bir idealidir (Dummit, 1991). Bu ideali I ile gösterirsek

$$\mathbb{C}[S_\sigma] \cong \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_m]/I \quad (3.9)$$

olur. Açıkça görüldüğü gibi, γ tasviri, χ ve dolayısıyla θ izomorfizması ile özdeştir. O halde I ideali, θ izomorfizmasının da çekirdeğidir. Bu, I idealinin S_σ yarı-grubunun üreteçleri arasındaki bağıntılarla tanımlı olması demektir. $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ olmak üzere bu bağıntılar

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m \quad (3.10)$$

şeklindedir ve $\mathbb{C}[S_\sigma]$ halkasında

$$(\chi^{v_1})^{\alpha_1} \dots (\chi^{v_m})^{\alpha_m} = (\chi^{v_1})^{\beta_1} \dots (\chi^{v_m})^{\beta_m} \quad (3.11)$$

bağıntılarına karşılık gelir. Böylece $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_m]$ halkasında

$$Z_1^{\alpha_1} \dots Z_m^{\alpha_m} = Z_1^{\beta_1} \dots Z_m^{\beta_m} \quad (3.12)$$

bağıntıları elde edilir.

Tanım 3.8 İki üstel terimin farkına binomial denir. Sadece binomialler ile üretilen bir ideale binomial ideal denir.

Önerme 3.9 (Oda, 1985) Yukarda tanımlanan I ideali sonlu sayıdaki

$$Z_1^{\alpha_1} \dots Z_m^{\alpha_m} - Z_1^{\beta_1} \dots Z_m^{\beta_m} \quad (3.13)$$

binomialleriyle üretilir.

Her $i = 1, \dots, k$ için, $f_i = Z_1^{\alpha_{1i}} \dots Z_m^{\alpha_{mi}} - Z_1^{\beta_{1i}} \dots Z_m^{\beta_{mi}}$ asal polinom olduğundan I ideali için en uzun

$$\langle 0 \rangle \subset \langle f_1 \rangle \subset \langle f_1, f_2 \rangle \subset \dots \subset \langle f_1, f_2, \dots, f_{m-n} \rangle = I \quad (3.14)$$

şeklinde bir altküme zinciri tanımlanabilir. Teorem 2.23'i kullanarak, I idealinin $m - n$ tane üretici olduğu sonucuna ulaşırız.

Şimdi $\mathbb{C}[S_\sigma]$ polinom halkasından spektrum kavramına geçelim. Daha önce belirttiğimiz gibi, $\mathbb{C}[S_\sigma]$ sonlu bir $\mathbb{C}$ -cebri olduğundan, spektrumunu alırsak bir afin varyete elde ederiz.

Tanım 3.10 Bir $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ konisine karşılık gelen afin torsal varyete $U_\sigma \cong \text{Spek}(\mathbb{C}[S_\sigma])$ dır.

Teorem 3.11 (Ewald, 1996) Eğer $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ ve $I = \langle f_1, \dots, f_{m-n} \rangle$ ise $U_\sigma, \mathbb{C}^k$ uzayında $V(I)$ afin varyetesidir.

Not 3.12 Eğer $\sigma = \{0\} \subset N_{\mathbb{R}}$ ise $\mathbb{C}[S_{\{0\}}] = \mathbb{C}[M]$ ve dolayısıyla, $\text{Spek}(\mathbb{C}[M]) = (\mathbb{C}^*)^n$ dir, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Daha genel olarak, eğer $\tau \prec \sigma$ ise $S_\sigma \subset S_\tau$ ve $\mathbb{C}[S_\sigma] \subset \mathbb{C}[S_\tau]$ olur.

Bundan başka,

Önerme 3.13 (Fulton, 1997) Eğer $\tau, \sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ konisinin bir yüzü ise $U_\tau \rightarrow U_\sigma$ tasviri U_τ afin torsal varyetesini U_σ içine temel açık altküme olarak gömer.

İspat. $\tau \prec \sigma$ olduğundan bir $\lambda \in \sigma^\vee$ için $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ şeklinde yazılır. Buradan

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda)$$

elde edilir (Sonuç 4.3). Yani, her $w \in S_\tau$ elemanı bir $v \in S_\sigma$ ile $w = v - \lambda p$, ($p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), şeklinde yazılabilir. Öyleyse

$$\chi^w = \frac{\chi^v}{(\chi^\lambda)^p} \quad (3.15)$$

olur. Böylece, $\mathbb{C}[S_\tau]$ halkasındaki polinomlar $\chi^\lambda \neq 0$ ile tanımlı olduğu için U_τ, U_σ üzerinde $\chi^\lambda \neq 0$ ile tanımlanan noktalara karşılık gelir (Oda, 1985). Bu

$$U_\tau = \{u \in U_\sigma \mid \chi^\lambda \neq 0\} \subset U_\sigma \quad (3.16)$$

açık altkümelerini verir. $\square$

Eğer $\phi : N' \rightarrow N$ bir kafes homomorfizması ise ve $\phi_{\mathbb{R}}$ tasviri $N'_{\mathbb{R}}$ kafesindeki bir σ' konisini $N_{\mathbb{R}}$ kafesindeki bir $\sigma_{\mathbb{R}}$ konisine tasvir ediyor ise $\phi_{\mathbb{R}}^\vee : M_{\mathbb{R}} \rightarrow M'_{\mathbb{R}}$ dual tasviri S_σ yarı-grubunu $S_{\sigma'}$ yarı-grubuna tasvir eder; böylece $U_{\sigma'} \rightarrow U_\sigma$ tasviri tanımlanır.

Örnek 3.14 Eğer $\sigma = \{0\} \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ ise $U_\sigma = (\mathbb{C}^*)^2$ 'dir.

Çözüm. $M_{\mathbb{R}}$ 'deki her vektörün 0 ile skaler çarpımı yine sıfır olduğundan $\sigma^\vee = M_{\mathbb{R}}$ olacaktır. O halde $S_\sigma, \mp e_1^*$ ve $\mp e_2^*$ ile üretilen bir yarı-gruptur. (3.5) tanımı ile

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[\chi^{e_1^*}, \chi^{e_2^*}, \chi^{-e_1^*}, \chi^{-e_2^*}] = \mathbb{C}[X_1, X_2, X_1^{-1}, X_2^{-1}]$$

elde edilir. X_1, X_2, X_1^{-1} ve X_2^{-1} değişkenlerini sırasıyla Z_1, Z_2, Z_3 ve Z_4 ile gösterelim. Bu durumda $\mathbb{C}[S_\sigma]$ halkasına izomorf koordinat halkası

$$\mathbb{C}[S_\sigma] \cong \mathbb{C}[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4]/I$$

şeklinde tanımlıdır. I ideali, $Z_1 Z_3 = 1$ ve $Z_2 Z_4 = 1$ bağıntıları ile üretilen idealdir ve

$$\mathbb{C}[S_\sigma] \cong \mathbb{C}[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] / \langle Z_1 Z_3 - 1, Z_2 Z_4 - 1 \rangle$$

elde edilir. Buradan $U_\sigma = \text{Spek}(\mathbb{C}[S_\sigma]) \cong V(Z_1 Z_3 - 1, Z_2 Z_4 - 1)$ olur. Başka bir deyişle

$$U_\sigma = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{C}^4 \mid u_1 u_3 = 1, u_2 u_4 = 1\}.$$

Burada $u_1 \neq 0$ ve $u_2 \neq 0$ alarak $(u_1, u_2, u_3, u_4) \mapsto (u_1, u_2)$ izdüşüm tasvirini uygularsak

$$U_\sigma = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \mid u_1 \neq 0, u_2 \neq 0\} = (\mathbb{C}^*)^2$$

elde ederiz. Gerçekten de, $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ olduğundan $\text{boyut}(U_\sigma) = 2$ 'dir. Ayrıca $\text{boyut}(\mathbb{C}[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4]) = 4$ olması I idealinin 2 binomial ile üretildiği anlamına gelir (bkz. (3.14)). $\square$

Örnek 3.15 Eğer $\sigma = \{0\} \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ ise $U_\sigma = (\mathbb{C}^*)^n$ 'dir.

Çözüm. σ 'ya karşılık gelen dual koni $\sigma^\vee = M_{\mathbb{R}}$ olduğundan $S_\sigma = \langle \mp e_1^*, \dots, \mp e_n^* \rangle$ olur. S_σ ile

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}]$$

polinom halkası tanımlanır. Burada $X_1 = Z_1, \dots, X_n = Z_n, X_1^{-1} = Z_{n+1}, \dots, X_n^{-1} = Z_{2n}$ değişken dönüşümleri yaparsak

$$\mathbb{C}[S_\sigma] \cong \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_{2n}]/I$$

elde ederiz. I ideali $Z_1, \dots, Z_{2n}$ değişkenleri arasındaki n bağıntı ile tanımlı olacaktır. Bunlar

$$Z_1 Z_{n+1} = 1, Z_2 Z_{n+2} = 1, \dots, Z_n Z_{2n} = 1.$$

Dolayısıyla $\text{Spek}(\mathbb{C}[S_\sigma]) \cong V(Z_1 Z_{n+1} - 1, \dots, Z_n Z_{2n} - 1)$ olur. $u_1 \neq 0, \dots, u_n \neq 0$ olarak tanımlayacağımız $(u_1, \dots, u_{2n}) \mapsto (u_1, \dots, u_n)$ izdüşüm tasviri ile

$$U_\sigma = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n \mid u_1 \neq 0, \dots, u_n \neq 0\} = (\mathbb{C}^*)^n \quad (3.17)$$

elde ederiz. Gerçekten de, $\text{boyut}(U_\sigma) = n$ ve $\text{boyut}(\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_{2n}]) = 2n$ olduğundan I idealinin yüksekliği n 'dir (bkz. (3.14)).

Yukardaki örneği S_σ için farklı bir üreteç kümesi seçerek tekrar yapalım.

$A = \{e_1^*, \dots, e_n^*, -e_1^* - \dots - e_n^*\}$ kümesini gözönüne alalım. Her i için

$e_i^* = (-e_1^* - \dots - e_n^*) + e_1^* + \dots + e_{i-1}^* + e_{i+1}^* + \dots + e_n^*$ olarak yazılabildiğinden $-e_1^*, \dots, -e_n^* \in A$ dır. O halde A kümesini de S_σ için bir üreteç kümesi olarak seçebiliriz. Böylece S_σ ile $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, (X_1 \cdots X_n)^{-1}]$ polinom halkası tanımlar ve $X_1 = Z_1, \dots, X_n = Z_n, (X_1 \cdots X_n)^{-1} = Z_{n+1}$ dönüşümleri ile

$$\mathbb{C}[S_\sigma] \cong \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_{n+1}]/I$$

elde ederiz. I ideali $Z_1, \dots, Z_{n+1}$ arasındaki $Z_1 Z_2 \cdots Z_{n+1} = 1$ bağıntısı ile tanımlıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} U_\sigma &\cong V(Z_1 Z_2 \cdots Z_{n+1} - 1) \subset \mathbb{C}^{n+1} \\ &= \{(u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid u_{n+1} = 1/u_1 u_2 \cdots u_n\} \end{aligned}$$

olur. Burada $u_1 \neq 0, \dots, u_n \neq 0$ olarak $(u_1, \dots, u_{n+1}) \mapsto (u_1, \dots, u_n)$ izdüşüm tasvirini uygularsak σ konisine karşılık yine $U_\sigma \cong (\mathbb{C}^*)^n$ afin varyetesini elde ederiz. $\square$

Tanım 3.16 $T_N \cong \mathbb{C}^* \times \dots \times \mathbb{C}^* = (\mathbb{C}^*)^n$ şeklinde tanımlı uzaya n -boyutlu afin cebirsel torus denir.

$\mathbb{C}[S_\sigma] \subset \mathbb{C}[S_{\{0\}}]$ ve $U_{\{0\}} \subset U_\sigma$ olduğunu daha önce gördük. Öyleyse her $\sigma \subset \mathbb{N}_\mathbb{R}$ konisi için U_σ afin varyetesi n -boyutlu torus $T_N = (\mathbb{C}^*)^n$ i açık ve yoğun (bkz. Bölüm 5) bir altküme olarak içerir. Bu nedenle, U_σ afin varyetesine *torsal* denir.

Örnek 3.17 Eğer $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ konisi $N_{\mathbb{R}}$ uzayının üreteçlerinden n tanesi ile üretilmiş ise $U_{\sigma} \cong \mathbb{C}^n$ 'dir.

Çözüm. σ için $\mp e_1, \dots, \mp e_n$ vektörlerinden herhangi n vektör seçilirse $\sigma^{\vee}$ dual konisi bu vektörlere paralel olan $M_{\mathbb{R}}$ 'nin üreteçleri ile üretilir. Her bir $m_i \in \{\mp e_1^*, \dots, \mp e_n^*\}$ olmak üzere

$S_{\sigma} = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ olur ve S_{σ} ile $\mathbb{C}[S_{\sigma}] = \mathbb{C}[\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_n}]$ polinom halkası tanımlanır. Uygun değişken dönüşümleri ile

$$\mathbb{C}[S_{\sigma}] \cong \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]/I$$

elde edilir. (3.14) eşitliğinden bu koordinat halkasını tanımlayan I idealin yüksekliğinin 0 olduğu görülür. Bu da $I = \langle 0 \rangle$ olması demektir. Dolayısıyla

$$U_{\sigma} = \text{Spek}(\mathbb{C}[S_{\sigma}]) \cong V(\langle 0 \rangle) = \mathbb{C}^n$$

olur. U_{σ} varyetesi, $\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_n}$ değişkenleri ile tanımlı olduğundan $U_{\sigma} = \mathbb{C}_{(\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_n})}^n$ şeklinde de yazabiliriz.

Örnek 3.18 Eğer $\sigma = \langle 2e_1 - e_2, e_2 \rangle \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ ise $U_{\sigma} = V(Z_2^2 - Z_1Z_3)$ elde edilir.

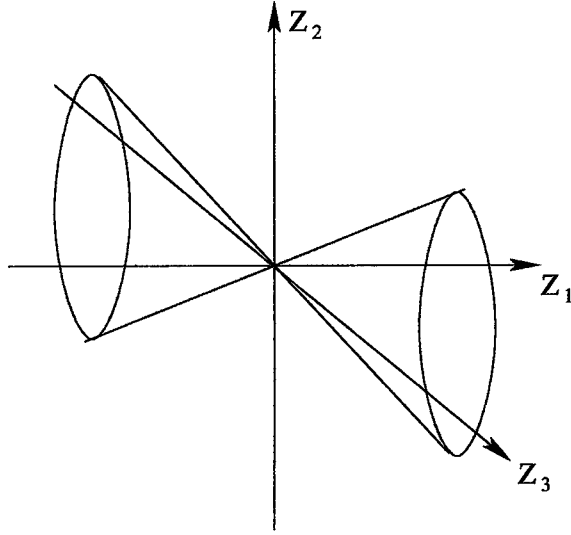
Çözüm. Verilen σ konisine karşılık $\mathbb{C}[X_1, X_1X_2, X_1X_2^2]$ polinom halkasını elde etmiştik (Örnek 3.7). Eğer X_1, X_1X_2 ve $X_1X_2^2$ terimlerini sırasıyla Z_1, Z_2 ve Z_3 ile gösterirsek

$$\mathbb{C}[X_1, X_1X_2, X_1X_2^2] \cong \mathbb{C}[Z_1, Z_2, Z_3]/I$$

olduğunu görürüz. Buradan, σ konisini içeren en küçük lineer uzay $\mathbb{R}^2$ olduğundan $\text{boyut}(U_{\sigma}) = 2$ 'dir (Şekil 2.3). Ayrıca $\text{boyut}(\mathbb{C}[S_{\sigma}]) = 3$ olması I idealinin yüksekliğinin 1 olmasını gerektirir (bkz. (3.14)). O halde I ideali yalnızca bir binomial ile üretilir. Bu binomial, X_1, X_1X_2 ve $X_1X_2^2$ değişkenleri arasındaki $Z_2^2 = Z_1Z_3$ bağıntısından elde edilir. Böylece

$$\mathbb{C}[S_{\sigma}] \cong \mathbb{C}[Z_1, Z_2, Z_3]/\langle Z_2^2 - Z_1Z_3 \rangle$$

olur. Buradan $U_{\sigma} \cong \text{Spek}(\mathbb{C}[S_{\sigma}]) \cong V(Z_2^2 - Z_1Z_3)$ elde edilir ve Şekil 3.2'deki gibi görünür.



Şekil 3.2 Koni üzerine konik.

Örnek 3.19 Eğer $\sigma = \langle e_1, e_2, -e_3 - e_4, e_4 \rangle \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^4$ ise $U_{\sigma} = \mathbb{C}^4$ tür.

Çözüm. $u_1 = e_1, u_2 = e_2, u_3 = -e_3 - e_4$ ve $u_4 = e_4$ olsun. Örnek 2.5'te olduğu gibi $\sigma^{\vee}$ de dört vektör alalım ve üreteçlerini araştıralım:

$$v_1 = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^* + a_4 e_4^*,$$

$$v_2 = b_1 e_1^* + b_2 e_2^* + b_3 e_3^* + b_4 e_4^*,$$

$$v_3 = c_1 e_1^* + c_2 e_2^* + c_3 e_3^* + c_4 e_4^*,$$

$$v_4 = d_1 e_1^* + d_2 e_2^* + d_3 e_3^* + d_4 e_4^*.$$

Dual tanımından, eğer $i = j$ ise $(u_i, v_j) = 0$ ve eğer $i \neq j$ ise $(u_i, v_j) > 0$ dir. Elde edeceğimiz denklem sistemlerini çözerek

$$v_1 = a_2 e_2^* + a_3 (-e_3^*) + a_4 e_4^* \in \langle e_2^*, -e_3^*, e_4^* \rangle$$

$$v_2 = b_1 e_1^* + b_3 (-e_3^*) + b_4 e_4^* \in \langle e_1^*, -e_3^*, e_4^* \rangle$$

$$v_3 = c_1 e_1^* + c_2 e_2^* + c_3 (-e_3^* + e_4^*) \in \langle e_1^*, e_2^*, -e_3^* + e_4^* \rangle$$

$$v_4 = d_1 e_1^* + d_2 e_2^* - d_3 e_3^* \in \langle e_1^*, e_2^*, -e_3^* \rangle$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\sigma^{\vee} = \langle e_1^*, e_2^*, -e_3^*, -e_3^* + e_4^* \rangle$ olur.

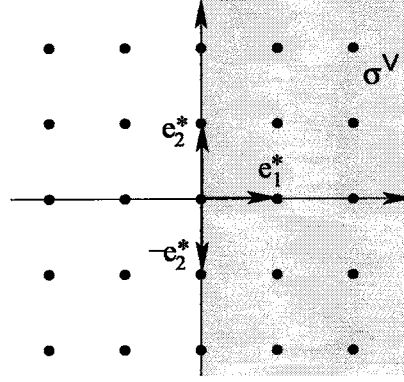
$S_{\sigma} = \langle e_1^*, e_2^*, -e_3^*, -e_3^* + e_4^* \rangle$ ile $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3^{-1}, X_3^{-1} X_4]$ polinom halkasını tanımlarız.

Örnek 3.17'de olduğu gibi burada $\text{boyut}(U_{\sigma}) = 4$ ve $\text{boyut}(\mathbb{C}[S_{\sigma}]) = 4$ olduğundan

$\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3^{-1}, X_3^{-1} X_4] \cong \mathbb{C}[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] / \langle 0 \rangle$ olur. Dolayısıyla $U_{\sigma} = \text{Spek}(\mathbb{C}[S_{\sigma}]) \cong V(\langle 0 \rangle) \cong \mathbb{C}^4$ elde edilir. $\square$

Örnek 3.20 Eğer $\sigma = \langle e_1 \rangle \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ ise $U_{\sigma} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ dir.

Çözüm. Dual koni, e_1 vektörüne dik ve skaler çarpımı sıfırdan büyük olan vektörleri içerir. Dolayısıyla $\sigma^{\vee}$, e_1^* , e_2^* ve $-e_2^*$ ile üretilir:



Şekil 3.3 $\sigma = \langle e_1 \rangle$ konisinin duali.

