

154484


YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR KISMİ DENKLEMLER TAKIMINA AİT
NON-LİNEER SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

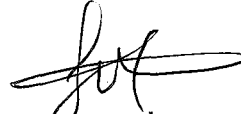
Matematikçi Sebahat Ebru YENİ

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Doç. Dr. Mustafa Bayram


Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Selmahan SELİM


Prof. Dr. Turgut Kocayörk
T. Kocayörk

İSTANBUL, 2004

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ŞEKİL LİSTESİ	iii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	iv
ÖNSÖZ.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Sonlu Elemanlar Hakkında Kısa Bilgi	1
1.2 Tez Konusuna Ait Bilgiler	2
2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYONU VE SONLU ELEMAN MODELLEMESİ	4
2.1 Matematiksel Formülasyonu	4
2.2 Varyasyon Formülasyonu.....	7
2.3 Sonlu Eleman Modellemesi.....	12
2.4 Newton-Raphson Yöntemi	19
2.5 Teğet Stiffness Matrisinin Oluşturulması.....	21
3. SAYISAL SONUÇLAR.....	25
3.1 Problem Parametreleri ve Değerleri	25
3.2 Uygun Lineer Problemin Gerilme Yayılımları	27
3.3 Yakınsaklık Sınırlarının Belirlenmesi	31
3.4 Sayısal Sonuçların Yorumlanması	35
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	45
KAYNAKLAR.....	46
EKLER.....	48
Ek1 Problemin Algoritması.....	48
ÖZGEÇMİŞ	49

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1. Şerit ve şerit malzemesinin yapısının geometrisi.....	4
Şekil 2.2. Seçilen sonlu eleman formu ve düğüm noktaları.....	13
Şekil 3.1. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$, $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda Ox_1 eksenindeki çeşitli sonlu elemanlar sayısı için elde edilen sayısal sonuçlarının yakınsaklığı ($x_2 = h$ kesitinde)	28
Şekil 3.2. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0$, $h/\ell = 0.1$, $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda σ_{22}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımı	29
Şekil 3.3. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0$, $h/\ell = 0.1$, $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda σ_{11}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımı	29
Şekil 3.4. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0$, $h/\ell = 0.1$, $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda σ_{12}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımı	29
Şekil 3.5. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$, $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda σ_{22}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımı	29
Şekil 3.6. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$, $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda σ_{11}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımı	30
Şekil 3.7. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$, $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda σ_{12}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımı	30
Şekil 3.8. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$ durumunda P/E_1 değişiminin σ_{22}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımına etkisi	39
Şekil 3.9. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$ durumunda P/E_1 değişiminin σ_{11}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımına etkisi	40
Şekil 3.10. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.0$, $h/\ell = 0.1$ durumunda P/E_1 değişiminin σ_{22}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımına etkisi	41
Şekil 3.11. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.0$, $h/\ell = 0.1$ durumunda P/E_1 değişiminin σ_{11}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımına etkisi	42
Şekil 3.12. $P/E_1 = 0.0001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$ durumunda ε değişiminin σ_{22}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımına etkisi	43
Şekil 3.13. $P/E_1 = 0.0001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$ durumunda ε değişiminin σ_{11}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımına etkisi	44

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 3.1. $h/\ell = 0.1$, $E_2/E_1 = 5, 10, 20$ değerlerinde $\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda P^*/E_1 yakınsaklık sınırları.....	31
Çizelge 3.2. $P/E_1 = 0.0051$ (yakınsaklık sınırı), $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$ durumunda σ_{22}/p ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar	32
Çizelge 3.3. $P/E_1 = 0.0052$, $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$ durumunda σ_{22}/p ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar	33
Çizelge 3.4. $P/E_1 = 0.0053$, $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$ durumunda σ_{22}/p ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar	34
Çizelge 3.5. $P/E_1 = 0.004$, $h/\ell = 0.1$, $\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda E_2/E_1 değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ ' ye göre yayılımına etkisi.....	35
Çizelge 3.6. $P/E_1 = 0.004$, $h/\ell = 0.1$, $\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda E_2/E_1 değişiminin σ_{11}/p gerilmesinin x_1/ℓ ' ye göre yayılımına etkisi.....	36
Çizelge 3.7. $P/E_1 = 0.004$, $h/\ell = 0.1$, $\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda E_2/E_1 değişiminin σ_{12}/p gerilmesinin x_1/ℓ ' ye göre yayılımına etkisi	37
Çizelge 3.8. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$ durumunda P/E_1 değişiminin σ_{22}/p gerilmesinin x_1/ℓ ' ye göre yayılımına etkisi.....	38