Böylece $S_{\sigma} = \langle e_1^*, e_2^*, -e_2^* \rangle$ ve $\mathbb{C}[S_{\sigma}] = \mathbb{C}[X_1, X_2, X_2^{-1}]$ olur. $X_1 = Z_1$, $X_2 = Z_2$ ve $X_2^{-1} = Z_3$ olarak tanımlayalım. $\mathbb{C}[S_{\sigma}]$ 'nin üreteçleri arasında $Z_2 Z_3 = 1$ bağıntısı vardır. O halde $\mathbb{C}[S_{\sigma}]$ 'ya izomorf koordinat halkası

$$\mathbb{C}[S_{\sigma}] \cong \mathbb{C}[Z_1, Z_2, Z_3] / \langle Z_2 Z_3 - 1 \rangle$$

şeklinde tanımlıdır. Buradan

$$U_{\sigma} \cong V(Z_2 Z_3 - 1) = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3 \mid u_2^{-1} = u_3\} \quad (3.18)$$

elde edilir. $u_2 \neq 0$ olmak üzere $(u_1, u_2, u_2^{-1}) \mapsto (u_1, u_2)$ izdüşüm tasvirini uygularsak $U_{\sigma} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ elde ederiz.

Örnek 3.21 Eğer $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^4$ ise $U_{\sigma} = \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2$ dir.

Çözüm. $\sigma^{\vee}$ 'nin üreteçlerini $v_1 = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + a_3 e_3^* + a_4 e_4^*$ ve $v_2 = b_1 e_1^* + b_2 e_2^* + b_3 e_3^* + b_4 e_4^*$ olarak önerelim. Dual tanımından $(e_1, v_1) = 0$ ve $(e_2, v_1) > 0$ olduğunu biliyoruz. Buradan $a_1 = 0$ ve $a_2 > 0$ olur. Ayrıca $(e_1, v_2) > 0$ ve $(e_2, v_2) = 0$ olduğundan $b_1 > 0$ ve $b_2 = 0$ olmalıdır.

O halde $a_2 > 0$, $b_1 > 0$ ve a_3, a_4, b_3, b_4 keyfi seçilmiş katsayılar olmak üzere

$v_1 = a_2 e_2^* + a_3 e_3^* + a_4 e_4^*$ ve $v_2 = b_1 e_1^* + b_3 e_3^* + b_4 e_4^*$ tür. O halde $v_1 \in \langle e_2^*, \mp e_3^*, \mp e_4^* \rangle$ ve $v_2 \in \langle e_1^*, \mp e_3^*, \mp e_4^* \rangle$ olur. Bu da, $v_1, v_2 \in \sigma^{\vee}$ olduğuna göre $\sigma^{\vee} = \langle e_1^*, e_2^*, \mp e_3^*, \mp e_4^* \rangle$ olması demektir.

Böylece $S_\sigma = \langle e_1^*, e_2^*, \mp e_3^*, \mp e_4^* \rangle$ yarı-grubu ve $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_3^{-1}, X_4^{-1}]$ polinom halkası elde edilir. $X_1 = Z_1, X_2 = Z_2, X_3 = Z_3, X_4 = Z_4, X_3^{-1} = Z_5, X_4^{-1} = Z_6$ olarak tanımlayalım. Bu değişkenler arasında $Z_3Z_5 = 1$ ve $Z_4Z_6 = 1$ bağıntıları vardır. Öyleyse

$$\mathbb{C}[S_\sigma] \cong \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_6] / \langle Z_3Z_5 - 1, Z_4Z_6 - 1 \rangle$$

olur. Buradan $U_\sigma \cong V(Z_3Z_5 - 1, Z_4Z_6 - 1)$ elde ederiz. U_σ üzerinde $u_3 = u_5^{-1}$ ve $u_4 = u_6^{-1}$ olduğundan $u_3 \neq 0, u_4 \neq 0$ alarak

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \mapsto (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

izdüşüm tasvirini tanımlayabiliriz. Bu tasvir ile $U_\sigma \cong \mathbb{C}^2 \times (\mathbb{C}^*)^2$ elde ederiz.

Daha genel olarak:

Örnek 3.22 Eğer $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$, $e_1, e_2, \dots, e_d$ vektörleri ile üretilen bir koni ise $U_\sigma = \mathbb{C}^d \times (\mathbb{C}^*)^{n-d}$ dir, $d \leq n$.

Çözüm. Örnek 3.21'de izlediğimiz yol ile $\sigma^\vee$ 'nin üreteçlerini bulalım. Bunun için, $\sigma^\vee$ konisinde d tane üreteç vektörü tanımlamamız gerekir. Bunlar $v_1, \dots, v_n$ olsun. Dual tanımından $i = j$ için $(e_i, v_i) = 0$ ve $i \neq j$ için $(e_i, v_j) > 0$ olmalıdır, $(i, j = 1, \dots, d)$. Bu ifade-lerle elde edeceğimiz denklem sistemini çözersek v_i vektörlerinde $e_{d+1}^*, \dots, e_n^*$ vektörlerinin katsayılarının keyfi ve e_i^* vektörlerinin katsayılarının sıfır olduğunu görürüz. Buradan $v_i \in \langle e_1^*, \dots, e_{i-1}^*, e_{i+1}^*, \dots, e_d^*, \mp e_{d+1}^*, \dots, \mp e_n^* \rangle$ elde edilir. Dolayısıyla $\sigma^\vee = \langle e_1^*, \dots, e_n^*, -e_{d+1}^*, -e_{d+2}^*, \dots, -e_n^* \rangle$ olur.

S_σ için $e_1, e_2, \dots, e_n, -e_{d+1} - e_{d+2} - \dots - e_n$ vektörlerini üreteç olarak seçebiliriz. Bu durumda S_σ yarı-grubuna karşılık

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, (X_{d+1} \cdots X_n)^{-1}]$$

polinom halkasını tanımlarız. $X_1 = Z_1, \dots, X_n = Z_n$ ve $(X_{d+1} \cdots X_n)^{-1} = Z_{n+1}$ dönüşümleri ile $Z_{d+1} \cdots Z_{n+1} = 1$ bağıntısını elde ederiz.

Dolayısıyla σ konisine $U_\sigma \cong V(Z_{d+1} \cdots Z_{n+1} - 1) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ torsal varyetesi karşılık gelir. $u_{d+1} \neq 0, \dots, u_n \neq 0$ alarak $(u_1, \dots, u_n, (u_1 \cdots u_n)^{-1}) \mapsto (u_1, \dots, u_n)$ izdüşümünü uygularsak

$$U_\sigma \cong \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n \mid u_{d+1} \neq 0, \dots, u_n \neq 0\} = \mathbb{C}^d \times (\mathbb{C}^*)^{n-d} \quad (3.19)$$

elde ederiz.

4. PROJEKTİF TORSAL VARYETE

4.1 Projektif Torsal Varyetenin Oluşturulması

Bu bölümde, tam dışbükey rasyonel konilerin belirli özellikleri sağlayan bir kümesini gözönüne alacağız ve bu kümeye karşılık gelen torsal varyeteyi oluşturacağız. Böyle bir kümenin özelliklerini aşağıdaki şekilde tanımlayacağız:

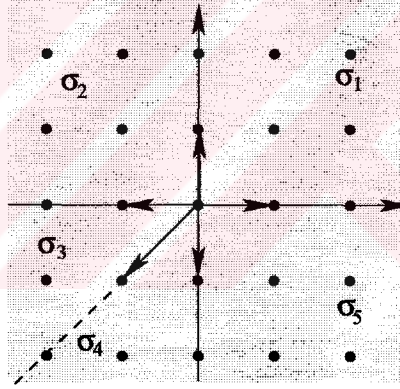
Tanım 4.1 $\Delta = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \subset N_{\mathbb{R}}$ kümesini gözönüne alalım. Eğer Δ kümesindeki

(i) her bir koninin yüzü yine Δ kümesinde bir koni ve

(ii) herhangi iki koninin kesişimi bu iki koninin de bir yüzü

ise Δ kümesine $N_{\mathbb{R}}$ kafesinde tanımlı bir fan denir.

Örnek olarak, aşağıdaki şekilde verilen koniler, $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ kafesinde beş konili bir fan oluşturur:



Şekil 4.1 $\Delta = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$ fanı.

Fandaki bir koninin bir yüzü yine fanda bir koni belirttiği için bir yüzün koniye göre dualini veren aşağıdaki önermeye ilerde ihtiyaç duyacağız.

Önerme 4.2 Eğer $\tau \prec \sigma$ ise, $\lambda \in \sigma^\vee$ için $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$

$$\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda) \quad \text{olur.} \quad (4.1)$$

İspat. $\tau \prec \sigma$ olduğundan $\sigma^\vee \subseteq \tau^\vee$ dir. $(w, v) < 0$ olacak şekilde $w \in \tau^\vee$ ve $v \in \sigma$ vektörlerinin varolduğunu kabul edelim. $u_1, \dots, u_n$ vektörleri σ konisinin üreteçleri ise v vektörü $v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$, ($a_i \in \mathbb{R}$), olur. Buradan

$$(w, v) = a_1(w, u_1) + \dots + a_n(w, u_n) < 0$$

olur. Eğer $p > \max\{|a_i(w, u_i)|\}$ olacak şekilde bir $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sayısı seçersek $w + p\lambda$ vektörü ile σ konisinde bulunan her vektörün çarpımı sıfır ya da pozitif olur. Başka bir deyişle $w + p\lambda \in \sigma^\vee$ dir. Buradan $w \in \sigma^\vee - p\lambda \subset \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)$ ve dolayısıyla

$$\tau^\perp \subseteq \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda) \quad (4.2)$$

elde ederiz.

Eğer $v \in \sigma^\vee$ ve $v' = v + p(-\lambda) \in \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)$ alırsak herhangi bir $t \in \tau$ için $(t, \lambda) = 0$ ve $(v, t) \geq 0$ bulunur. Böylece

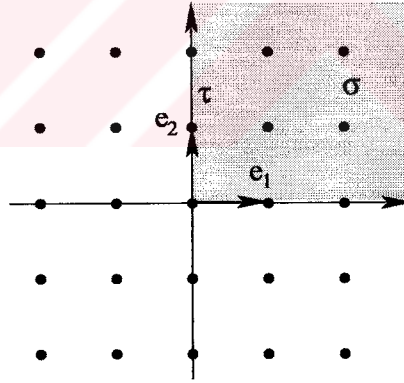
$$(v', t) = (v, t) + p(-\lambda, t) = (v, t) - p(\lambda, t) = (v, t) \geq 0$$

elde edilir. Bu da $v' \in \tau^\vee$ demektir. Dolayısıyla

$$\sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda) \subseteq \tau^\vee \quad (4.3)$$

olur. Sonuç olarak, (4.2) ve (4.3)'den $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)$ olduğu görülür. $\square$

Örnek olarak, $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ kafesinde, $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$ konisini ve bu koninin $\tau = \langle e_1 \rangle \prec \sigma$ yüzünü gözönüne alalım:



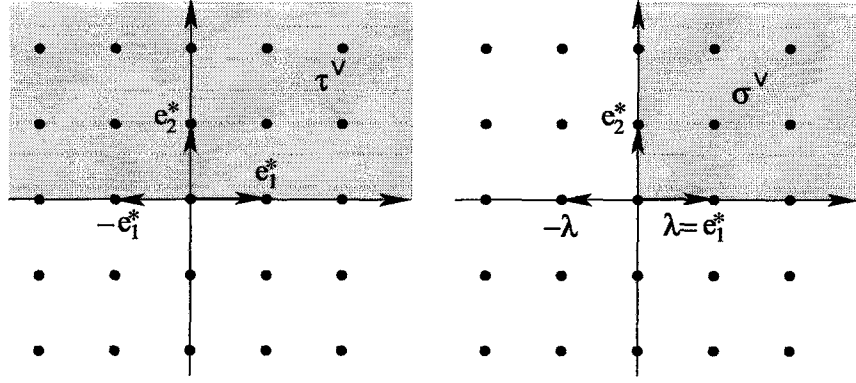
Şekil 4.2 $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$ konisi ve $\tau = \langle e_1 \rangle$ yüzü.

σ ve τ konilerinin dualleri sırasıyla $\sigma^\vee = \langle e_1^*, e_2^* \rangle$ ve $\tau^\vee = \langle e_1^*, -e_1^*, e_2^* \rangle$ olur (Şekil 4.3).

Açıkça görüyoruz ki

$$\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-e_1^*) \quad (4.4)$$

dir. Aynı zamanda τ yüzünün, $\lambda = e_1^*$ için $\tau = \sigma \cap (e_1^*)^\perp$ olması $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\lambda)$ eşitliğini verir.



Şekil 4.3 $\sigma = \langle e_1, e_2 \rangle$ ve $\tau = \langle e_1 \rangle$ konilerinin dualleri.

Önerme 4.2'den faydalanarak şu sonuca ulaşılır:

Sonuç 4.3 (Oda, 1985) $\tau \prec \sigma$ ve $\lambda \in \sigma^\vee$ olmak üzere $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp$ olsun. Bu durumda

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\lambda) \quad \text{dır.} \quad (4.5)$$

Şimdi, bir $\Delta = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ fanına karşılık gelen torsal varyeteyi oluşturalım:

(a) Fandaki her bir koni için afin varyete oluşturmak

Bu işlemi, üçüncü bölümdeki bilgilerimizi kullanarak gerçekleştiriyoruz.

(b) Afin torsal varyetelerin yapıştırılması

Tanım 4'deki (ii) özelliğini kullanarak fandaki konilere karşılık gelen afin torsal varyeteleri yapıştıracağız. Fanın, sırasıyla iki, üç,... koni içerdiği durumları gözönüne alarak devam edelim.

- $n = 2$, yani, $\Delta = \{\sigma_1, \sigma_2\} \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ şeklinde iki konili bir fan olsun. σ_1 ve σ_2 konilerinin ortak yüzü $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ olsun. Öyleyse, U_τ hem U_{σ_1} afin torsal varyetesinin hem de U_{σ_2} afin torsal varyetesinin açık bir altkümesi olur (Önerme 3.13). Bundan başka,

$$U_{\sigma_1} \cap U_\tau = U_{\sigma_1 \cap \tau} \text{ ve } U_{\sigma_2} \cap U_\tau = U_{\sigma_2 \cap \tau} \quad (4.6)$$

dır. Şimdi, $U_\tau \rightarrow U_{\sigma_1}$ ve $U_\tau \rightarrow U_{\sigma_2}$ tasvirlerini tanıyalım:

Eğer $\lambda_1 \in \sigma_1^\vee$, $\tau = \sigma_1 \cap \lambda_1^\perp$ ve S_{σ_1} yarı-grubunun üreteçleri $a_1, \dots, a_k$ vektörleri ise S_τ yarı-grubunun üreteçleri $a_1, \dots, a_k, -\lambda_1$ vektörleri olur (Sonuç 4.3). $\lambda_1 \in S_{\sigma_1}$ olduğundan $\lambda_1 = a_k$ kabul edebiliriz. Bu durumda, S_τ yarı-grubunun üreteçleri arasında, S_{σ_1} yarı-grubunun üreteçleri arasındaki bağıntılar ve bunlara ek olarak, $a_k a_{k+1} = 0$ bağıntısı vardır. Bu son bağıntı, $\mathbb{C}[S_\tau]$ polinom halkasında $X_k X_{k+1} = 1$ bağıntısını verir. Böylece U_τ ve U_{σ_1} afin torsal varyetelerinin

$$U_{\sigma_1} = \{(u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{C}^k\}$$

$$U_\tau = \{((u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) \in \mathbb{C}^{k+1} \mid u_k u_{k+1} = 1)\} \quad (4.7)$$

olduğunu buluruz. Dolayısıyla

$$(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) \xrightarrow{\phi_1} (u_1, \dots, u_k) \quad (4.8)$$

izdüşüm tasviri

$$U_\tau \cong U_{\sigma_1} - \{u_k = 0\} \quad (4.9)$$

izomorfizmasını verir.

Bu kez de τ yüzünü, $\lambda_2 \in \sigma_2^\vee$ için $\tau = \sigma_2 \cap \lambda_2^\perp$ olarak ele alalım. S_{σ_2} yarı-grubunun üreteçlerini $b_1, \dots, b_l$ vektörleri ile gösterirsek, S_τ yarı-grubunun üreteçleri $b_1, \dots, b_l, -\lambda_2$ vektörleri olacaktır. Eğer $b_l = \lambda_2$ ve $b_{l+1} = -\lambda_2$ ise S_τ yarı-grubundan, S_{σ_2} yarı-grubunun üreteçleri arasındaki bağıntılara ek olarak $b_l + b_{l+1} = 0$ bağıntısını elde ederiz. Bu bağıntı $\mathbb{C}[S_\tau]$ polinom halkasında $X_l X_{l+1} = 1$ bağıntısını verir. Böylece, U_τ ile U_{σ_2} afin torsal varyeteleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} U_{\sigma_2} &= \{(v_1, \dots, v_l) \in \mathbb{C}^l\} \\ U_\tau &= \{((v_1, \dots, v_l, v_{l+1}) \in \mathbb{C}^{l+1} \mid v_l v_{l+1} = 1)\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dolayısıyla $v_l \neq 0$ koşulu ile tanımlayacağımız

$$(v_1, \dots, v_l, v_{l+1}) \xrightarrow{\phi_2} (v_1, \dots, v_l) \quad (4.11)$$

izdüşüm tasviri ile

$$U_\tau \cong U_{\sigma_2} - \{v_l = 0\} \quad (4.12)$$

elde edilir.

U_{σ_1} ile U_{σ_2} afin torsal varyeteleri arasındaki (4.8) ve (4.11)'de verilen ϕ_1 ve ϕ_2 tasvirlerinden elde edilen

$$\gamma = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : U_{\sigma_1} - \{u_k = 0\} \rightarrow U_\tau \rightarrow U_{\sigma_2} - \{v_l = 0\} \quad (4.13)$$

tasvirine *yapıştırma tasviri* adı verilir. Yapıştırma tasviri, U_{σ_1} ve U_{σ_2} varyeteleri arasında U_τ boyunca bir geçiş sağlar. Başka bir deyişle γ tasviri

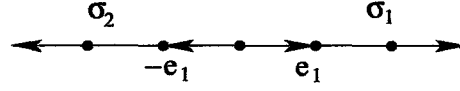
$$(u_1, \dots, u_l, u_{l+1}) \mapsto (v_1, \dots, v_l, v_{l+1}) \quad (4.14)$$

koordinat dönüşümüdür. Böylece Δ fanına karşılık gelen torsal varyeteyi

$X(\Delta) = U_{\sigma_1} \sqcup U_{\sigma_2}$ olarak elde ederiz.

Örnek 4.4 Eğer $\Delta \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ fanı $\sigma_1 = \langle e_1 \rangle$ ve $\sigma_2 = \langle -e_1 \rangle$ konilerinden oluşuyorsa $X(\Delta) = \mathbb{P}^1$ 'dir.

Çözüm. Δ fanı aşağıdaki şekildedir:



Şekil 4.4 $\Delta = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ fanı.

Önce σ_1 ve σ_2 konilerine karşılık gelen afin torsal varyeteleri bulalım. Konilerimiz, $N_{\mathbb{R}}$ kafesinin birer üretici ile üretildikleri için U_{σ_1} ve U_{σ_2} afin torsal varyeteleri $\mathbb{C}$ kompleks uzayının birer kopyası olur (Örnek 3.17):

$$U_{\sigma_1} \cong \mathbb{C}_X = \{u_1 \in \mathbb{C}\},$$

$$U_{\sigma_2} \cong \mathbb{C}_{X^{-1}} = \{u_1^{-1} \in \mathbb{C}\}.$$

Konilerin ortak yüzü $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 = \{0\}$ yüzüdür. $\tau = \{0\}$ yüzü σ_1 konisi üzerinde $\tau = \sigma_1 \cap (e_1^*)^\perp$ şeklinde ve σ_2 konisi üzerinde $\tau = \sigma_2 \cap (-e_1^*)^\perp$ şeklinde tanımlanır. Öyleyse, τ , $S_\tau = \langle e_1^*, -e_1^* \rangle$ yarı-grubunu verir. Buradan, $\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[X, X^{-1}]$ polinom halkasını ve

$$U_\tau = \text{Spek}(\mathbb{C}[X, X^{-1}]) = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \mid u_1 u_2 = 1\}$$

afin torsal varyetesini buluruz. $u_1 \neq 0$ ile verilen $(u_1, u_1^{-1}) \mapsto u_1$ izdüşüm tasviri ile $U_\tau \cong \mathbb{C}^*$ elde ederiz. Böylece

$$U_\tau \cong U_{\sigma_1} - \{u_1 = 0\},$$

$$U_\tau \cong U_{\sigma_2} - \{u_1^{-1} = 0\}$$

olur. Dolayısıyla U_{σ_1} ile U_{σ_2} arasındaki yapıştırma tasviri $X \mapsto X^{-1}$ koordinat dönüşümü ile tanımlanır. Şimdi $X = \frac{t_1}{t_0}$ dönüşümü ile, daha önce (2.34) ile tanımladığımız, $\beta_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$, ($i = 0, 1$), tasvirlerini kullanarak

$$\frac{t_1}{t_0} \xrightarrow{\beta_0} (1 : \frac{t_1}{t_0})$$

$$\frac{t_0}{t_1} \xrightarrow{\beta_1} (\frac{t_0}{t_1} : 1)$$

homojen koordinatlarına geçelim. Böylece, U_{σ_1} ve U_{σ_2} afin torsal varyeteleri, $\mathbb{P}^1$ projektif uzayının sırasıyla $t_0 \neq 0$ ve $t_1 \neq 0$ ile tanımlı açık altkümelerine karşılık gelir. Yani, U_{σ_1}

ve U_{σ_2} varyetelerini $X \mapsto X^{-1}$ dönüşümü ile yapıştırmak $\mathbb{P}^1$ projektif uzayının iki açık altkümesinin birleşimini almaya eşdeğerdir. Öyleyse

$$X(\Delta) = \mathbb{P}^1 \text{ dir. } \square$$

• $n = 3$, yani, $\Delta = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ şeklinde üç koniden oluşan bir fan olsun. Bu fana karşılık gelen torsal varyeteyi tanımlamak için, fanın elemanlarını önce ikişer ikişer gözönüne alacağız.

σ_1 ve σ_2 konilerinin ortak yüzü $\tau_1 = \sigma_1 \cap \sigma_2$ olsun. $\lambda_1 \in \sigma_1^\vee$ ve $\lambda_2 \in \sigma_2^\vee$ vektörleri ile $\tau_1 = \sigma_1 \cap \lambda_1^\perp$ ve $\tau_1 = \sigma_2 \cap \lambda_2^\perp$ şeklinde tanımlı olduğunu kabul edelim. O halde U_{τ_1} , U_{σ_1} ve U_{σ_2} afin torsal varyeteleri arasında

$$\begin{aligned} \phi_1 &: U_{\tau_1} \rightarrow U_{\sigma_1} - \{u_k = 0\} \\ \phi_2 &: U_{\tau_1} \rightarrow U_{\sigma_2} - \{v_l = 0\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

izomorfizmalarını buluruz. Dolayısıyla, U_{σ_1} ve U_{σ_2} arasındaki yapıştırma tasviri

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : U_{\sigma_1} &\rightarrow U_{\sigma_2} \\ (u_1, \dots, u_l, u_{l+1}) &\mapsto (v_1, \dots, v_l, v_{l+1}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

şeklindedir.

Şimdi, σ_2 ve σ_3 konilerini gözönüne alalım. $\tau_2 = \sigma_2 \cap \sigma_3$ bu iki koninin ortak yüzü olsun. τ yüzü, σ_2 konisi üzerinde $\mu_1 \in \sigma_2^\vee$ için $\tau_2 = \sigma_2 \cap \mu_1^\perp$ ile tanımlı olsun ve μ_1 vektörü U_{σ_1} afin torsal varyetesi üzerinde $\chi^{\mu_1} = X_r$ dönüşümü ile elde edilen koordinata karşılık gelsin. Böylece, U_{τ_2} ile U_{σ_2} arasında aşağıdaki gibi bir izdüşüm tasviri tanımlayabiliriz:

$$\psi_1 : U_{\tau_2} \rightarrow U_{\sigma_2} - \{v_r = 0\} \quad (4.17)$$

Şimdi, τ_2 yüzünün, σ_3 konisi üzerinde, $\mu_2 \in \sigma_3^\vee$ için $\tau_2 = \sigma_3 \cap \mu_2^\perp$ şeklinde tanımlı olduğu durumu düşünelim. μ_2 vektörü $\mathbb{C}[S_{\sigma_3}]$ halkasında $\chi^{\mu_2} = X_s$ dönüşümü ile elde edilen koordinata karşılık gelsin. Böylece, U_{τ_2} afin torsal varyetesi, U_{σ_3} varyetesinin $X_s \neq 0$ koşulu ile tanımlı altkümesine izomorf olur:

$$\psi_2 : U_{\tau_2} \rightarrow U_{\sigma_3} - \{w_s = 0\} \quad (4.18)$$

Öyleyse, ψ_1 ve ψ_2 izomorfizmaları, U_{σ_2} ve U_{σ_3} arasındaki aşağıdaki yapıştırma tasvirini verir:

$$\gamma_2 = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} : U_{\sigma_2} \rightarrow U_{\sigma_3} \quad (4.19)$$

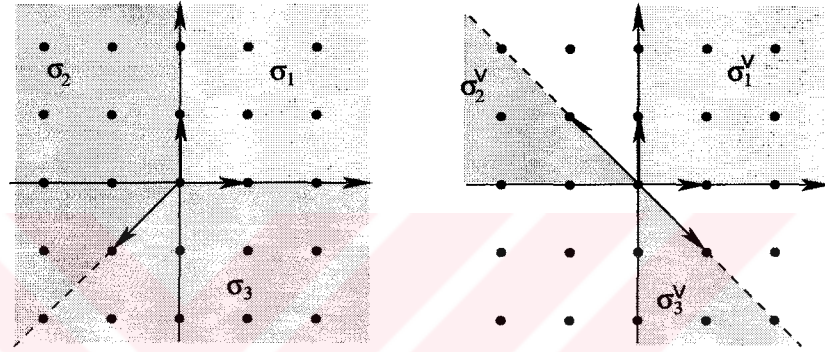
Böylece (4.16) ve (4.19)'yi kullanarak U_{σ_1} , U_{σ_2} ve U_{σ_3} afin torsal varyeteleri

$$U_{\sigma_1} \xrightarrow{\phi_1^{-1}} U_{\tau_1} \xrightarrow{\phi_2} U_{\sigma_2} \xrightarrow{\psi_1^{-1}} U_{\tau_2} \xrightarrow{\psi_2} U_{\sigma_3} \quad (4.20)$$

ile yapışmış olur. Üç konili Δ fanına karşılık gelen torsal varyete $\gamma_2 \circ \gamma_1$ ile bulunan $X(\Delta) = U_{\sigma_1} \cup U_{\sigma_2} \cup U_{\sigma_3}$ kümesidir.

Örnek 4.5 Eğer $\Delta \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ fanı, $\sigma_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$, $\sigma_2 = \langle -e_1 - e_2, e_2 \rangle$ ve $\sigma_3 = \langle e_1, -e_1 - e_2 \rangle$ konilerinden oluşuyorsa $X(\Delta) = \mathbb{P}^2$ dir.

Çözüm. Verilen koniler ve dualleri aşağıdaki şekildeki gibidir:



Şekil 4.5 Koniler ve dualleri.

Öyleyse, karşılık gelen yarı-gruplarımız

$$S_{\sigma_1} = \langle e_1^*, e_2^* \rangle, \quad S_{\sigma_2} = \langle -e_1^*, -e_1^* + e_2^* \rangle \quad \text{ve} \quad S_{\sigma_3} = \langle -e_2^*, e_1^* - e_2^* \rangle$$

olacaktır. Bu, U_{σ_i} , ($i = 1, 2, 3$), afin torsal varyetesinin $\mathbb{C}^2$ kompleks uzayının bir kopyası olduğu anlamına gelir (bkz. Örnek 3.17); yani,

$$U_{\sigma_1} \cong \mathbb{C}_{(X,Y)}^2, \quad U_{\sigma_2} \cong \mathbb{C}_{(X^{-1}, X^{-1}Y)}^2, \quad U_{\sigma_3} \cong \mathbb{C}_{(Y^{-1}, XY^{-1})}^2 \quad (4.21)$$

elde edilir.

Önce σ_1 ve σ_2 konilerini ele alalım. Bu konilerin ortak yüzü $\tau_1 = \langle e_2 \rangle$ 'dir. Bu yüze, $S_{\tau_1} = \langle e_1^*, -e_1^*, e_2^* \rangle$ yarı-grubu ve bu yarı-gruba da $\mathbb{C}[S_{\tau_1}] = \mathbb{C}[X, X^{-1}, Y]$ polinom halkası karşılık gelir. Böylece $U_{\tau_1} = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3 \mid u_1 u_2 = 1\} = \mathbb{C}_X^* \times \mathbb{C}_Y$ elde edilir. U_{σ_1} ile U_{τ_1} afin torsal varyeteleri arasındaki

$$(u_1, u_1^{-1}, u_3) \xrightarrow{\phi_1} (u_1, u_3) \quad (4.22)$$

izdüşüm tasviri ile

$$U_{\tau_1} \cong U_{\sigma_1} - \{u_1 = 0\} \quad (4.23)$$

elde edilir. Öte yandan, τ_1 yüzü σ_2 konisi üzerinde $\tau_1 = \sigma_1 \cap (-e_1^*)^\perp$ şeklinde tanımlıdır. Benzer şekilde U_{σ_2} ile U_{τ_1} arasında

$$(u_1, u_1^{-1}, u_3) \xrightarrow{\phi_2} (u_1^{-1}, u_1^{-1}u_3) \quad (4.24)$$

izdüşüm tasviri ve bu tasvirden,

$$U_{\tau_1} \cong U_{\sigma_2} - \{u_1^{-1} = 0\} \quad (4.25)$$

elde edilir. Yani, U_{σ_1} ile U_{σ_2} afin torsal varyeteleri

$$(X, Y) \mapsto (X^{-1}, X^{-1}Y) \quad (4.26)$$

dönüşümü ile yapıştırılmalıdır.

Benzer işlemleri σ_2 ve σ_3 konilerine uyguladığımızda, U_{σ_2} ve U_{σ_3} afin torsal varyeteleri arasındaki yapıştırma tasvirinin

$$(X^{-1}, X^{-1}Y) \mapsto (Y^{-1}, XY^{-1}) \quad (4.27)$$

olduğunu görürüz.

Son olarak, bu varyetelere $X = \frac{t_1}{t_0}$ ve $Y = \frac{t_2}{t_0}$ dönüşümlerini uygulayalım. Her bir koni için elde ettiğimiz $U_{\sigma_{i+1}}$ afin torsal varyetesi sırasıyla $\beta_i : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, ($i = 0, 1, 2$), tasviri ile

$$\begin{aligned} (X, Y) &= \left(\frac{t_1}{t_0}, \frac{t_2}{t_0}\right) \xrightarrow{\beta_0} \left(1 : \frac{t_1}{t_0} : \frac{t_2}{t_0}\right), \\ (X^{-1}, X^{-1}Y) &= \left(\frac{t_0}{t_1}, \frac{t_2}{t_1}\right) \xrightarrow{\beta_1} \left(\frac{t_0}{t_1} : 1 : \frac{t_2}{t_1}\right), \\ (Y^{-1}, XY^{-1}) &= \left(\frac{t_0}{t_2}, \frac{t_1}{t_2}\right) \xrightarrow{\beta_2} \left(\frac{t_0}{t_2} : \frac{t_1}{t_2} : 1\right) \end{aligned}$$

homojen koordinatlarını verir. O halde, $U_{\sigma_{i+1}}$ afin varyetesi $\mathbb{P}^2$ projektif uzayının $t_i \neq 0$ ile tanımlı açık altkümesine izomorftur. Dolayısıyla U_{σ_1} ile U_{σ_2} ve U_{σ_2} ile U_{σ_3} sırasıyla (4.26) ve (4.27) tasvirleri ile yapıştırılarak $(t_0 : t_1 : t_2)$ homojen koordinatları ile tanımlı $\mathbb{P}^2$ uzayı elde edilir. Böylece

$$X(\Delta) = \mathbb{P}^2 \quad \text{olur.} \quad \square \quad (4.28)$$

• Δ fanı $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ konilerinden oluşsun. Yukarda olduğu gibi, önce her bir $\sigma_i \in \Delta$ konisine karşılık gelen U_{σ_i} afin torsal varyetesi bulunur ve ortak yüzleri olan her iki koniye karşılık gelen afin torsal varyeteler yapıştırılır. Daha sonra, elde edilen torsal varyeteler kendi aralarında yine ortak yüzler boyunca yapıştırılır ve bu şekilde devam ederek verilen fana karşılık gelen torsal varyete

$$X(\Delta) = \bigsqcup_{\sigma \in \Delta} U_\sigma \quad (4.29)$$

olarak bulunur.

Örnek olarak, $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ kafesinde $n + 1$ koniden oluşan bir fanı gözönüne alalım.

$v = -e_1 - e_2 - \dots - e_n$ olmak üzere bu koniler

$$\sigma_0 = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n \rangle$$

$$\sigma_1 = \langle e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, v \rangle$$

$$\sigma_2 = \langle e_1, e_2, \dots, v, e_n \rangle$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{n-1} = \langle e_1, v, \dots, e_{n-1}, e_n \rangle$$

$$\sigma_n = \langle v, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n \rangle$$

şeklinde tanımlı olsun. Örnek 4.4 ve Örnek 4.5'te olduğu gibi, her σ_i için bir U_{σ_i} afin torsal varyetesi bulunur. Bu torsal varyetelerin $\mathbb{C}^n$ uzayına izomorf olacağı açıktır; öyleyse, U_{σ_i} varyetesi $\mathbb{P}^n$ uzayının bir açık altkümesine izomorftur. Bundan sonra, verilen konilerin ortak yüzleri sayesinde her i, j için U_{σ_i} ve U_{σ_j} yapıştırılır ve $X(\Delta) = \mathbb{P}^n$ elde edilir.

Demek ki, verilen bir fana karşılık gelen torsal varyete, fandaki her bir koniye karşılık gelen afin torsal varyetelerin bir ayrık birleşimidir. Aşağıdaki önerme ile $X(\Delta)$ torsal varyetesinin Hausdorff olduğu görülür.

Önerme 4.6 (Fulton, 1997) *Eğer σ_1 ve σ_2 ortak bir yüzde kesişen iki koni ise $U_{\sigma_1 \cap \sigma_2} \rightarrow U_{\sigma_1} \times U_{\sigma_2}$ çapraz tasviri kapalı bir gömülüştür.*

$\phi : N' \rightarrow N$ kafes homomorfizmasını, N kafesinde bir Δ fanını ve N' kafesinde bir Δ' fanını gözönüne alalım. Eğer, her $\sigma' \in \Delta$ konisi için $\phi(\sigma') \subset \sigma$ olacak şekilde bir $\sigma \in \Delta$ konisi varsa $U_{\sigma'} \rightarrow U_{\sigma} \subset X(\Delta)$ tasviri tanımlar (Oda, 1985). Bu tasvirlerin bağlanmasıyla

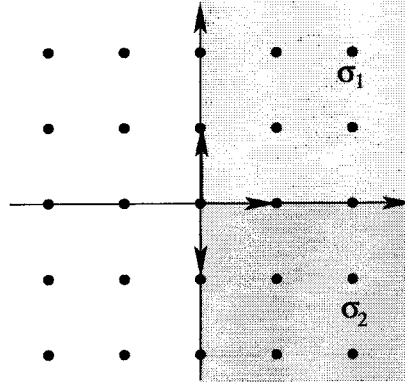
$$\phi_* : X(\Delta') \rightarrow X(\Delta) \tag{4.30}$$

tasviri elde edilir.

4.2 Diğer Örnekler

Örnek 4.7 Eğer $\Delta \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ fanı $\sigma_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ ve $\sigma_2 = \langle e_1, -e_2 \rangle$ konilerinden oluşuyorsa $X(\Delta) = \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ dir.

Çözüm. Δ fanı aşağıdaki şekildedir:



Şekil 4.6 $\sigma_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ ve $\sigma_2 = \langle e_1, -e_2 \rangle$ konileri.

Örnek 3.17'den, $U_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(X,Y)}^2$ ve $U_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(X,Y^{-1})}^2$ elde ederiz. Fandaki konilerimizin ortak yüzü $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 = \langle e_1 \rangle$ dir ve $U_{\tau} = \mathbb{C}_X \times \mathbb{C}_Y^*$ varyetesini verir (Örnek 3.20). Dolayısıyla U_{τ} üzerindeki $Y \neq 0$ koşulu ile

$$\begin{aligned} U_{\tau} &\cong U_{\sigma_1} - \{u_2 = 0\} \\ U_{\tau} &\cong U_{\sigma_2} - \{u_2^{-1} = 0\} \end{aligned}$$

izomorfizmalarını elde ederiz. U_{σ_1} ve U_{σ_2} üzerinde $Y = \frac{t_1}{t_0}$ dönüşümünü uygulayalım. $\beta_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$, ($i = 0, 1$), tasvirleri ile U_{σ_1} ve U_{σ_2} 'den projektif uzayın açık altkümelerine bire-bir eşleme elde ederiz:

$$\begin{aligned} (X, Y) &= (X, \frac{t_1}{t_0}) \xrightarrow{\beta_0} (X, (1 : \frac{t_1}{t_0})) \\ (X, Y^{-1}) &= (X, \frac{t_0}{t_1}) \xrightarrow{\beta_1} (X, (\frac{t_0}{t_1} : 1)) \end{aligned}$$

Böylece $(X, Y) \mapsto (X, Y^{-1})$ yapıştırma tasviri $(u_1, (t_0 : t_1))$ koordinatları ile tanımlı $X(\Delta) = \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ verir.

Örnek 4.8 Eğer $\Delta \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ fanı $\sigma_1 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ve $\sigma_2 = \langle e_1, e_2, -e_3 \rangle$ konilerinden oluşuyorsa $X(\Delta) = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ dir.

Çözüm. Öyleyse $U_{\sigma_1} \cong \mathbb{C}_{(X,Y,Z)}^3$ ve $U_{\sigma_2} \cong \mathbb{C}_{(X,Y,Z^{-1})}^3$ varyetelerini buluruz (Örnek 3.17). Bu iki varyeteyi $(X, Y, Z) \mapsto (X, Y, Z^{-1})$ tasviri ile yapıştıralım. Önce $Z = \frac{t_1}{t_0}$ dönüşümünü yapalım. U_{σ_1} ve U_{σ_2} üzerinde $\beta_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$, $(i = 0, 1)$ tasvirlerini uygularsak:

$$\begin{aligned} (X, Y, Z) &\xrightarrow{\beta_0} (X, Y, (1 : \frac{t_1}{t_0})) \\ (X, Y, Z^{-1}) &\xrightarrow{\beta_1} (X, Y, (\frac{t_0}{t_1} : 1)) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} U_{\sigma_1} &\cong \{(u_1, u_2, (1 : \frac{t_1}{t_0})) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1\} = \mathbb{C}^2 \times U_0 \\ U_{\sigma_2} &\cong \{(u_1, u_2, (\frac{t_0}{t_1} : 1)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1\} = \mathbb{C}^2 \times U_1 \end{aligned}$$

olur. $(X, Y, Z) \mapsto (X, Y, Z^{-1})$ tasviri ile bu varyeteleri yapıştırarak $(u_1, u_2, (t_0 : t_1))$ noktaları ile tanımlı

$$X(\Delta) = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$$

uzayını elde ederiz.

Örnek 4.9 Eğer $\Delta \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^4$ fanı, $\sigma_1 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$, $\sigma_2 = \langle e_1, e_2, -e_3 - e_4, e_4 \rangle$ ve $\sigma_3 = \langle e_1, e_2, e_3, -e_3 - e_4 \rangle$ konilerinden oluşuyorsa $X(\Delta) = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^2$ olur.

Çözüm. Örnek 2.5 ve 3.19'da olduğu gibi bu konilerin dualleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \sigma_1^\vee &= \langle e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^* \rangle, \\ \sigma_2^\vee &= \langle e_1^*, e_2^*, -e_3^*, -e_3^* + e_4^* \rangle, \\ \sigma_3^\vee &= \langle e_1^*, e_2^*, -e_4^*, e_3^* - e_4^* \rangle. \end{aligned}$$

σ_1 , σ_2 ve σ_3 konileri ile

$$\begin{aligned} U_{\sigma_0} &= \mathbb{C}_{(X,Y,Z,W)}^4, \\ U_{\sigma_1} &= \mathbb{C}_{(X,Y,Z^{-1},Z^{-1}W)}^4, \\ U_{\sigma_2} &= \mathbb{C}_{(X,Y,W^{-1},ZW^{-1})}^4 \end{aligned} \tag{4.31}$$

varyeteleri tanımlanır (Örnek 3.17). Bu varyeteler üzerinde $Z = \frac{t_1}{t_0}$ ve $W = \frac{t_2}{t_0}$ dönüşümlerini ve ardından $\beta_i : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $(i = 0, 1, 2)$ tasvirlerini uygulayarak

$$\begin{aligned} (X, Y, Z, W) &\xrightarrow{\beta_0} (X, Y, (1 : \frac{t_1}{t_0} : \frac{t_2}{t_0})) \\ (X, Y, Z^{-1}, Z^{-1}W) &\xrightarrow{\beta_1} (X, Y, (\frac{t_0}{t_1} : 1 : \frac{t_2}{t_1})) \\ (X, Y, W^{-1}, ZW^{-1}) &\xrightarrow{\beta_2} (X, Y, (\frac{t_0}{t_2} : \frac{t_1}{t_2} : 1)) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece her $U_{\sigma_{i+1}}$, $\mathbb{P}^2$ uzayının $t_i \neq 0$ ile tanımlı açık altkümelerinin birer kopyasını içerir ($i = 0, 1, 2$). Önce U_{σ_1} ve U_{σ_2} uzaylarını $(X, Y, Z, W) \mapsto (X, Y, Z^{-1}, Z^{-1}W)$ tasviri ile yapıştırıralım. Sonra, U_{σ_2} ve U_{σ_3} varyetelerini de $(X, Y, Z^{-1}, Z^{-1}W) \mapsto (X, Y, W^{-1}, ZW^{-1})$ tasviri ile yapıştırıralım. Buradan, $(u_1, u_2, (t_0 : t_1 : t_2))$ koordinatlarını elde ederiz. Dolayısıyla $X(\Delta) = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^2$ olur.

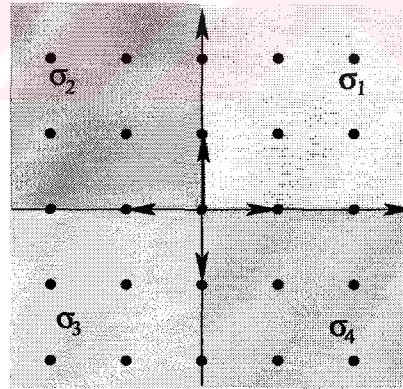
Genel olarak $\mathbb{C}^a \times \mathbb{P}^b$ uzayını elde etmek için $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^{a+b}$ de tanımlı $b+1$ koniden oluşan bir fan seçiyoruz. $v = -e_{a+1} - \dots - e_{a+b}$ olmak üzere bu konileri

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \langle e_1, \dots, e_a, e_{a+1}, \dots, e_{a+b-1}, e_{a+b} \rangle \\ \sigma_2 &= \langle e_1, \dots, e_a, e_{a+1}, \dots, e_{a+b-1}, v \rangle \\ \sigma_3 &= \langle e_1, \dots, e_a, e_{a+1}, \dots, v, e_{a+b} \rangle \\ &\vdots \\ \sigma_{b+1} &= \langle e_1, \dots, e_a, v, \dots, e_{a+b-1}, e_{a+b} \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıyoruz.

Örnek 4.10 Eğer $\Delta \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2$ fanı $\sigma_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$, $\sigma_2 = \langle -e_1, e_2 \rangle$, $\sigma_3 = \langle -e_1, -e_2 \rangle$ ve $\sigma_4 = \langle e_1, -e_2 \rangle$ konilerinden oluşuyorsa $X(\Delta) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ olur.

Çözüm. Verilen fandaki koniler aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.7 $\sigma_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$, $\sigma_2 = \langle -e_1, e_2 \rangle$, $\sigma_3 = \langle -e_1, -e_2 \rangle$ ve $\sigma_4 = \langle e_1, -e_2 \rangle$ konileri.

Her bir σ_i konisine

$$\begin{aligned} U_{\sigma_1} &\cong \mathbb{C}_{(X,Y)}^2, & U_{\sigma_2} &\cong \mathbb{C}_{(X^{-1},Y)}^2 \\ U_{\sigma_3} &\cong \mathbb{C}_{(X^{-1},Y^{-1})}^2, & U_{\sigma_4} &\cong \mathbb{C}_{(X,Y^{-1})}^2 \end{aligned}$$

afin torsal varyeteleri karşılık gelir (Örnek 3.17). Her bir varyete üzerinde $X = \frac{t_1}{t_0}$ dönüşümü yapalım. Örnek 4.4'de incelediğimiz gibi U_{σ_1} ve U_{σ_2} üzerinde birinci koordinatlar $\mathbb{P}^1$ uzayının sırasıyla $t_0 \neq 0$ ve $t_1 \neq 0$ ile tanımlı açık altkümelerine karşılık gelir.

$X \mapsto X^{-1}$ tasviri ile U_{σ_1} ve U_{σ_2} 'i yapıştırarak $((t_0 : t_1), Y)$ koordinatları ile tanımlı $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}_Y$ uzayını elde ederiz.

Benzer şekilde U_{σ_3} ve U_{σ_4} varyetelerini de $X \mapsto X^{-1}$ tasviri ile yapıştırarak bu kez $((t_0 : t_1), Y^{-1})$ koordinatları ile tanımlı $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}_{Y^{-1}}$ uzayını elde ederiz.

Son olarak, $\mathbb{P}_X^1 \times \mathbb{C}_Y$ ve $\mathbb{P}_X^1 \times \mathbb{C}_{Y^{-1}}$ uzaylarını yapıştırmamız gerekiyor. Bunun için $Y = \frac{s_1}{s_0}$ dönüşümü yapalım. Bu iki uzay sırasıyla $\mathbb{P}^1$ uzayının $s_0 \neq 0$ ve $s_1 \neq 0$ ile tanımlı altkümelerinin birer kopyasını içerir. Dolayısıyla $Y \mapsto Y^{-1}$ tasviri ile $\mathbb{P}_X^1 \times \mathbb{C}_Y$ ve $\mathbb{P}_X^1 \times \mathbb{C}_{Y^{-1}}$ uzaylarını yapıştırarak $X(\Delta) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \{((t_0 : t_1), (s_0 : s_1))\}$ projektif torsal varyeteyi elde ederiz.



5. TORUS ETKİSİ ve YÖRÜNGELERİ

5.1 Afin Torsal Varyete Üzerinde Yörüngeler

n -boyutlu N kafesi için cebirsel torusun

$$T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*) = \text{Spek}(\mathbb{C}[M]) = U_{\{0\}} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlandığını hatırlayalım. Bu bölümde, önceki bölümlerde bulduğumuz afin ve projektif torsal varyeteler üzerindeki torus etkisini ve yörüngelerini çalışacağız.

Tanım 5.1 G bir grup ve A herhangi bir küme olsun. Her $g \in G$ ve $a \in A$ için $(g, a) \mapsto g \cdot a$ ile tanımlanan bir $f : G \times A \rightarrow A$ tasvirini gözönüne alalım.

(i) $g, h \in G$ ve $a \in A$ için $g(ha) = (gh)a$ ve

(ii) G grubunun etkisiz elemanı e olmak üzere $ea = a$

özelliklerini sağlıyorsa f tasvirine G grubunun A üzerine etkisi denir.

Tanım 5.2 Yukardaki tanımda verilen A kümesinin

$$O_a = \{g \cdot a \mid g \in G\} \quad (5.2)$$

şeklindeki noktalarının kümesine f etkisinin a noktasına göre yörüngesi denir.

Eğer $a, b \in A$ için $g \cdot a = b$ ise a ve b aynı yörünge üzerindedir. Bu durumda b , a 'ya denk kabul edilir ve $a \sim b$ ile gösterilir. A 'nın her elemanı bir yörüngeye aittir. Grup etkisinin yörüngeleri A kümesini ayrık altkümelere ayırır ve

$$A = \bigsqcup_{a \in A} O_a$$

şeklinde yazılır (Dummit, 1991).

Afin cebirsel torus $T_N = (\mathbb{C}^*)^n$, çarpma işlemine göre bir gruptur, yani $t_1, t_2 : M \rightarrow \mathbb{C}^*$ olmak üzere her $u \in M$ için

$$(t_1 \cdot t_2)(u) = t_1(u) \cdot t_2(u) \in \mathbb{C}^* \quad (5.3)$$

dir. Birim eleman, her $u \in M$ için $t(u) = 1$ eşitliğini sağlayan t elemanıdır.

$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}) \in \mathbb{Z}^n$ olmak üzere $m_i = \alpha_{i1}e_1^* + \dots + \alpha_{in}e_n^*$ vektörleri S_σ için bir üreteç kümesi olsun, $i = 1, \dots, r$. U_σ 'nin $V(I) \subset \mathbb{C}^r$ ile temsil edildiğini kabul edelim: $U_\sigma \cong V(I)$. I ideali $\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_r}$ üstel terimleri arasındaki bağıntılardan elde edildiği

için $(\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_r}(t)) = t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_r} \in V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^r$ olacaktır. Bu durumda T_N ile U_σ arasında

$$t \xrightarrow{\phi} (\chi^{m_1}(t), \dots, \chi^{m_r}(t))(t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_r}) \in V(I) \cap (\mathbb{C}^*)^r \quad (5.4)$$

şeklinde tanımlanan ϕ izomorfizması elde edilir. Böylece T_N , ϕ tasviri ile U_σ içine gömülebilir denir (Dummit, 1991).

Örnek 5.3 $U_\sigma \cong V(Z_2^2 - Z_1 Z_3)$ torsal varyetesinin boyutu 2 olduğundan 2-boyutlu afin cebirsel torusun U_σ üzerindeki etkisi, her $t = (t_1, t_2) \in T_N$ için

$$(t_1, t_2) \mapsto (\chi^{v_1}(t), \chi^{v_2}(t), \chi^{v_3}(t))$$

ile tanımlanır. S_σ yarı-grubu, $v_1 = e_1^*$, $v_2 = e_1^* + e_2^*$ ve $v_3 = e_1^* + 2e_2^*$ vektörleri ile üretildiğinden $(\chi^{v_1}, \chi^{v_2}, \chi^{v_3}) = (X_1, X_1 X_2, X_1 X_2^2)$ 'dir. Dolayısıyla $T_N \hookrightarrow U_\sigma$ gömülüğü $(t_1, t_2) \mapsto (t_1, t_1 t_2, t_1 t_2^2)$ şeklinde tanımlıdır.

Daha genel olarak, $x \in U_\sigma$ elemanı $x : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ yarı-grup homomorfizması tanımlar. Öyleyse,

$$T_N \times U_\sigma \longrightarrow U_\sigma \quad (5.5)$$

etkisi tanımlanabilir. Bu etki, her $u \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ için

$$(t \cdot x)(u) = t(u) \cdot x(u) \in \mathbb{C} \quad (5.6)$$

olmak üzere $(t \cdot x) \mapsto t \cdot x$ ile tanımlanmıştır. T_N -etkisinin U_σ 'nin bir temel açık altkümesi olan $U_{\{0\}} \cong T_N$ kümesine kısıtlaması, T_N üzerindeki grup etkisi ile aynıdır. Daha genel olarak söylemek istersek,

Önerme 5.4 Eğer $\tau \prec \sigma$ bir yüz ise U_σ üzerindeki T_N etkisi, U_τ üzerindeki T_N -etkisinin genişletilmiştir.

Afin torsal varyeteler arasında tanımlanan yapıştırma işleminden

$$T_N \times X(\Delta) \longrightarrow X(\Delta) \quad (5.7)$$

etkisi elde edilir.

Şimdi $X(\Delta)$ afin varyetesinin T_N -etkisinin yörüngelerinin ayrık bir birleşimi olarak yazılabileceğini görelim: Bunun için, önce T_N grup etkisinin yörüngelerini tanıyalım. N kafesindeki bir Δ fanındaki bir σ konisini gözönüne alalım. Koninin her τ yüzüne karşılık U_σ üzerinde bir yörünge vardır ve her yörünge bir x_τ özel noktası içerir.

Tanım 5.5 Her $\tau \prec \sigma$ yüzü için

$$u \mapsto \begin{cases} 1 & -u \in S_\tau \text{ ise} \\ 0 & -u \notin S_\tau \text{ ise} \end{cases} \quad (5.8)$$

şeklinde tanımlanan $x_\tau : S_\tau \rightarrow \mathbb{C}$ yarı-grup homomorfizmasına özel nokta adı verilir.

Önerme 5.6 $u \in S_\sigma$ ise $-u \in S_\sigma$ olması için gerek ve yeter koşul $u \in \tau^\perp \cap M$ olmasıdır.

İspat. $-u \in S_\sigma$ olsun. Bu durumda, her $v \in \tau$ için $(-u, v) \geq 0$ sağlanır. Öyleyse $(u, v) \leq 0$ olur. $u \in S_\tau$ olması $(u, v) = 0$ olmasını gerektirir. O halde $u \in \tau^\perp \cap M$ 'dir. Eğer $u \in \tau^\perp \cap M$ ise her $v \in \tau$ için $(u, v) = 0$ 'dır. Bu durumda $(-u, v) = -(u, v) = 0$ ve dolayısıyla $-u \in S_\sigma$ elde edilir. $\square$

Dolayısıyla x_τ özel noktası

$$u \mapsto \begin{cases} 1 & u \in \tau^\perp \cap M \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (5.9)$$

şeklinde de tanımlanabilmektedir.

Tanım 5.7 $x_\tau, \tau \prec \sigma$ yüzüne karşılık gelen özel nokta olmak üzere U_σ üzerinde x_τ noktasına ait yörünge

$$O_\tau = T_N \cdot x_\tau \quad (5.10)$$

kümesidir.

Bir yörüngenin kapanışı

$$V(\tau) = O_\tau \cup \{0\} \quad (5.11)$$

şeklinde tanımlıdır.

Önerme 5.8 Eğer $\text{boyut}(\sigma) = n$ ise O_σ , n -boyutlu afin uzayda orijine karşılık gelir.

Önerme 5.9 Eğer $\text{boyut}(\tau) = k$ ise $O_\tau \cong (\mathbb{C}^*)^{n-k}$ dır.

Not 5.10 $\tau = \{0\}$ ise $O_\tau = T_N$ olur. $T_N \hookrightarrow U_\sigma$ ile T_N noktaları ile U_σ 'nın orijin dışındaki tüm noktaları arasında bire-bir eşleme elde edilir (bkz. (5.4)). Dolayısıyla $V(\tau) = T_N \cup \{0\} = U_\sigma$ olur. Bu da T_N, U_σ 'nın açık ve yoğun bir altkümesi olduğunu söyler.

Örnek 5.11 $U_\sigma = V(Z_2^2 - Z_1 Z_3)$ afin torsal varyetesinin yörüngelerini bulalım.

Çözüm. Bu varyeteyi $\sigma = \langle 2e_1 - e_2, e_2 \rangle$ konisine karşılık gelen afin torsal varyete olarak bulmuştuk (bkz. Örnek 3.18).

Koninin yüzleri $\tau_1 = \sigma$, $\tau_2 = \langle 2e_1 - e_2 \rangle$, $\tau_3 = \langle e_2 \rangle$ ve $\tau_4 = \{0\}$ 'dir. Her bir yüze karşılık gelen özel noktalar ve bu noktalara ait yörüngeler aşağıdaki gibi bulunur:

$\tau_1 = \sigma$ ise $\tau_1^\perp = \{0\}$ dir. Bu durumda, $v_1, v_2, v_3 \notin \tau_1^\perp$ olduğu için, tanım 5.5'den $x_{\tau_1} = (0, 0, 0)$ olur. Bu noktaya karşılık gelen yörünge

$$O_{\tau_1} = T_N \cdot x_\sigma = \{(0, 0, 0)\} \in (\mathbb{C}^*)^3$$

elde edilir.

$\tau_2 = \langle 2e_1 - e_2 \rangle$ ise $\tau_2^\perp = \langle e_1^* + 2e_2^*, -e_1^* - 2e_2^* \rangle$ dir. Bu durumda, $v_1, v_2 \notin \tau_2^\perp$ ve $v_3 \in \tau_2^\perp$ olduğu için, tanım 5.5'den $x_{\tau_2} = (0, 0, 1)$ olur. Öyleyse x_{τ_2} özel noktasına karşılık gelen yörünge

$$\begin{aligned} O_{\tau_2} &= T_N \cdot x_{\tau_2} \\ &= \{(t_1, t_1 t_2, t_1 t_2^2) \cdot (0, 0, 1)\} \\ &= \{(0, 0, t_1 t_2^2)\} \in (\mathbb{C}^*)^3 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$O_{\tau_2} = \{(0, 0, u_3) \mid u_3 = t_1 t_2^2 \in \mathbb{C}^*\} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C}^* \quad (5.12)$$

şeklindedir. $(0, 0, u_3) \mapsto u_3$ izdüşüm tasviri ile $O_{\tau_2} \cong \mathbb{C}_{Z_3}^*$ olur. Dolayısıyla O_{τ_2} yörüngesinin kapanışı, U_σ üzerinde Z_3 ile tanımlanan $V(\tau_2) = \mathbb{C}^* \cup \{0\} = \mathbb{C}_{Z_3}$ kompleks doğrusudur.

$\tau_3 = \langle e_2 \rangle$ ise $\tau_3^\perp = \langle \mp e_1^* \rangle$ dir. Bu durumda, $v_1 \in \tau_3^\perp$ ve $v_2, v_3 \notin \tau_3^\perp$ olduğu için, tanım 5.5'den $x_{\tau_3} = (1, 0, 0)$ olur. Öyleyse bu noktaya karşılık gelen yörünge

$$O_{\tau_3} = T_N \cdot x_{\tau_3} = \{(t_1, 0, 0) \in (\mathbb{C}^*)^3\}$$

elde edilir. Yani

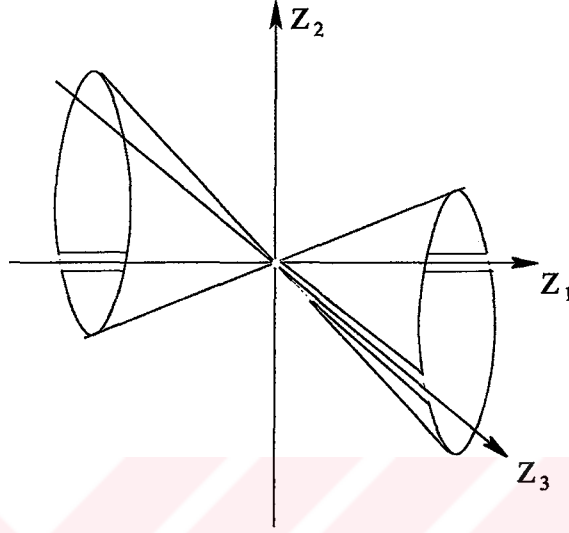
$$O_{\tau_3} = \{(u_1, 0, 0) \mid u_1 = t_1 \in \mathbb{C}^*\} = \mathbb{C}^* \times \{0\} \times \{0\} \quad (5.13)$$

şeklindedir. $(u_1, 0, 0) \mapsto u_1$ izdüşüm tasviri ile $O_{\tau_3} \cong \mathbb{C}_{Z_1}^*$ olur. Dolayısıyla O_{τ_3} yörüngesinin kapanışı U_σ üzerinde Z_1 ile tanımlanan $V(\tau_3) = \mathbb{C}^* \cup \{0\} = \mathbb{C}_{Z_1}$ kompleks doğrusudur.

$\tau_4 = \{0\}$ ise $\tau_4^\perp = \langle \mp e_1^*, \mp e_2^* \rangle = M_{\mathbb{R}}$ dir. Bu durumda, $v_1, v_2, v_3 \in \tau_4^\perp$ olduğu için $x_{\tau_4} = (1, 1, 1)$ olur. O halde bu noktaya karşılık gelen yörünge

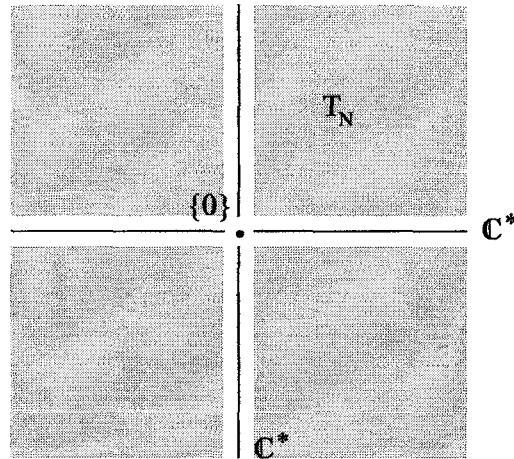
$$O_{\tau_4} = T_N \cdot x_{\tau_4} = \{(t_1, t_1 t_2, t_1 t_2^2)\} \in (\mathbb{C}^*)^3$$

elde edilir. Bu da $T_N = (\mathbb{C}^*)^2$ torusun U_σ içine gömülüşüne eşdeğerdir. Dolayısıyla $O_{\tau_4} \cong T_N$ olur. $t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*$ olduğundan T_N yörüngesi, U_σ üzerinde $Z_2 Z_3 \neq 0$ ile tanımlı noktalar kümesine karşılık gelir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 $U_\sigma = V(Z_2^2 - Z_1 Z_3)$ üzerinde $T_N = (\mathbb{C}^*)^2$.

σ konisinin 0-boyutlu yüzüne karşılık $T_N = (\mathbb{C}^*)^2$ yörüngesini, 1-boyutlu yüzlerine karşılık $\mathbb{C}^*$ yörüngesini ve koninin kendisine karşılık orijin elde etmiş oluyoruz. Bu yörüngeleri aşağıdaki şekilde görmekteyiz:



Şekil 5.2 $U_\sigma = V(Z_2^2 - Z_1 Z_3)$ üzerinde tüm yörüngeleri.

Örnek 5.12 $U_\sigma = (\mathbb{C}^*)^n$ afin torsal varyetesinin tek yörüngesi T_N dir.

Çözüm. U_σ afin torsal varyetesi, $\sigma = \{0\} \subset N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ konisine karşılık geldiği için $\tau = \sigma$ dir. Özel nokta $x_\tau = (1, 1, \dots, 1)$ dir. Bu durumda $O_\tau = T_N$ olur.

Örnek 5.13 $U_\sigma = \mathbb{C}^n$ 'in yörüngelerini bulalım.

Çözüm. U_σ afin torsal varyetesi, $N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ 'de tanımlanan $\sigma = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ konisinden elde edilir (Örnek 3.17). $T_N \hookrightarrow U_\sigma$

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n)$$

ile tanımlıdır.

σ 'nın 1-boyutlu yüzleri $\tau_i = \langle e_i \rangle$ şeklindedir, $i = 1, \dots, n$.

$\tau_i^\perp = \langle \mp e_1^*, \dots, \mp e_{i-1}^*, \mp e_{i+1}^*, \dots, \mp e_n^* \rangle$ olduğundan bu yüze karşılık gelen özel nokta, yalnızca i . koordinatı sıfır olan noktadır: $x_{\tau_i} = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$. Böylece τ_i için $O_{\tau_i} = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}^*)^n \mid x_i = 0\}$ elde edilir.

σ 'nin iki boyutlu yüzleri $\tau_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ şeklindedir, $i \neq j$. Bu durumda

$$\tau_{ij}^\perp = \langle \mp e_1^*, \dots, \mp e_{i-1}^*, \mp e_{i+1}^*, \dots, \mp e_{j-1}^*, \mp e_{j+1}^*, \dots, \mp e_n^* \rangle$$

olur. Dolayısıyla bu yüzlere yalnızca i ve j . koordinatları sıfır olan özel nokta karşılık gelir: $x_{\tau_{ij}} = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$. Böylece $O_{\tau_{ij}} = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}^*)^n \mid x_i, x_j = 0\}$ elde edilir.

Şimdi σ 'nın $(n-1)$ -boyutlu yüzlerini ele alalım. Bu yüzler $\tau = \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle$ şeklinde tanımlıdır. $\tau^\perp = \langle \mp e_i^* \rangle$ olduğundan x_τ , yalnızca i . koordinatı 1 olan noktadır: $x_\tau = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Dolayısıyla $O_\tau = \{(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0) \in (\mathbb{C}^*)^n\}$ elde edilir.

σ 'nın k -boyutlu yüzlerinin sayısı $C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ formülüyle belirlidir. Toplam olarak

$$C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, n-1) + C(n, n) = 2^n \quad (5.14)$$

tane yüzü vardır.

Genel olarak $\mathbb{C}^n$ 'in yörüngeleri, $\{1, \dots, n\}$ kümesinin tüm altkümelerinden seçilen I sayıları ile

$$O_I = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n \mid i \in I \text{ için } u_i = 0, i \notin I \text{ için } u_i \neq 0\} \quad (5.15)$$

şeklindedir.

Örnek 5.14 $U_\sigma = \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ yörüngelerini bulalım.

Çözüm. Burada $\sigma = \langle e_1, \dots, e_d \rangle$ ve $S_\sigma = \langle e_1^*, \dots, e_d^*, \mp e_{d+1}^*, \dots, \mp e_n^* \rangle$ 'dir (Örnek 3.22). $T_N \hookrightarrow U_\sigma$ gömülüğü

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n, t_{d+1}^{-1}, \dots, t_n^{-1}) \quad (5.16)$$

ile tanımlanır.

σ , d vektörle üretildiğinden 2^d tane yüzü vardır. 1-boyutlu yüzleri $\tau_i = \langle e_i \rangle$ şeklindedir, ($i = 1, \dots, d$). $\tau_i^\perp = \langle \mp e_1^*, \dots, \mp e_{i-1}^*, \mp e_{i+1}^*, \dots, \mp e_n^* \rangle$ olduğundan τ_i yüzüne yalnızca i . koordinatı sıfır olan özel nokta karşılık gelir: $x_\tau = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$. Böylece bu noktaya karşılık gelen yörünge

$$O_\tau = \{(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n, u_{d+1}^{-1}, \dots, u_n^{-1} \mid u_i \in \mathbb{C}^*)\}$$

elde edilir. $u_{d+1} \neq 0, \dots, u_n \neq 0$ ile tanımlayacağımız

$$(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n, u_{d+1}^{-1}, \dots, u_n^{-1}) \mapsto (u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) \quad (5.17)$$

izdüşüm tasviri ile

$$O_\tau \cong \{(u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{C}^*)^n \mid u_i = 0\}$$

elde edilir. Bu kez

$$(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) \mapsto (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) \quad (5.18)$$

izdüşüm tasviri ile $O_\tau \cong (\mathbb{C}^*)^{n-1}$ olduğu görülür.

σ 'nın 2-boyutlu yüzleri e_i ve e_j vektörleri ile üretilir, $i \neq j$, ($i, j = 1, \dots, d$). Bu yüzlere karşılık yalnızca i . ve j . koordinatları sıfır olan özel nokta elde edilir:

$x_\tau = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1)$. Böylece O_τ , i . ve j . koordinatları sıfır olan noktalardan oluşur:

$$O_\tau = \{(u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{C}^*)^n \mid u_i = 0, u_j = 0\}.$$

Sırasıyla (5.17) ve (5.18) ile benzer izdüşüm tasvirleri uygulanırsa $O_\tau \cong (\mathbb{C}^*)^{n-2}$ elde edilir.

Benzer şekilde σ 'nin k -boyutlu yüzleri için inceleme yapılabilir. Genel olarak U_σ 'nin yörüngeleri, I , $\{1, \dots, n\}$ kümesinin sırasıyla tüm altkümelerinden seçilmek üzere şu şekilde ifade edilir:

$$O_i = \{(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n \mid i \in I \text{ için } u_i = 0, i \notin I \text{ için } u_i \neq 0\} \quad (5.19)$$

5.2 Projektif Torsal Varyete Üzerinde Yörüngeler

$N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ kafesinde bir Δ fanını ve bu fandaki bir σ konisini gözönüne alalım. Koninin her τ yüzüne karşılık N kafesinin $\tau \cap N$ ile üretilen bir altkafesi $N_{\tau} = \tau \cap N$ şeklinde tanımlıdır. Şimdi,

$$N(\tau) = N/N_{\tau} \quad (5.20)$$

bölüm kafesini oluşturalım. $N(\tau)$ bölüm kafesinin duali

$$M(\tau) = \tau^{\perp} \cap M \quad (5.21)$$

olur.

Önerme 5.15 (*Oda, 1985*) τ yüzüne karşılık gelen yörünge $N(\tau)$ bölüm kafesine karşılık gelen torusa izomorftur:

$$O_{\tau} \cong T_{N(\tau)} = \text{Hom}(M(\tau), \mathbb{C}^*) = \text{Spek}(\mathbb{C}[M(\tau)]). \quad (5.22)$$

Şimdi, tek konili $\Delta = \{\sigma\}$ fanını gözönüne alarak (5.22) tanımına örnek verelim.

Örnek 5.16 $X(\sigma) = V(Z_2^2 - Z_1 Z_3)$ varyetesi üzerindeki yörüngeler nelerdir?

Çözüm. $\tau_1 = \sigma$ için $\sigma^{\perp} = \{0\}$ olduğundan $\mathbb{C}[\sigma^{\perp} \cap M]$ yalnızca sıfır polinomundan oluşur. O halde $O_{\sigma} = \text{Spek}(\mathbb{C}[\sigma^{\perp} \cap M])$ orijine karşılık gelir.

$\tau_2 = \langle 2e_1 + e_2 \rangle$ için $\tau_2^{\perp} = \langle e_1^* + e_2^*, -e_1^* - e_2^* \rangle$ olduğundan $\mathbb{C}[\tau_2^{\perp} \cap M] = \mathbb{C}[XY^2, X^{-1}Y^{-2}]$ polinom halkası tanımlanır. O halde bu yüze karşılık

$$O_{\tau_2} = \text{Spek}(\mathbb{C}[XY^2, X^{-1}Y^{-2}]) \cong \mathbb{C}_{XY^2}^*$$

yörüngesi elde edilir (Örnek 3.15).

$\tau_3 = \langle e_2 \rangle$ için $\tau_3^{\perp} = \langle \mp e_1^* \rangle$ olduğundan $\mathbb{C}[\tau_3^{\perp} \cap M] = \mathbb{C}[X, X^{-1}]$ bulunur. Böylece $O_{\tau_3} = \text{Spek}(\mathbb{C}[X, X^{-1}]) \cong \mathbb{C}^*$ yörüngesi elde edilir.

Benzer şekilde, $\tau_4 = \{0\}$ için $\tau_4^{\perp} = M_{\mathbb{R}}$ olduğundan $\mathbb{C}[\tau_4^{\perp} \cap M] = \mathbb{C}[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$ bulunur. Bu yüze karşılık $O_{\tau_4} \cong (\mathbb{C}^*)^2$ yörüngesi elde edilir.

Tanım 5.17 Bir $\Delta \subset N_{\mathbb{R}}$ fanındaki, bir τ konisini (bir yüzün de bir koni olduğunu hatırlayalım) gözönüne alalım. Fan içinde, τ konisini yüz olarak içeren bütün konilerin oluşturduğu kümeye τ konisinin yıldız kümesi denir ve $\text{Yıldız}(\tau)$ ile gösterilir.

$Yıldız(\tau)$ 'dan yola çıkarak yeni bir fanı şu şekilde oluşturuyoruz. $Yıldız(\tau)$ 'ya ait her σ konisinin $N(\tau)$ kafesindeki görüntülerini ele alalım:

$$\bar{\sigma} = (\sigma + (N_\tau)_R) / (N_\tau)_\mathbb{R} \subset N_\mathbb{R} / (N_\tau)_\mathbb{R} = N(\tau)_\mathbb{R}. \quad (5.23)$$

Bu konilerle oluşturulan aşağıdaki kümeyi tanımlayalım:

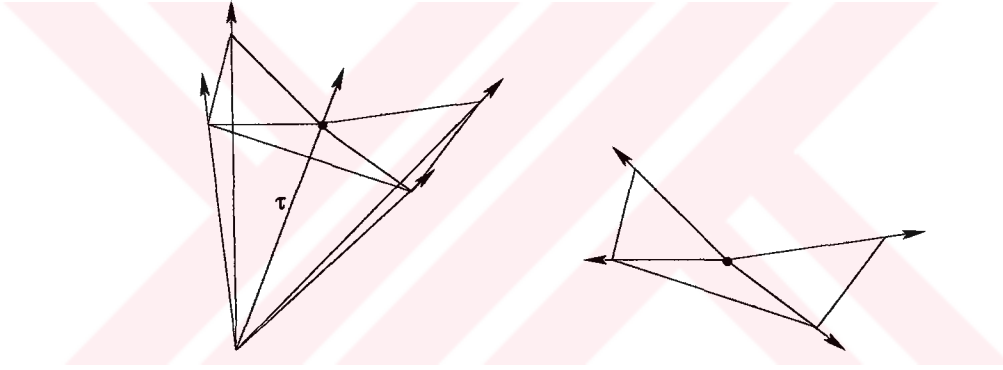
$$\Delta(\tau) = \{\bar{\sigma} \mid \tau \prec \sigma\}. \quad (5.24)$$

Önerme 5.18 (Cox, 2000b) $N(\tau) = N/N_\tau$ ve $\Delta(\tau) = \{\bar{\sigma} \mid \sigma \in Yıldız(\tau)\}$ olsun. O halde

(i) Her $\sigma \in Yıldız(\tau)$ için $\bar{\sigma}$, $N(\tau)_\mathbb{R}$ kafesinde tam dışbükey rasyonel polihedral konidir.

(ii) $\Delta(\tau)$, $N(\tau)_\mathbb{R}$ 'de bir fanıdır.

Örnek olarak, aşağıdaki şekilde, $N_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ kafesinde bir fan ve bu fandaki τ yüzüne karşılık gelen $\Delta(\tau)$ görülmektedir.



Şekil 5.3 3-boyutlu kafeste bir τ yüzü ve $\Delta(\tau)$ fanı.

τ yu yüz kabul eden bir $\sigma \in \Delta$ konisini ele alalım. Bu koniler ile aşağıdaki şekilde bir afin torsal varyete tanımlanır:

$$U_\sigma(\tau) = \text{Spek}(\mathbb{C}[\bar{\sigma}^\vee \cap M(\tau)]) = \text{Spek}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M]). \quad (5.25)$$

Dikkat edilirse, $\sigma = \tau$ için $U_\tau(\tau) = O_\tau$ olur. Çünkü

$$U_\tau(\tau) = \text{Spek}(\mathbb{C}[\tau^\vee \cap \tau^\perp \cap M(\tau)]) = \text{Spek}(\mathbb{C}[\tau^\perp \cap M]). \quad (5.26)$$

Eğer Δ fanında, τ yu yüz kabul eden koniler $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ ise $U_{\sigma_i}(\tau)$ varyetelerini, ($i = 1, \dots, s$), yapıştırarak $X(\Delta(\tau)) = U_{\sigma_1}(\tau) \cup \dots \cup U_{\sigma_s}(\tau)$ torsal varyetesini elde ederiz.

Bundan başka, $U_{\sigma_i}(\tau)$ varyeteleri $V(\tau)$ kapanışının bir örtüsüdür: $V(\tau) = \bigcup U_{\sigma_i}(\tau)$ (Fulton, 1997). Bu

$$V(\tau) = X(\Delta(\tau)) \quad (5.27)$$

olması anlamına gelir.

$U_\sigma(\tau)$ ve U_σ arasında

$$u \mapsto \begin{cases} u & u \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (5.28)$$

ile verilen bir “sıfırla genişletme” tasviri tanımlanabilir. Bu varyetelerin noktalarını homomorfizma olarak düşünürsek

$$U_\sigma(\tau) = \text{Hom}(\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M, \mathbb{C}) \hookrightarrow \text{Hom}(\sigma^\vee \cap M, \mathbb{C}) = U_\sigma \quad (5.29)$$

olur. $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$, $\sigma^\vee$ konisinin bir yüzü olduğundan yarı-grup homomorfizmalarının sıfırla genişletmesi yine bir yarı-grup homomorfizmasıdır. (5.29) tasvirine karşılık, polinom halkaları arasında

$$\chi^u \mapsto \begin{cases} \chi^u & u \in \sigma^\vee \cap \tau^\perp \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (5.30)$$

ile $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \rightarrow \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M]$ örten tasviri tanımlanır.

Eğer σ , bir $\sigma' \in \Delta$ konisinin yüzü ise $U_\sigma \rightarrow U_{\sigma'}$ tasviri U_σ varyetesini $U_{\sigma'}$ içine gömer (bkz. Önerme 3.13). Benzer şekilde $U_\sigma(\tau)$ ile $U_{\sigma'}(\tau)$ arasında bir gömülüş tanımlanabilir. Böylece aşağıdaki değişmeli diyagram oluşturulur:

$$\begin{array}{ccc} U_\sigma(\tau) & \longrightarrow & U_{\sigma'}(\tau) \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_\sigma & \longrightarrow & U_{\sigma'} \end{array} \quad (5.31)$$

Burada, dikey yönde belirtilen tasvirler sıfırla genişletme, yatay tasvirler ise kısıtlama tasvirleridir. Yani,

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{Hom}(\sigma^\vee \cap M, \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(\sigma^\vee \cap M, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{Hom}(\sigma^\vee \cap M, \mathbb{C}) \end{array} \quad (5.32)$$

dir. Dolayısıyla, fandaki tüm koniler için bu diyagram gözönüne alınırsa, $V(\tau) \hookrightarrow X(\Delta)$ olduğu görülür.

Örnek 5.19 $X(\Delta) = \mathbb{P}^1$ torsal varyetesinin yörüngelerini bulalım.

Çözüm. Bu varyeteyi, $\Delta = \{\sigma_1 = \langle e_1 \rangle, \sigma_2 = \langle e_2 \rangle\}$ fanından elde ettik (Örnek 4.4).

$\tau_1 = \langle e_1 \rangle$ yüzü yalnızca σ_1 için bir yüz ama σ_2 için değildir. (5.25) eşitliğinden

$U_{\sigma_1}(\tau_1) = \{0\}$ elde ederiz. $U_{\sigma_1} \hookrightarrow \mathbb{P}^1$, $X \mapsto (1 : X)$ tasviri $U_{\sigma_1}(\tau_1) \hookrightarrow \mathbb{P}^1$, $0 \mapsto (1 : 0)$ tasvirini verir. Buradan $V(\tau_1) = \{(1 : 0) \in \mathbb{P}^1\}$ elde ederiz.

$\tau_2 = \langle -e_1 \rangle$ yüzü için $\tau_2 \prec \sigma_2$ ama $\tau_2 \not\prec \sigma_1$ dir. (5.25) eşitliği $U_{\sigma_1}(\tau_2) = \{0\}$ verir. $U_{\sigma_1} \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ gömülüsü $X^{-1} \mapsto (X^{-1} : 1)$ şeklinde tanımlıdır, dolayısıyla $U_{\sigma_1}(\tau_2) \hookrightarrow \mathbb{P}^1$, $0 \mapsto (0 : 1)$ olur. Bu durumda $V(\tau_2) = \{(0 : 1) \in \mathbb{P}^1\}$ elde edilir.

$\tau_3 = \{0\}$ yüzü için (5.25) eşitliği $U_{\sigma_1}(\tau_3) = U_{\sigma_1} \cong \mathbb{C}_X$ ve $U_{\sigma_2}(\tau_3) = U_{\sigma_2} \cong \mathbb{C}_{X^{-1}}$ verir. Bu varyetelerin yapıştırılmasıyla $V(\tau) \cong \mathbb{P}^1$ varyetesi bulunur.

Örnek 5.20 $X(\Delta) = \mathbb{P}^2$ varyetesinin yörüngelerini bulalım.

Çözüm. Δ fanı $\sigma_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$, $\sigma_2 = \langle -e_1 - e_2, e_2 \rangle$ ve $\sigma_3 = \langle e_1, -e_1 - e_2 \rangle$ konilerinden oluşur (bkz. Örnek 4.5).

$\tau_1 = \langle e_1 \rangle$ olsun. $\tau_1 \prec \sigma_1$, $\tau_1 \prec \sigma_3$ ve $\tau_1 \not\prec \sigma_2$ olduğundan $U_{\sigma_1}(\tau_1) \cong \mathbb{C}_Y$ ve $U_{\sigma_3}(\tau_1) \cong \mathbb{C}_{Y^{-1}}$ elde ederiz. Buradan

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y^{-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, Y) & \longrightarrow & (XY^{-1}, Y^{-1}) \end{array} \quad (5.33)$$

diyagramını elde ederiz (bkz. (5.31) diyagramı).

$Y \mapsto Y^{-1}$ tasviri ile $U_{\sigma_1}(\tau_1)$ ve $U_{\sigma_3}(\tau_1)$ varyetelerini yapıştırarak $\mathbb{P}^1$ elde ederiz (bkz. Örnek 4.4). Öte yandan, U_{σ_1} varyetesi $\mathbb{P}^2$ uzayının U_0 açık altkümesine ve U_{σ_3} varyetesi $\mathbb{P}^2$ uzayının U_2 açık altkümesine karşılık gelir. O halde U_{σ_1} ve U_{σ_3} varyetelerinin yapıştırılması $\mathbb{P}^2$ uzayında $\{(t_0 : 0 : t_2)\}$ homojen koordinatlarını verir. Dolayısıyla $V(\tau) \hookrightarrow X(\Delta(\tau))$ izomorfizması $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \{(t_0 : 0 : t_2) \in \mathbb{P}^2\}$ şeklinde tanımlıdır.

$\tau_2 = \langle e_2 \rangle$ olsun. $\tau_2 \prec \sigma_1$, $\tau_2 \prec \sigma_2$ ve $\tau_2 \not\prec \sigma_3$ olduğundan $U_{\sigma_1}(\tau_2) \cong \mathbb{C}_X$ ve $U_{\sigma_2}(\tau_2) \cong \mathbb{C}_{X^{-1}}$ elde ederiz. Buradan

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X^{-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, Y) & \longrightarrow & (X^{-1}, X^{-1}Y) \end{array} \quad (5.34)$$

diyagramını elde ederiz (bkz. (5.31) diyagramı).

$X \mapsto X^{-1}$ yapıştırma tasviri ile $U_{\sigma_1}(\tau_2)$ ve $U_{\sigma_2}(\tau_2)$ varyetelerini yapıştırarak $V(\tau) = \mathbb{P}^1$ elde ederiz. U_{σ_1} ve U_{σ_2} sırasıyla $\mathbb{P}^2$ uzayının U_0 ve U_1 altkümelerine karşılık gelir. O halde bu varyeteleri yapıştırarak $\mathbb{P}^2$ uzayında $\{(t_0 : t_1 : 0)\}$ homojen koordinatlarını elde ederiz. Dolayısıyla $V(\tau) \hookrightarrow X(\Delta(\tau))$ izomorfizması $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \{(t_0 : t_1 : 0) \in \mathbb{P}^2\}$ ile tanımlıdır.

Bu kez $\tau_3 = \langle -e_1 - e_2 \rangle$ olsun. $\tau_3 \prec \sigma_2$, $\tau_3 \prec \sigma_3$ ve $\tau_3 \not\prec \sigma_1$ olduğundan $U_{\sigma_2}(\tau_3) \cong \mathbb{C}_{X^{-1}Y}$ ve $U_{\sigma_3}(\tau_3) \cong \mathbb{C}_{XY^{-1}}$ olur. Bu varyeteleri $X^{-1}Y \mapsto XY^{-1}$ tasviri ile yapıştırarak $V(\tau_3) = \mathbb{P}^1$ elde ederiz (Örnek 4.4). Ayrıca U_{σ_2} ve U_{σ_3} varyeteleri $\mathbb{P}^2$ uzayının U_1 ve U_2

altkümelerine karşılık gelir. U_{σ_2} ve U_{σ_3} varyetelerini yapıştırarak $\mathbb{P}^2$ uzayında $\{(0 : t_1 : t_2)\}$ homojen koordinatlarını elde ederiz. Dolayısıyla $V(\tau_3) \hookrightarrow \{(0 : t_1 : t_2) \in \mathbb{P}^2\}$ olur.

Benzer şekilde $\tau_4 = \sigma_1$, $\tau_5 = \sigma_2$ ve $\tau_6 = \sigma_3$ için

$$\begin{aligned} V(\tau_4) &\hookrightarrow \{(1 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^2\} \\ V(\tau_5) &\hookrightarrow \{(0 : 1 : 0) \in \mathbb{P}^2\} \\ V(\tau_6) &\hookrightarrow \{(0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^2\} \end{aligned} \tag{5.35}$$

elde edilir.

$\tau_7 = \{0\}$ için (5.25) eşitliği ile $U_{\sigma_{i+1}}(\tau_7) = U_{\sigma_{i+1}} \cong \mathbb{C}^2$ olur. Her bir $U_{\sigma_{i+1}}$ varyetesi, $\mathbb{P}^2$ uzayının bir U_i altkümesine izomorf olduğuna göre $V(\tau_7) \cong \mathbb{P}^2$ elde edilir ($i = 0, 1, 2$).

Önerme 5.21 (Fulton, 1997) *Yörüngeler, yörünge kapanışları ve afin torsal kümeler arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:*

1. $U_\sigma = \bigsqcup_{\tau \prec \sigma} O_\tau$
2. $V(\tau) = \bigsqcup_{\gamma \succ \tau} O_\gamma$
3. $O_\tau = V(\tau) \setminus \bigcup_{\gamma \succ \tau} V(\gamma)$

6. TORSAL VARYETELERİN MATRİSLERLE ELDE EDİLiŞİ

6.1 Torsal Varyeteleri Tanımlayan Denklemler

Bu bölümde kullanacağımız matrisler, katsayıları $\mathbb{Z}$ 'de olan $m \times n$ boyutlu matrislerdir. Ayrıca matrislerimizin her sütununda sıfırdan farklı en az bir katsayı bulunduğunu varsayacağız.

Bildiğimiz gibi torsal varyeteler, *üstel terim - üstel terim* şeklindeki polinomlarla üretilen ideallerin sıfır kümesidir. Bu tür ideallerin tümü, yukardaki gibi verilen matrislerle oluşturulabilir (Sturmfels, 1997). Öyleyse torsal ideallerin, dolayısıyla torsal varyetelerin, özelliklerini matrislerin özelliklerini kullanarak elde edebiliyoruz. Bu nedenle, ele alınan matris ile torsal varyete üzerindeki ilişkiyi anlamaya çalışalım. Torsal varyeteleri bu şekilde tanımlamak, bu varyetelerin geometrik özelliklerinin çoğunu kolayca elde etmemizi sağlar.

$\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ ve $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$ polinom halkalarını gözönüne alalım. Matrisimizin her $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$, $(j = 1, \dots, n)$, sütunu için $X^{a_j} = X_1^{a_{1j}} \dots X_m^{a_{mj}}$ şeklinde bir üstel terim tanımlarsak, $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ ve $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_m]$ arasında $\mathbb{C}$ -cebirlerinin bir derecelendirilmiş homomorfizmasını elde ederiz:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] &\rightarrow \mathbb{C}[X_1, \dots, X_m] \\ z_j &\mapsto X^{a_j} = X_1^{a_{1j}} \dots X_m^{a_{mj}} \end{aligned} \quad (6.1)$$

ϕ homomorfizmasının çekirdeğine *A matrisine karşılık gelen torsal ideal* adı verilir.

$\text{Çek}(\phi) = I_A$ olsun. Açıkça görüleceği gibi, ϕ homomorfizması ile $\psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ homomorfizması arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$X^\alpha - X^\beta \in \text{Çek}(\phi) \Leftrightarrow \alpha - \beta \in \text{Çek}(\psi). \quad (6.2)$$

Diğer yandan, her $u \in \mathbb{Z}^n$ vektörü, negatif olmayan ve ortak çarpanı bulunmayan u_+ ve u_- tamsayıları ile $u = u_+ - u_-$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Örnek olarak, $(2, 0, -1, -4, 3) = (2, 0, 0, 0, 3) - (0, 0, 1, 4, 0)$ olur.

Teorem 6.1 (Sturmfels, 1995) *I_A torsal ideali, A matrisinin çekirdeğindeki tüm u sayıları için oluşturulan $\mathbb{Z}^{u_+} - \mathbb{Z}^{u_-}$ binomialleri ile üretilir.*

Tanım 6.2 *X_A torsal varyetesi, I_A idealinin $V(I_A) \subset \mathbb{C}^n$ sıfır kümesidir.*

Açıkça göreceğimiz gibi, eğer A matrisinin tüm sütunları aynı koordinat toplamına sahip ise I_A ideali homojen polinomlarla üretilmiştir. Bu durumda $V(I_A)$, $\mathbb{P}^{n-1}$ projektif uzayında bir projektif varyete tanımlar.

Not 6.3 (*Sturmfels, 1997*) X_A torsal varyetesinin boyutu A matrisinin rankına eşittir.

Diğer yandan, $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkasındaki tüm torsal idealleri aşağıdaki gibi belirliyoruz:

Teorem 6.4 (*Sturmfels, 1995*) $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkasındaki bir ideal yalnız ve yalnız asal ve binomial ise torsaldır.

Torsal ideali, bir A matrisinden başlayarak oluşturabilmek aklımıza şöyle bir soru getiriyor: Acaba ele alınan matrisin katsayılarının sağladığı belirli özelliklere göre torsal varyeteleri sınıflandırabilir miyiz ya da bu özellikler torsal varyeteyi nasıl etkiliyor? Bu tür sorulara cevap veren birçok çalışmadan biz, Sturmfels (1997) ve Katsabekis ve Thoma (2003) çalışmalarını inceleyeceğiz.

Önerme 6.5 (*Sturmfels, 1995*) Eğer A matrisinin katsayılarının her biri pozitif ya da sıfıra eşit ise I_A torsal ideali

$$I_A = \langle X_1 - Z^{a_1}, X_2 - Z^{a_2}, \dots, X_n - Z^{a_n} \rangle \cap \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \quad (6.3)$$

idealine eşittir.

Bir A matrisi verildiğinde, önce matrisin çekirdeğini oluşturan vektörleri hesaplamamız gerekiyor. Yani, aranan vektör $x = (x_1, \dots, x_m)$ ise

$$Ax = 0 \quad (6.4)$$

denklem sisteminin çözümlerini araştırırız. Bu işlemi, herhangi boyuttaki bir matris için, Maple, Mathematica veya Singular (bkz. Giriş) adlı bilgisayar programları ile kolayca yapabiliyoruz.

Örnek 6.6

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

matrisini gözönüne alalım. Maple programında sırasıyla aşağıdaki şekilde işlem yaparak

$$\begin{aligned} & \text{with(linalg);} \\ & A := \text{array}([[3, 2, 1, 0], [0, 1, 2, 3]]); \\ & \text{kernel}(A); \end{aligned} \quad (6.6)$$

(6.4) sisteminin çözümünü

$$\{(1, -2, 1, 0)^t, (0, 1, -2, 1)^t, (1, -1, -1, 1)^t\} \quad (6.7)$$

olarak buluruz.

Daha sonra, sırasıyla u_1, u_2 ve u_3 diye adlandıracağımız bu üç vektörü $u_j = u_j^+ - u_j^-$, $(j = 1, 2, 3)$, şeklinde yazalım:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Buradan,

$$I_A = \langle Z_1 Z_3 - Z_2^2, Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3, Z_2 Z_4 - Z_3^2 \rangle \quad (6.9)$$

idealini elde ederiz. Böylece $X_A = V(I)$ olur.

Aynı matrisin çekirdeği için $(2, -3, 0, 1)$ ve $(1, -2, 1, 0)$ vektörlerini de bulabileceğimize dikkat edelim. Buradan $I'_A = \langle Z_1^2 Z_4 - Z_2^3, Z_1 Z_3 - Z_2^2 \rangle$ idealini elde ederiz. I_A ve I'_A ideallerinin sıfır kümesi aynı afin varyetedir; çünkü, her iki idealin de Groebner tabanını bulursak aynı torsal ideali buluyoruz. Yani, her iki idealin de bir üreteç kümesini alarak sorunu çözmüş oluyoruz. Öyleyse, şimdi Groebner tabanını nasıl bulacağımızı görelim.

6.2 Groebner Tabanı

Groebner tabanı*, değişmeli cebir ve cebirsel geometri konularında karşılaşılan birçok problemin çözümü için kullanılır. Bu problemlerden bazıları şöyle sıralanabilir: ideale ait olma problemi, herhangi iki idealin eşitliğine karar verme, ideallerin kesişimini bulma,...vs. Burada Groebner tabanını, ideale ait olma problemini çözmek için ele alacağız. Bunun için, önce polinom halkasındaki sıralamalardan bahsetmemiz gerekiyor.

Tanım 6.7 $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkasını ve bu halkada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ ile tanımlanan X^α üstel terimini gözönüne alalım. $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ üzerinde, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $>$ bağıntısına üstel terim sıralaması denir:

- (i) $>$ bir lineer sıralama bağıntısıdır. Her X^α, X^β terimleri için $X^\alpha > X^\beta, X^\beta > X^\alpha$ ya da $X^\alpha = X^\beta$ sağlanır.
- (ii) $X^\alpha > X^\beta$ ise herhangi bir X^γ terimi için $X^\alpha X^\gamma = X^{\alpha+\gamma} > X^{\beta+\gamma} = X^\beta X^\gamma$ olur.
- (iii) $>$ iyi sıralamadır. Yani, boştan farklı her üstel terim kümesinde $>$ bağıntısına göre bir en küçük eleman vardır.

$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ polinom halkasında değişkenler de kendi aralarında sıralıdır. Örnek olarak $X_1 > X_2 > \dots > X_n$. Bundan başka, bir f polinomunda $>$ sıralamasına göre en büyük üstel terime *baş terim* denir ve $BT(f)$ ile gösterilir.

Bir polinom halkasında farklı üstel terim sıralamaları tanımlanabilir. Bunlardan iki tanesini tanımaya çalışalım.

Tanım 6.8 X^α ve X^β iki üstel terim olsun. Eğer $\alpha - \beta$ farkında sıfırdan farklı ilk $\alpha_i - \beta_i$ sayısı, $(i = 1, \dots, n)$, pozitif ise X^α terimi, alfabetik sıralamaya göre X^β teriminden daha büyüktür denir ve $X^\alpha >_{alf} X^\beta$ şeklinde ifade edilir.

Örnek olarak $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ halkasında $X^\alpha = X_1^3 X_2^2 X_3$ ve $X^\beta = X_1^2 X_2^2 X_3^4$ terimlerini ele alalım. $\alpha - \beta = (3, 2, 1) - (2, 2, 4) = (1, 0, -3)$ olduğundan $X_1^3 X_2^2 X_3 >_{alf} X_1^2 X_2^2 X_3^4$ olur.

Tanım 6.9 X^α ve X^β iki üstel terim olsun. Eğer, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ olduğunda sıfırdan farklı ilk $\alpha_i - \beta_i$ sayısı, $(i = 1, \dots, n)$, negatif ise ya da $\sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{i=1}^n \beta_i$ ise X^α terimi, derecelendirilmiş ters alfabetik sıralamaya göre X^β teriminden daha büyüktür denir ve $X^\alpha >_{dersalf} X^\beta$ şeklinde ifade edilir.

Örnek olarak, $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ halkasında $X^\alpha = X_1^3 X_2^2 X_3^4$, $X^\beta = X_1 X_2^2 X_3^2$ ve $X^\gamma = X_1^2 X_2^2 X_3^5$ terimlerini karşılaştıralım. $\sum \alpha_i = 9$ ve $\sum \beta_i = 5$ olduğundan

$$X_1^3 X_2^2 X_3^4 >_{dersalf} X_1 X_2^2 X_3^2 \quad (6.10)$$

*Bazı kaynaklarda *Gröbner* veya *Groebner tabanı* olarak geçer.

olur. Ama, X^α ve X^γ terimlerinde $\sum \alpha_i = \sum \gamma_i$ olduğu için $\alpha - \gamma$ farkına bakmamız gerekiyor:

$$\alpha - \gamma = (3, 2, 4) - (2, 2, 5) = (1, 0, -1). \quad (6.11)$$

En sağda sıfırdan farklı ilk sayı -1 olduğu için

$$X_1^3 X_2^2 X_3^4 >_{dtersalf} X_1^2 X_2^2 X_3^5$$

olur.

$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ halkasında bir $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ idealini gözönüne alalım. Herhangi bir $g \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ polinomu, bazı $p_1, \dots, p_s, r \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ polinomları ile

$$g = p_1 f_1 + \dots + p_s f_s + r \quad (6.12)$$

şeklinde yazılabilir. Tanımdan, $g \in I$ ise $r = 0$ olduğu açıktır. Bildiğimiz polinomlarla bölme işlemine göre $r = 0$ çıksa da, g polinomuna, herhangi bir sıralamaya göre, $f_1, \dots, f_s$ ile bölme algoritması uyguladığımızda her zaman $r = 0$ olmayabilir. Aşağıda böyle bir örneği görelim:

Örnek 6.10 $I = \langle f_1 = X_1^2 - X_2, f_2 = X_1^3 - X_3 \rangle \subset \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ idealini ve $p = -X^2 Y + X Z$ polinomunu gözönüne alalım. $p = X^2 f_1 - X f_2$ olarak yazılabildiğinden $p \in I$ olur. Alfabetik sıralamaya göre bölme algoritması uygulayalım. Bu sıralamaya göre

$$BT(p) = -X_1^2 X_2, \quad BT(f_1) = X_1^2, \quad BT(f_2) = X_1^3 \quad (6.13)$$

olduğu için p polinomundan $Y \cdot f_1$ polinomunu çıkarmamız gerekir:

$$p' = p - X_2 \cdot f_1 = X_1 X_3 - X_2^2.$$

$BT(p') = X_1 X_3$ terimini $BT(f_1)$ ya da $BT(f_2)$ bölmediği için kalan $p' = X_1 X_3 - X_2^2 \neq 0$ olur.

Bu problem, I ideali için herhangi bir üreteç kümesi seçildiği için ortaya çıkmaktadır. Bu yüzden, “ I ideali için daha iyi bir üreteç kümesi tanımlanabilir mi?” sorusuna cevap arıyoruz. Bunun için, I idealinin, Groebner tabanı adı verilen standart bir üreteç kümesi tanımlanmaktadır.

Tanım 6.11 $I \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ bir ideal ve $>$ üstel terim sıralaması olsun (bkz. tanım 6.7). Her i için $g_i \in I$ olmak üzere $G = \{g_1, \dots, g_s\} \subset I$ kümesini gözönüne alalım. Eğer sıfırdan farklı her $f \in I$ polinomunun başterimi bir $BT(g_i)$ ile bölünebiliyorsa G kümesi, $>$ bağıntısına göre I için bir Groebner tabanıdır denir.

Groebner tabanını bulmak için aşağıdaki gibi işlem yapılır:

Tanım 6.12 Sıfırdan farklı $f, g \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ polinomlarına gözönüne alalım. Bir üstel terim sıralamasına göre $BT(f) = cX^\alpha$ ve $BT(g) = dX^\beta$ olsun ($c, d \in \mathbb{C}^*$). X^α ve X^β terimlerinin en küçük ortak çarpanı X^γ olmak üzere f ve g ile S -polinomu şu şekilde tanımlanır:

$$S(f, g) = \frac{X^\gamma}{BT(f)} \cdot f - \frac{X^\gamma}{BT(g)} \cdot g \quad (6.14)$$

Tanımdan $S(f, g) \in \langle f, g \rangle$ olduğu açıktır.

Teorem 6.13 (Buchberger Kriteri) Bir $I \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ idealinin $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ altkümesini gözönüne alalım. G kümesinin, I idealinin bir Groebner tabanı olması için gerek ve yeter koşul her i, j için $S(g_i, g_j)$ polinomunun her k için g_k ile bölümünden kalanın sıfır olmasıdır ($i, j, k = 1, \dots, s$).

Buchberger kriteri ile bir idealin Groebner tabanını tanımlamak için aşağıdaki algoritmayı kullanıyoruz:

Algoritma 1. (Buchberger Algoritması)

1. Adım. $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ olsun.
2. Adım. her $i, j = 1, \dots, s$ için $S(g_i, g_j)$ polinomunu tanımlanır.
3. Adım. $S(g_i, g_j)$ polinomu $g_1, \dots, g_s$ polinomlarının her birine bölünür.
 - a. Eğer kalan $r \neq 0$ ise r polinomunu G kümesine dahil edilir.
 - b. Eğer $r = 0$ ise G kümesi I idealinin Groebner tabanıdır.

Singular programında, bir idealin Groebner tabanını kolayca hesaplayabiliyoruz. Bu komut Buchberger algoritmasına göre çalışır. Bir Groebner tabanı hesaplamak için önce

$$\text{ring } r = 0, (\text{değişken isimleri}), \text{sıralama}; \quad (6.15)$$

komutu ile polinom halkası tanımlarız. Eğer alfabetik sıralamayı kullanmak istiyorsak “sıralama” yerine lp , derecelendirilmiş ters alfabetik sıralamayı kullanmak istiyorsak dp yazmamız gerekir. Ardından I idealini tanımlayıp $groebner(I)$ komutunu çalıştırırız.

Örnek 6.14 $I = \langle X_1^2 - X_2, X_1^3 - X_3 \rangle \subset \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ idealinin Groebner tabanını bulalım.

Çözüm. Singular programında, sırasıyla şu komutları çalıştıralım:

$$\text{ring } r = 0, (X_1, X_2, X_3), lp;$$

$$\begin{aligned} ideal\ I &= X_1^2 - X_2, X_1^3 - X_3; \\ groebner(I); \end{aligned} \tag{6.16}$$

Böylece I idealinin Groebner tabanı

$$G = \langle X_1^2 - X_2, X_1X_2 - X_3, X_1X_3 - X_2^2, X_2^3 - X_3^2 \rangle \tag{6.17}$$

olarak bulunur. $\square$

Sonuç olarak, verilen bir A matrisinin çekirdeğini bulup torsal ideali yazdıktan sonra Groebner tabanını hesaplıyoruz. Daha sonra bu idealin sıfır kümesi olan torsal varyeteyi buluyoruz.



6.3 Torsal Kümeler

Katsayıları $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m \times n$ boyutlu bir $A = (a_{ij})$ matrisini gözönüne alalım. $y_i \in \mathbb{C}$ için, $(y_1^{a_{11}} \cdots y_m^{a_{m1}}, \dots, y_1^{a_{1n}} \cdots y_m^{a_{mn}})$ şeklinde yazılabilen noktaların kümesini $\Gamma(A)$ ile gösterelim.

Tanım 6.15 Yukardaki

$$\Gamma(A) = \{X_j \mid X_j = y_1^{a_{1j}} \cdots y_m^{a_{mj}}, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n\} \quad (6.18)$$

kümesine torsal küme denir.

Örnek 6.16 Yukarda çalıştığımız

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

matrisi

$$\Gamma(A) = \{(y_1^3, y_1^2 y_2, y_1 y_2^2, y_2^3) \in \mathbb{C}^4\} \quad (6.20)$$

torsal kümesini verir.

Görüldüğü gibi, $\Gamma(A)$ torsal kümesi, n -boyutlu afin uzayın bir altkümesidir. Tam olarak,

Not 6.17 $\Gamma(A)$ torsal kümesi, A matrisinden elde edilen X_A torsal varyetesinin bir altkümesidir.

Örnek 6.18 Aşağıdaki B matrisine karşılık gelen X_B torsal varyetesini bulalım.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Çözüm. Singular programını kullanarak

$$I_B = \langle Z_4 Z_6 - Z_5, Z_3 Z_6 - 1, Z_3 Z_5 - Z_4, Z_2 Z_5 - 1, Z_2 Z_4 - Z_3, Z_1 - Z_2 Z_6 \rangle$$

torsal idealini buluruz. Buradan $X_B = V(I_B)$ olur. Diğer yandan B matrisi

$$\Gamma(B) = \{(y_1^2 y_2, y_1 y_2^2, y_2^2 y_3, y_2 y_3^2, y_1 y_3^2, y_1^2 y_3) \in \mathbb{C}^6\}$$

torsal kümesini verir. Görüldüğü gibi, her bir $u, v \in \mathbb{C}$ için $(0, u, v, 0, 0, 0)$ noktası X_B torsal varyetesine ait olduğu halde $\Gamma(B)$ torsal kümesine ait değildir (bkz. Örnek 6.21).

□

Not 6.19 Herhangi iki matris, farklı torsal kümeleri ama aynı torsal varyeteyi verebilir.

Örnek olarak, yukardaki B matrisini ve

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisini karşılaştıralım.

C matrisi, $\Gamma(C) = \{(y_1 y_2 y_3^2, y_1^{-1} y_2^2 y_3, y_1^{-2} y_2 y_3^{-1}, y_1^{-1} y_2^{-1} y_3^{-2}, y_1 y_2^{-2} y_3^{-1}, y_1^2 y_2^{-1} y_3) \in \mathbb{C}^6\}$ torsal kümesini verir. Açıkça görüldüğü gibi, $\Gamma(B) \neq \Gamma(C)$ dir çünkü $\Gamma(B)$ kümesine ait olan $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$ noktası $\Gamma(C)$ kümesine ait değildir. Buna karşılık, B ve C matrislerinin her ikisine de karşılık gelen torsal varyete:

$$I_C = \langle Z_4 Z_6 - Z_5, Z_3 Z_6 - 1, Z_3 Z_5 - Z_4, Z_2 Z_5 - 1, Z_2 Z_4 - Z_3, Z_1 - Z_2 Z_6 \rangle \quad (6.22)$$

dir. Öyleyse, $\Gamma(A) = X_A$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul nedir?

Teorem 6.20 (Reyes, vd., 2000) Her $i = 1, \dots, n$ için

$$\Gamma(A) = X_A \Leftrightarrow V(I_A, Z_i) \subset \Gamma(A). \quad (6.23)$$

Burada, $V(I_A, Z_i) = V(I_A) \cap V(Z_i)$ dir.

Tersine, bir afin torsal varyete verildiğinde, torsal kümesi kendisine eşit olacak şekilde yeni bir matris tanımlayabiliriz. Yani, $\Gamma(M) = X_M$ eşitliğini sağlayan bir M matrisi araştırılabilir. Böyle bir matrisin varlığı aşağıdaki sonuçla verilir:

Teorem 6.21 (Katsabekis ve Thoma, 2003) Her X torsal varyetesi için $\Gamma(M) = X$ olacak şekilde bir M matrisi vardır.

Bu tür bir matrisin aranması için torus etkisinin yörüngeleri kullanılır: A matrisinin sütununu $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ ile gösterelim. Bu matris ile

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = p_1 a_1 + \dots + p_n a_n, \quad p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}. \quad (6.24)$$

konisini tanımlayalım. Eğer $\text{rank} A = k$ ise σ konisi, A matrisinin k sütunu ile üretilir.

Şimdi, A matrisinin her $r_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ satırına σ konisinin bir F_{r_i} yüzünü aşağıdaki şekilde karşılık getirelim: F_{r_i} yüzünü, yalnızca i . koordinatı 1 olan $v_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ vektörü ile tanımlayalım. Bu durumda, matrisin her a_j sütunu için $(v_i, a_j) = a_{ij} \geq 0$ dir. Eğer $a_{ij} = 0$ ise $a_j \in F_{r_i}$ ve $a_{ij} \neq 0$ ise $a_j \notin F_{r_i}$ olur. Ayrıca, her F_{r_i} yüzüne

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & a_j \in F_{r_i} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (6.25)$$

ile verilen bir $P_{F_{r_i}} = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in}) \in \mathbb{C}^n$ özel noktası karşılık getirelim. 5. bölümde gördüğümüz gibi, X_A varyetesinin yörüngeleri bu özel noktalar aracılığı ile tanımlanır.

Not 6.22 $(\mathbb{C}^*)^m$ cebirsel torusunun $\mathbb{C}^n$ üzerine etkisi, $(\mathbb{C}^*)^m \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$

$$(t, u) \mapsto (t^{a_1}u_1, \dots, t^{a_n}u_n) \quad (6.26)$$

şeklindedir.

A matrisinden elde ettiğimiz F_{r_i} yüzleri ile üretilen kümeyi Ω_A ile gösterelim.

Teorem 6.23 (Katsabekis ve Thoma, 2003) A matrisine karşılık gelen $\Gamma(A)$ torsal kümesi

$$\Gamma(A) = \bigcup_{F \in \Omega_A} O(P_F) \quad (6.27)$$

dir.

Örnek 6.24 B matrisini kullanarak yörüngeleri bulalım.

Çözüm. B matrisinin sütunları: $a_1 = (2, 1, 0)^t$, $a_2 = (1, 2, 0)^t$, $a_3 = (0, 2, 1)^t$,

$a_4 = (0, 1, 2)^t$, $a_5 = (1, 0, 2)^t$ ve $a_6 = (2, 0, 1)^t$.

- r_1 satırına karşılık $v_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ vektörünü buluruz. $(v_1, a_3) = 0$, $(v_1, a_4) = 0$ ve $(v_1, a_s) \geq 0$, $(s = 1, 2, 5, 6)$, olduğu için bu vektör ile $F_{r_1} = \langle (0, 2, 1)^t, (0, 1, 2)^t \rangle$ yüzünü elde ederiz.

- r_2 satırına karşılık $v_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$ vektörünü buluruz. $(v_2, a_5) = 0$, $(v_2, a_6) = 0$ ve $(v_2, a_s) \geq 0$, $(s = 1, 2, 3, 4)$, olduğu için bu vektör ile $F_{r_2} = \langle (1, 0, 2)^t, (2, 0, 1)^t \rangle$ yüzünü elde ederiz.

- r_3 satırına karşılık $v_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ vektörünü buluruz $(v_3, a_1) = 0$, $(v_3, a_2) = 0$ ve $(v_3, a_s) \geq 0$, $(s = 3, 4, 5, 6)$, olduğu için bu vektör ile $F_{r_3} = \langle (2, 1, 0)^t, (1, 2, 0)^t \rangle$ yüzünü elde ederiz. Buradan $\Omega_B = \langle F_{r_1}, F_{r_2}, F_{r_3} \rangle$ olur. Bu yüzlere

$$\begin{aligned} P_{F_{r_1}} &= (0, 0, 1, 1, 0, 0), \\ P_{F_{r_2}} &= (0, 0, 0, 0, 1, 1), \\ P_{F_{r_3}} &= (1, 1, 0, 0, 0, 0), \end{aligned} \quad (6.28)$$

özel noktaları karşılık gelir. Bu noktalar ile $\Gamma(B)$ torsal kümesinin yörüngelerini şu şekilde buluruz:

$$\begin{aligned} O(P_{F_{r_1}}) &= \{(0, 0, t_2^2 t_3, t_2 t_3^2, 0, 0) \in \mathbb{C}^6\}, \\ O(P_{F_{r_2}}) &= \{(0, 0, 0, 0, t_1 t_3^2, t_1^2 t_3) \in \mathbb{C}^6\}, \\ O(P_{F_{r_3}}) &= \{(t_1^2 t_2, t_1 t_2^2, 0, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^6\}. \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $\Gamma(B)$, B matrisinden elde edilen yörüngelerin birleşimidir. $\square$

B matrisine karşılık gelen X_B torsal varyetesinin $\Gamma(B)$ torsal kümesinden farklı olduğunu gördük (bkz. Örnek 6.18). Öyleyse şimdi $X_B = \Gamma(M)$ eşitliğini sağlayacak M matrisini araştıralım. Böyle bir M matrisini aşağıdaki algoritma ile elde ederiz:

Algoritma 2. (Katsabekis ve Thoma, 2003)

1. *Adım.* B matrisini alalım.
2. *Adım.* $\text{rank} B = k$ olsun.
3. *Adım.* B matrisinin $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$, $(j = 1, \dots, n)$, sütunlarından $k - 1$ tanesini seçelim. Seçtiğimiz sütunların numaraları ile bir E kümesi oluşturalım. Yani, E kümesi $\{1, \dots, n\}$ kümesinin $k - 1$ elemanlı bir altkümesi olsun.
4. *Adım.* Her $q \in E$ için $x \cdot a_q = 0$ ve her $s \notin E$ için $x \cdot a_s \geq 0$ olacak şekilde $0 \neq x \in \mathbb{Z}^m$ çözümlerini arayalım.
5. *Adım.* $r_x = (xa_1, xa_2, \dots, xa_n)$ vektörünü yazalım.
6. *Adım.* Eğer r_x vektörü, B matrisinin bütün satır vektörlerinden farklı ise r_x vektörünü B matrisine ekleyelim.
7. *Adım.* 3. adımdaki gibi seçebileceğimiz her bir E kümesi için 4. ve 5. adımları tekrarlayalım.

Bu algoritma, (satır sayısı - k) tane yeni satır bulduğumuzda ya da seçtiğimiz her bir sütun için 6. adım cevap vermediginde sona erer. Yani, en fazla $C(n, r - 1)$ tekrarda son bulur (Katsabekis ve Thoma, 2003).

Örnek 6.25 B matrisi için $X_B = \Gamma(M)$ eşitliğini sağlayan M matrisini yukardaki algoritmayı kullanarak bulalım.

Çözüm. B matrisinin sütunları şunlardır: $a_1 = (2, 1, 0)^t$, $a_2 = (1, 2, 0)^t$, $a_3 = (0, 2, 1)^t$, $a_4 = (0, 1, 2)^t$, $a_5 = (1, 0, 2)^t$, $a_6 = (2, 0, 1)^t$. $\text{rank} B = 3$ olduğu için her bir tekrarın 3. adımında, sırasıyla,

$$a_1, a_2; \quad a_1, a_3; \quad a_1, a_4; \quad a_1, a_5; \quad a_1, a_6; \quad a_2, a_3; \quad a_2, a_4; \quad a_2, a_5; \quad a_2, a_6;$$

$$a_3, a_4; \quad a_3, a_5; \quad a_3, a_6; \quad a_4, a_5; \quad a_4, a_6; \quad a_5, a_6$$

sütunlarını seçeceğiz ve seçtiğimiz her sütun çiftinin numaraları ile bir $E \subset \{1, 2, \dots, 6\}$ kümesi oluşturacağız.

• a_1, a_2 sütunlarını ele alalım. Yani, $E = \{1, 2\}$ olsun. 4. adımı uygulayalım: Her $q \in E$ için $x \cdot a_q = 0$ ve her $s \notin E$ için $x \cdot a_s \geq 0$ olsun. Böylece

$$2x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_2 + x_3 \geq 0$$

$$x_2 + 2x_3 \geq 0$$

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_3 &\geq 0 \\2x_1 + x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

denklem sistemini buluruz. Bu sistemin çözümü boş kümedir. 3. adıma geri dönelim.

• a_1, a_3 sütunlarını ele alalım. Yani, $E = \{1, 3\}$ olsun. 4. adımı uygulayalım: Her $q \in E$ için $x \cdot a_q = 0$ ve her $s \notin E$ için $x \cdot a_s \geq 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &= 0 \\x_1 + 2x_2 &\geq 0 \\2x_2 + x_3 &= 0 \\x_2 + 2x_3 &\geq 0 \\x_1 + 2x_3 &\geq 0 \\2x_1 + x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

denklem sistemini buluruz. Ancak bu sistemin çözümü boş kümedir. 3. adıma geri dönelim.

Benzer şekilde, sırasıyla a_1, a_4 ve a_1, a_5 sütunlarını seçip 3. ve 4. adımları uygularsak x çözümünün bulunmadığını görürüz.

• a_1, a_6 sütunlarını seçelim. Yani, $E = \{1, 6\}$ olsun. 4. adımı uygulayalım: Her $q \in E$ için $x \cdot a_q = 0$ ve her $s \notin E$ için $x \cdot a_s \geq 0$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &= 0 \\x_1 + 2x_2 &\geq 0 \\2x_2 + x_3 &\geq 0 \\x_2 + 2x_3 &\geq 0 \\x_1 + 2x_3 &\geq 0 \\2x_1 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

denklem sistemini buluruz. Buradan $x = (-1, 2, 2)$ çözümünü elde ederiz. 5. adıma göre $(xa_1, xa_2, xa_3, xa_4, xa_5, xa_6) = (0, 3, 6, 6, 3, 0)$ vektörünü yazarız. O halde $r_x = (0, 1, 2, 2, 1, 0)$ vektörünü B matrisine ekleriz.

• 3. adıma dönelim ve matrisin a_2, a_3 sütunlarını seçelim. Yani, $E = \{2, 3\}$ olsun. 4. adımı uygulayalım. Buradan

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &\geq 0 \\x_1 + 2x_2 &= 0 \\2x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

$$x_2 + 2x_3 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_3 \geq 0$$

$$2x_1 + x_3 \geq 0$$

denklem sistemini buluruz. Bu sistem $x = (2, -1, 2)$ çözümünü verir. 5. adımı uygularsak $r_x = (1, 0, 0, 1, 2, 2)$ vektörünü elde ederiz ve bu sütunu B matrisine ekleriz.

3. adıma dönelim. Matrisin, sırasıyla, $a_2, a_4; a_2, a_5; a_2, a_6; a_3, a_4; a_3, a_5$ ve a_3, a_6 sütunları için yukardaki gibi 3. ve 4. adımları uygularsak x çözümünün bulunmadığını görürüz.

• Bu kez, matrisin a_4, a_5 sütunlarını ele alalım. Yani $E = \{4, 5\}$ olsun. 3. adıma göre aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz:

$$2x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 0$$

$$2x_2 + x_3 \geq 0$$

$$x_2 + 2x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_3 \geq 0$$

Bu sistemin çözümü $x = (2, 2, -1)$ dir. 5. adıma göre $r_x = (2, 2, 1, 0, 0, 1)$ vektörünü yazarız ve B matrisine ekleriz. Toplamda üç yeni satır bulduğumuz için algoritmaya son veririz.

Sonuç olarak, bu üç yeni satırın B matrisine eklenmesiyle aradığımız

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

matrisini buluruz. M matrisi

$$\Gamma(M) = \{(y_1^2 y_2 y_5 y_6^2, y_1 y_2^2 y_4 y_6^2, y_2^2 y_3 y_4^2 y_6, y_2 y_3^2 y_4^2 y_5, y_1 y_3^2 y_4 y_5^2, y_1^2 y_3 y_5^2 y_6) \mid y_i \in \mathbb{C}\} \quad (6.30)$$

torsal kümesini verir. Böylece $\Gamma(M) = X_B = X_M$ sağlanır. $\square$

Örnek 6.26 (6.5) *matrisine karşılık gelen afin torsal varyeteyi 3. bölümde ele aldığımız yöntem ile elde edelim ve yörüngelerini bulalım.*

Çözüm. İlk önce

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

matrisinden bir rasyonel polihedral koni tanımlayalım: $\text{rank} A = 2$ olduğundan σ konisi, A matrisinin lineer bağımsız iki sütun vektörü ile üretilir:

$$\sigma = \langle (1, 2)^t, (2, 1)^t \rangle.$$

Bu tanım $N_{\mathbb{R}}$ kafesinde $\sigma = \langle e_1 + 2e_2, 2e_1 + e_2 \rangle$ olması anlamına gelir. σ konisine karşılık $S_\sigma = \langle e_1^*, 2e_1^* - e_2^*, -e_1^* + 2e_2^*, e_2^* \rangle$ yarı-grubunu ve $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1, X_1^2 X_2^{-1}, X_1^{-1} X_2^2, X_2]$ polinom halkasını tanımlarız. Uygun değişken dönüşümü ile

$$\mathbb{C}[S_\sigma] \cong \mathbb{C}[Z_1, Z_2, Z_3, Z_4]/I$$

elde ederiz. $\mathbb{C}[S_\sigma]$ halkasının üreteçleri arasında

$$Z_1 Z_3 = Z_2^2, \quad Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \quad \text{ve} \quad Z_2 Z_4 = Z_3^2 \quad (6.32)$$

bağıntıları vardır. Öyleyse $I = \langle Z_1 Z_3 - Z_2^2, Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3, Z_2 Z_4 - Z_3^2 \rangle$ dir. Dolayısıyla $X_A = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]) \cong V(I)$ olur.

Şimdi X_A varyetesinin yörüngelerini bulalım. $T_N = (\mathbb{C}^*)^2$ cebirsel torusunun X_A üzerine etkisi, $T_N \times X_A \rightarrow X_A$

$$(t, u) \mapsto (t_1 u_1, t_1^2 t_2^{-1} u_2, t_1^{-1} t_2^2 u_3, t_2 u_4)$$

ile tanımlıdır.

S_σ yarı-grubunun üreteçlerini $v_1 = e_1^*$, $v_2 = 2e_1^* - e_2^*$, $v_3 = -e_1^* + 2e_2^*$ ve $v_4 = e_2^*$ ile gösterelim. σ konisinin 1-boyutlu yüzleri

$$\tau_1 = \langle (1, 2)^t \rangle = \langle e_1 + 2e_2 \rangle \quad \text{ve} \quad \tau_2 = \langle (2, 1)^t \rangle = \langle 2e_1 + e_2 \rangle$$

iki boyutlu yüzü koninin kendisi ve 0-boyutlu yüzü $\tau_4 = \langle (0, 0)^t \rangle = \{0\}$ dir. 5. bölümde olduğu gibi bu yüzlere karşılık gelen özel noktaları bulalım:

$\tau_1 = \langle e_1 + 2e_2 \rangle$ ise $\tau_1^\perp = \langle 2e_1^* - e_1, -2e_1^* + e_1^* \rangle$ dir. Bu durumda, $v_2 \in \tau_1^\perp$ ve $v_1, v_3, v_4 \notin \tau_1^\perp$ olduğu için tanım 5.5'den $x_{\tau_1} = (0, 1, 0, 0)$ olur. Öyleyse x_{τ_1} noktasına karşılık gelen yörünge

$$O_{\tau_1} = \{(0, t_1^2 t_2^{-1}, 0, 0) \in \mathbb{C}^4\}$$

elde edilir.

$\tau_2 = \langle 2e_1 + e_2 \rangle$ ise $\tau_2^\perp = \langle -e_1^* + 2e_2^*, e_1^* - 2e_2^* \rangle$ dir. Bu durumda, $v_3 \in \tau_1^\perp$ ve $v_1, v_2, v_4 \notin \tau_2^\perp$ olduğu için $x_{\tau_2} = (0, 0, 1, 0)$ olur. Öyleyse x_{τ_2} noktasına karşılık gelen yörünge

$$O_{\tau_2} = \{(0, 0, t_1^{-1}t_2^2, 0) \in \mathbb{C}^4\}$$

elde edilir.

$\tau_3 = \sigma$ ise $\tau_3^\perp = \{0\}$ dir. Bu durumda, $v_1, v_2, v_3, v_4 \notin \tau_3^\perp$ olduğu için $x_{\tau_3} = (0, 0, 0, 0)$ olur. Öyleyse x_{τ_3} noktasına karşılık gelen yörünge

$$O_{\tau_3} = \{(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^4\}$$

elde edilir.

$\tau_4 = \{0\}$ ise $\tau_4^\perp = \langle \mp e_1^*, \mp e_2^* \rangle = M_R$ dir. Bu durumda, $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \tau_4^\perp$ olduğu için $x_{\tau_4} = (1, 1, 1, 1)$ olur ve bu noktaya karşılık

$$O_{\tau_4} = \{(t_1, t_1^2 t_2^{-1}, t_1^{-1} t_2^2, t_2) \in \mathbb{C}^4\}$$

yörüngesi elde edilir. Dolayısıyla $X_A = \bigsqcup_{i=1}^4 O(\tau_i)$ dir.

A matrisine Algoritma 2'yi uygularsak matrise eklenecek yeni bir satırın bulunmadığını görürüz. Bu yüzden $\Gamma(A) = V(I)$ dir. $\square$

Önerme 6.27 $\mathbb{C}[S_1]$ ve $\mathbb{C}[S_2]$ iki polinom halkası olsun. O halde $\mathbb{C}[S_1] \cong \mathbb{C}[S_2]$ ise $S_1 \cong S_2$ olur.

İspat. $\mathbb{C}[S_1] \cong \mathbb{C}[S_2]$ olduğunu kabul edelim.

$\mathbb{C}[S_1] = \mathbb{C}[Z_1^{a_{11}} Z_2^{a_{12}} \dots Z_n^{a_{1n}}, Z_1^{a_{21}} Z_2^{a_{22}} \dots Z_n^{a_{2n}}, \dots, Z_1^{a_{1m}} Z_2^{a_{m2}} \dots Z_n^{a_{mn}}]$ olsun. $\mathbb{C}[S_1]$ ve $\mathbb{C}[S_2]$ izomorf halkalar olduğundan aynı boyuta sahiptirler. Dolayısıyla her iki polinom halkası da $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ halkasının altkümesidir. O halde $\mathbb{C}[S_1] \rightarrow \mathbb{C}[S_2]$ izomorfizması

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

kuralı ile tanımlı bir lineer dönüşümdür (Hoffman ve Kunze, 1971). Öyleyse

$$\mathbb{C}[S_2] = \mathbb{C}[Z_1^{x_1 a_{11}} \dots Z_n^{x_n a_{1n}}, Z_1^{x_1 a_{21}} \dots Z_n^{x_n a_{2n}}, \dots, Z_1^{x_1 a_{m1}} \dots Z_n^{x_n a_{mn}}]. \quad (6.34)$$

olur.

(6.33) matrisleri aynı zamanda S_1 ve S_2 yarı-gruplarının üreteçlerini tanımlar:

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle a_{11}e_1 + \dots + a_{1n}e_n, \dots, a_{m1}e_1 + \dots + a_{mn}e_m \rangle, \\ S_2 &= \langle x_1a_{11}e_1 + \dots + x_na_{1n}e_n, \dots, x_1a_{m1}e_1 + \dots + x_na_{mn}e_m \rangle. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Dolayısıyla S_1 ve S_2 için de (6.33) dönüşümü ile $S_1 \cong S_2$ sağlanır. $\square$

Örnek olarak $\mathbb{C}[S_1] = \mathbb{C}[Z_1, Z_1Z_2, Z_1Z_2^2]$ ve $\mathbb{C}[S_2] = \mathbb{C}[Z_1^{x_1}, Z_1^{x_1}Z_2^{x_2}, Z_1^{x_1}Z_2^{2x_2}]$ polinom halkalarını ele alalım.

$\mathbb{C}[S_1] \rightarrow \mathbb{C}[S_2]$ aşağıdaki lineer dönüşümle tanımlıdır:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & x_2 \\ x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Aynı zamanda bu matrisler ile S_1 ve S_2 yarı-gruplarının üreteçlerini belirleriz:

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle e_1, e_1 + e_2, e_1 + 2e_2 \rangle \\ S_2 &= \langle x_1e_1, x_1e_2 + x_2e_2, x_1e_1 + 2x_2e_2 \rangle. \end{aligned}$$

Böylece $S_1 \cong S_2$ olur.

6.4 Uygulama

Torsal varyetelerin geometrik özelliklerini, torsal olmayan varyetelere göre daha kolay anlayabiliyoruz. Bu amaçla, Altınok ve Tosun (2004) çalışmasında, verilen ağırlıklandırılmış bir grafa karşılık gelen bir torsal varyete oluşturulmuştur. Biz, yaptıklarımızın bir uygulaması olarak, çok iyi bilinen A_n ağırlıklandırılmış grafına karşılık gelen torsal varyeteyi oluşturacağız. Ancak normal varyete ile olan ilişkisine değinmeyeceğiz.

Önce A_n gafını tanıyalım: Grafın tepelerini $C_1, \dots, C_n$ ile gösterelim. Her i için, ($i = 1, \dots, n$), C_i tepesi $w_i = 2$ ile ağırlıklandırılmıştır.

Şimdi

$$\mathcal{G} = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i C_i \mid m_i \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (6.36)$$

grubunu gözönüne alalım. Her i için, $(C_i \cdot C_i) = -2$, $(C_{i-1} \cdot C_i) = 1$ ve diğer bütün durumlarda $(C_i \cdot C_j) = 0$ olmak üzere, A_n grafına aşağıdaki şekilde bir matris karşılık gelir:

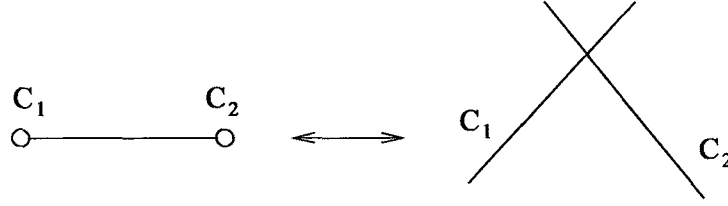
$$\| C_i \cdot C_j \| = \begin{pmatrix} (C_1 \cdot C_1) & (C_1 \cdot C_2) & \dots & (C_1 \cdot C_n) \\ (C_2 \cdot C_1) & (C_2 \cdot C_2) & \dots & (C_2 \cdot C_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (C_n \cdot C_1) & (C_n \cdot C_2) & \dots & (C_n \cdot C_n) \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

$\mathcal{G}$ grubunun, bu matrisi kullanarak tanımlayacağımız

$$\mathcal{E}^+(A_n) = \{Y \in \mathcal{G} \mid \text{her } i \text{ için } (Y \cdot C_i) \leq 0\} \quad (6.38)$$

altkümesini gözönüne alalım. $Y, Y' \in \mathcal{E}^+(A_n)$ için $(Y + Y') \cdot C_i = (Y \cdot C_i) + (Y' \cdot C_i) \leq 0$ olduğundan $(Y + Y') \in \mathcal{E}^+(A_n)$ olur. Bu da, $\mathcal{E}^+(A_n)$ kümesinin bir yarı-grup olduğu anlamına gelir. Bu yarı-gruba *Lipman yarı-grubu* denir. $\| C_i \cdot C_j \|$ matrisi tanımı ve A_n gafının bağlantılı olması, Lipman yarı-grubunun her zaman boştan farklı olmasını gerektirir (Altınok ve Tosun, 2004).

Bundan başka, $\mathcal{E}^+(A_n)$ yarı-grubu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir tam rasyonel dışbükey koni tanımlar. Öyleyse, bu koniye karşılık gelen bir torsal varyeteden sözedebiliriz. İşlemlerimizi basitleştirmek için $n = 2$ durumunu gözönüne alalım. (A_2) grafi ve karşılık gelen eğriler Şekil 6.1'deki gibidir.



Şekil 6.1 (A_2) grafi ve C_1, C_2 eğrilerinin birbirlerine göre durumları.

$\mathcal{E}^+(A_2)$ yarı-grubunun $\mathbb{Q}$ üzerindeki üreteçlerini bulalım:

Önerme 6.28 (Altınok ve Tosun, 2004) $\mathcal{E}^+(A_2)$ yarı-grubu $\mathbb{Q}$ üzerinde

$$Y_1 = 2C_1 + C_2 \text{ ve } Y_2 = C_1 + 2C_2 \quad (6.39)$$

vektörleri ile üretilmiştir.

Bu önermeyi kullanarak, (A_2) grafinin karşılık gelen torsal varyeteyi bulalım:

Yani, $\sigma = \langle Y_1 = 2e_1 + e_2, Y_2 = e_1 + 2e_2 \rangle$ şeklindedir. Bu koniye karşılık gelen $\mathbb{C}$ -cebri

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1^3, X_1^2 X_2, X_1 X_2^2, X_2^3] \quad (6.40)$$

dir (Altınok ve Tosun, 2004). Buradan

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

matrisini buluruz. Yukarıda gördüğümüz gibi bu matrise karşılık gelen torsal varyete

$$I_{A_2} = \langle Z_1 Z_3 - Z_2^2, Z_1 Z_4 - Z_2 Z_3, Z_2 Z_4 - Z_3^2 \rangle \quad (6.42)$$

idealinin sıfır kümesidir. A matrisinin tanımladığı torsal kümeyi

$$\Gamma(A_2) = \{(y_1^3, y_1^2 y_2, y_1 y_2^2, y_2^3) \in \mathbb{C}^4\}$$

olarak bulmuştuk. $\Gamma(A_2) = X_{A_2}$ olduğunu da biliyoruz (bkz. Örnek 6.26). Bu kez, varyetenin yörüngelerini inceleyerek bu eşitliği görmeye çalışalım: Bunun için, A_2 matrisinin satırları ile $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 0, 1)$ vektörlerini buluruz. Bu vektörler ile $F_{r_1} = \langle (0, 3)^t \rangle$ ve $F_{r_2} = \langle (3, 0)^t \rangle$ yüzleri tanımlanır. O halde $\Omega(A_2) = \langle F_{r_1}, F_{r_2} \rangle$ dir. Bu yüzlere

$$P_{F_{r_1}} = (0, 0, 0, 1) \text{ ve } P_{F_{r_2}} = (1, 0, 0, 0) \quad (6.43)$$

özel noktaları karşılık gelir. Böylece

$$O(P_{F_{r_1}}) = \{(t_1^3, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^4\} \text{ ve } O(P_{F_{r_2}}) = \{(0, 0, 0, t_2^3) \in \mathbb{C}^4\} \quad (6.44)$$

yörüngelerini elde ederiz. Ayrıca $y_1 = 1$ ve $y_2 = 1$ için $(1, 1, 1, 1) \in \Gamma(A_2)$ dir. $(1, 1, 1, 1)$ noktası $F_{r_3} = \sigma$ yüzüne karşılık gelen özel noktadır. Öyleyse, σ konisi de $\Omega(A_2)$ kümesine aittir. Bundan başka, $y_1 = 0$ ve $y_2 = 0$ ile $P_{F_{r_4}} = (0, 0, 0, 0) \in \Gamma(A_2)$ noktasını elde ederiz. Bu noktalar ile

$$O(P_{F_{r_3}}) = \{(t_1^3, t_1^2 t_2, t_1 t_2^2, t_2^3) \in \mathbb{C}^4\},$$

$$O(P_{F_{r_4}}) = \{(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^4\}$$

yörüngelerini buluruz. Böylece A_2 matrisi ile X_{A_2} varyetesinin tüm yörüngelerini elde edebildiğimiz için $X_{A_2} = \Gamma(A_2)$ dir. $\square$



7. SONUÇ

Bir koniden ve bir fandan nasıl torsal varyete elde edebileceğimizi inceledik. Bunun için örnekler verdik. Bunun yanı sıra, torsal varyetelerin yörüngelerinin yapısını anlamaya çalıştık. Son bölümde, torsal varyeteleri matrislerden yola çıkarak elde edebildiğimizi gösterdik. Ayrıca, yörüngelerin birbirlerine göre durumlarının, A_2 grafına karşılık gelen C_1 ve C_2 eğrilerinin birbirlerine göre durumları ile aynı olduğunu gördük. Öyleyse, A_n e karşılık gelen torsal varyetenin yörüngelerinin yapısının, yine A_n e karşılık gelen eğrilerin yapısı ile aynı olup olmadığı sorusunun cevabı ilginç olabilir.



KAYNAKLAR

- Altınok, S. ve Tosun, M. (2004), "Toric Varieties Associated with Weighted Graphs", Instituto de Matematicas UNAM, Mexico, (Baskıda).
- Barth, W., Hulek, K., Peters, C. A. M., Van De Ven, A. (2004), Compact Complex Surfaces, Springer-Verlag, 2nd Edition.
- Cox, D., Little, J. ve O'Shea, D. (1998), Using Algebraic Geometry, Springer Verlag.
- Cox, D. (2000), "Lecture 1, Affine Varieties, Cones and Lattices", Tutorial for Summer School 2000: Geometry of Toric Varieties in Grenoble.
- Cox, D. (2000), "Lecture 5, Orbits and Cones, Smooth and Quasismooth Toric varieties", Tutorial for Summer School 2000: Geometry of Toric Varieties in Grenoble.
- Danilov, V. (1978), "The Geometry of Toric Varieties", Russian Math. Surveys 33:2:97-154.
- Dummit, D. ve Foote, R. (1991), Abstract Algebra, Prentice-Hall, Inc.
- Ewald, G. (1996), Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry, Springer-Verlag.
- Fulton, W. (1969), Algebraic Curves, Addison-Wesley Publishing Company.
- Fulton, W. (1997), Introduction to Toric Varieties, Princeton University Press, 2. Edition
- Hartshorne, R. (1977), Algebraic Geometry, Springer-Verlag.
- Hoffman K. ve Kunze R. (1971), Linear Algebra, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 2. Edition.
- Katsabekis, A. ve Thoma, A. (2003), "Toric Sets and Orbits on Toric Varieties", Journal of Pure and Applied Algebra, 181:75 - 83.
- Kempf, G., Knudsen, F., Mumford D. ve Saint-Donat, B. (1973), Torodial Embeddings I, Lecture Notes in Math. 339, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973.
- Kendig, K. (1984), Elementary Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 2. Edition.
- Kirwan, F. (1992), Complex Algebraic Curves, Cambridge University Press.
- Mumford, D. (1999), The Red Book of Varieties and Schemes, Springer-Verlag.
- Oda, T. (1985), Convex Bodies and Algebraic Geometry, Springer-Verlag.
- Reyes, E., Villarreal, R. ve Zarate, L. (2000), "A note on Affine Toric Varieties", Linear Algebra and Its Applications, 318: 173-179.
- Shafarevich, I. R. (1997), Basic Algebraic Geometry 2, Springer-Verlag, 3. Edition.
- Sharp, R. Y. (2000), Steps in Commutative Algebra, Cambridge University Press, 2. Edition.
- Sturmfels, B. (1995), Grobner Bases and Convex Polytopes, American Mathematical Society, University Lecture Series, Vol. 8, Providence, RI.
- Sturmfels, B. (1997), "Equations Defining Toric Varieties", Algebraic Geometry, Santa - Cruz 1995, Proc. Sympos. Pure Math., AMS, Providence, RI, 62:437- 449.
- Tosun, M., "Semigroups of Complete Ideals", (Hazırlık aşamasında)

INTERNET KAYNAKLARI

[1] <http://www.singular.uni-kl.de/Manual/2-0-5/index.htm>

[2] <http://maplesoft.on.ca>

[3] <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2>



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	29.09.1980	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1994 - 1998	K. Çekmece Orhan Cemal Fersoy Lisesi
Lisans	1998 - 2002	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2002 -	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum

2002 - Devam ediyor YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi