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında, tezimi yöneten, benden her konuda yardımlarını hiç esirgemeyen, paniğe kapıldığım anlarda beni destekleyip bana moral veren sevgili hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Selmahan SELİM' e; tezimin yapım aşamasında bana yardımcı olan sevgili hocalarım sayın Prof.Dr. Surkay D. AKBAROV ve Doç.Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU' na, şekillerin çizilmesinde yardımcı olan Yrd.Doç.Dr. Elif Tekin TARIM' a, yardımları için Yrd.Doç.Dr. Işım DEMİRİZ' e; tezimin yazımında bana yardım eden sevgili arkadaşım Arş.Gör. Fatma ÖZTÜRK' e; her derdimde yardımına koşan canım dostum Ayşe ALTINTAŞ' a; tezimin hazırlanma sürecinde ve dışında, bana hem çalışmalarımında hem de hayatımda her türlü konuda manevi destek olan, beni hiçbir konuda yalnız bırakmayan sevgili arkadaşım Sayın İlhan DAŞ' a en içten duygularıyla teşekkür ediyor ve sevgilerimi yolluyorum.

Ayrıca benim bugünkü konumumda olmamı sağlayan sevgili aileme, kardeşlerim ve sevdiklerime sonsuz teşekkürler. Sizi çok seviyorum.



ÖZET

Bu çalışmada iki boyutlu geometrik non-lineer problemlerine karşı gelen sınır değer problemleri sonlu elemanlar yöntemi (FEM) ile sayısal olarak incelenmiştir.

Şerit malzemesinin bünye denklemleri Akbarov ve Guz süreklilik teorisi çerçevesinde ele alınmıştır. Ele alınan problem değişken katsayılı kısmi türevli non-lineer diferansiyel denklemler sistemidir. Bu problemin analitik çözümü imkansız olduğundan sonlu elemanlar yöntemi ile sayısal olarak incelenmiştir.

Ele alınan problemin matematiksel formülasyonu verilmiştir. Varyasyon formülasyonu oluşturulmuş ve sonlu eleman modellemesi yapılmıştır. Sonlu elemanlar sonucunda oluşan non-lineer denklemler sisteminin sayısal çözümünde Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır. Newton-Raphson yöntemi ile problemi belirleyen parametrelerin yakınsaklık sınırları belirlenmeye çalışılmıştır. Belirlenen bu sınırdan büyük değerler için Newton-Raphson yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçlar iraksak olmaktadır.

Gerilme dağılımlarına ait sayısal sonuçlar grafikler halinde verilmiştir. Bu sonuçların ayrıca yorumları yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: Non-lineer sınır değer problemi, Sonlu Eleman yöntemi, Newton-Raphson yöntemi, yakınsaklık.

ABSTRACT

In this work, we study two-dimensional geometric non-linear boundary value problems and we use finite element method to solve the problem.

The constitutive relations of the trip material are taken within the framework of the continuum theory by Akbarov and Guz. The problem we discuss here is non-linear partial derivative differential equation system with variable coefficient. Because analytic solutions of the problem is impossible; we solve the problem using numerical analysis –Finite Element-method.

Mathematical formulation of the problem is given. Variational formulation of the problem is formed and maden using finite element model. Newton-Raphson method is used non-linear algebraic equations system which forms as result of finite elements. We are tried to determine convergence boundaries of parameters which determined problem by Newton-Raphson method. Numerical results obtained with Newton-Raphson method are being divergent for great values determined this boundary.

Numerical results of stress dispersal are given as graphics. Furthermore, this results of comments are maden.

Keywords: Non-linear boundary value problem, Finite Element method, Newton-Raphson method, convergence.

1. GİRİŞ

1.1 Sonlu Elemanlar Hakkında Kısa Bilgi

Günümüzde, diferansiyel denklemlerle ilgili problemlerin bilgisayarda çözümlenmesi açısından en kapsamlı ve evrensel yöntem, “ Sonlu Elemanlar Yöntemi (FEM) ” dir. Bu yöntemin klasik sonlu farklar yönteminden başlıca farkı, bunun sınır değer problemini değil, varyasyonel problemi temel almasıdır. Bu nedenle sonlu elemanlar yöntemi, bilimsel ve teknolojik problemlerin sayısal çözümlenmesinde en çok kullanılan yöntemlerin başında gelmektedir (Hasanoğlu, 2001).

Sonlu elemanlar yöntemi, matematikçilerden çok inşaat, makine, uçak, nükleer enerji mühendisliği gibi çeşitli mühendislik dallarının karşılaştıkları karmaşık problemlerin çözümlerini bulmakta kullanılan sayısal çözüm yöntemlerinden birisidir (Barkanov, 2001). FEM’ in bulunuşunun kesin bir tarihini vermek oldukça zordur; ancak FEM ilk olarak 1950’li yıllarda inşaat mühendisleri tarafından gerilme analizi problemlerine uygulanmıştır. FEM’ in köklerini üç farklı araştırma grubuna dayandırabiliriz (Bathe, 1996):

- Uygulamalı matematikçiler: R. Courant
- Fizikçiler: J. L. Synge
- Mühendisler: J. H. Argyris ve S. Kelsey

FEM konusundaki ilk yazılar, J.H. Argyris ve S.Kelsey; M.J. Turner, R.W. Colough, H.C. Martin ve L.J. Topp; R.W. Colough tarafından yazılmıştır (Bathe, 1996). Sonlu eleman ismi ise ilk kez R.W. Colough’un yazısında kullanılmıştır (Bathe, 1996). İlk önemli makaleler ise, J.H. Argyris; O.C. Zienkiewicz ve Y.K. Cheung tarafından kaleme alınmıştır (Bathe, 1996). FEM ilk olarak yapı alanında uygulanmıştır. Yapı alanı dışındaki problemlerin FEM ile çözümü 1960’lı yıllarda başlamıştır. Örneğin, Zienkiewicz ve Cheung 1965’de, sonlu eleman yöntemi ile Poisson denklemini çözmüştür (Bathe, 1996).

FEM’ de bilgisayar programlarının kullanılması kaçınılmazdır; çünkü elde edilen çok sayıda denklemin çözümünü elle yapmak çok zaman almakta, bazen de mümkün olmamaktadır. Bu sebepten ötürü genel amaçlı sonlu elemanlar paket programları 1970’li yıllardan itibaren

ortaya çıkmaya başlamıştır. 1980'li yılların sonlarına doğru ise artık paket programlar mikro bilgisayarlarda kullanılmaya başlanmıştır. Günümüzde FEM' le ilgili programcılık yapan birçok ticari şirket bulunmaktadır. 1990 yıllarının ortaları itibariyle FEM ve uygulamalarıyla ilgili yaklaşık olarak 40.000' in üzerinde makale ve kitap yayınlanmıştır [1].

1.2 Tez Konusuna Ait Bilgiler

Bilindiği gibi doğada oluşan pek çok fiziksel, mekaniksel gibi olayların matematiksel formülasyonu lineer veya lineer olmayan sınır değer problemleri şeklindedir. Bu problemler çoğunlukla değişken katsayılı diferansiyel denklemler sistemi şeklinde ifade edilmektedir. Bu olayların incelenmesi için bu lineer ve non-lineer problemlerin çözülmesi gerekmektedir. Ancak non-lineer problemlerin çözümünün bulunabilmesi son derece zor ve hatta imkansız olduğundan böylesi problemler ancak sayısal olarak incelenmektedir.

Sayısal çözümlerde ayrıklaştırma işlemi uygulanmaktadır. (Reddy, 1985), (Zienkiewicz ve Taylor, 1989; Zienkiewicz ve Taylor, 1991) kaynaklarında olduğu gibi ayrıklaştırma işlemi çoğunlukla sonlu elemanlar yönteminin uygulaması ile yapılmaktadır. Bu işlem sonunda sınır değer problemlerinin incelenmesi; problem lineer ise lineer denklemler sisteminin, non-lineer ise non-lineer denklemler sisteminin incelenmesine indirgenir.

Bilindiği gibi lineer denklemler sisteminin çözümünün elde edilmesinde temelde hiçbir zorluk yoktur. Ancak non-lineer denklem sisteminde sayısal çözümlerin elde edilmesinde bir takım zorluklar vardır. Bu ayrıklaştırmanın ve non-lineer denklem sisteminin çözülmesinin genel tekniklerinin geliştirilmesi (Eason ve Motel,1977; Bergan vd., 1978; Matthies ve Strang, 1979; Malkus ,1980; Sarma ve Varadan, 1984; Zeid, 1985; Clarke ve Hancock,1990; Petrangeli ve Ciampi, 1997) makalelerinde yapılmıştır. Bu makalelerde non-lineer denklemler sisteminin çözülmesinde Newton-Raphson yöntemi ya da Değiştirilmiş Newton Raphson yöntemi kullanılır. Ayrıca bu makalelerde incelenen önemli soru iterasyonlardan elde edilen sayısal sonuçların yakınsaklığı sorusudur. Yakınsaklık her bir problem için özel olarak araştırılır ve problem parametrelerinin yakınsaklık sınırını belirleyen değerleri bulunur. Bilindiği gibi non-lineer denklem sisteminin çözülmesinde kullanılan yöntem Newton-Raphson yöntemidir. Bu yöntemde ardışık olarak her bir iterasyonda non-lineer denklem sistemi bilinen yöntemlerle çözülür. Buradaki zorluk iterasyon sayısının artması ile elde edilen sayısal sonuçların birbirinden uzaklaşması, yani yakınsak olmamasıdır.

Bu nedenle non-lineer sınır değer problemlerinin sayısal olarak incelenmesini içeren

araştırmaların büyük çoğunluğu yakınsaklık sınırının belirlenmesine aittir, rneğin (Selim, 1999a ; 1999b).

Sürekli ortamlar mekaniğinde sınır değer problemlerinin sonlu elemanlar ile incelenmesi ile ilgili araştırmalar 1960'lı yıllarda yapılmaya başlanmıştır. 1960–1972 tarihleri arasında yapılan araştırmaların kısa zetleri (Crisfield, 1991)' de verilmiştir. Non-lineer sınır değer problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmesine ait araştırmaların geniş zeti (Crisfield, 1997)'de verilmektedir. Geometrik non-lineer ve diğer non-lineer problemlere ait matematiksel problemlerin FEM açısından formülasyonunun yapılması ve bazı basit problemlere uygulanması (Gadala, Dokainish, Oravas , 1984)' de verilmektedir.



2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL FORMÜLASYONU VE SONLU ELEMAN MODELLEMESİ

2.1 Matematiksel Formülasyonu

Çalışmada

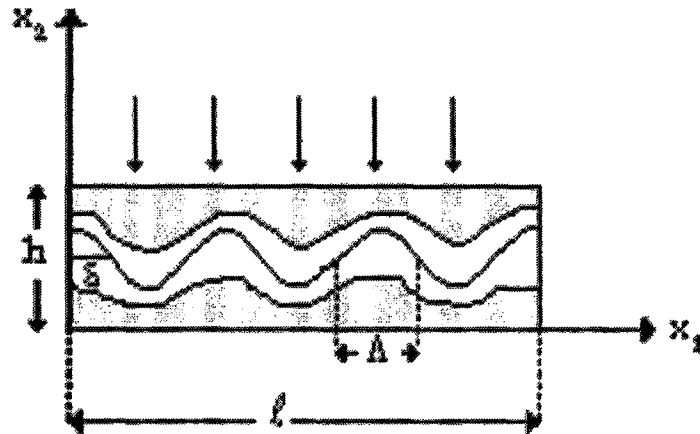
$$\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell, 0 \leq x_2 \leq h\} \quad (2.1)$$

çözüm bölgesinde sağlanan

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] = 0$$

kısmi türevli non-lineer diferansiyel denklemler sistemi ele alınmaktadır. Ω bölgesi, x_1 yönünde ℓ uzunluğunda ve x_2 yönünde h yüksekliğinde olan, yapısında x_1 yönünde eğrilik bulunduran bir şeridi temsil etmektedir. Şerit ve şerit malzemesinin yapısının geometrisi Şekil 2.1' de verilmektedir. Şekil 2.1'de belirtilen A , Λ ve δ ele alınan malzeme yapısındaki eğilmeleri karakterize eden geometrik parametrelerdir.



Şekil 2.1. Şerit ve şerit malzemesinin yapısının geometrisi

Λ , Ox_1 eksenini boyunca eğriliğin dalga uzunluğudur. δ , Ox_1x_2 koordinat sistemi orijinin Ox_1 eksenini boyunca malzeme yapısındaki eğriliği gösteren çizginin Ox_1 eksenini ile kesiştiği ilk noktaya olan uzaklığını ifade eder.

Ele alınan problemin bünye denklemi

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3)$$

şeklinde dir. (2.3) eşitliğinde aşağıdaki notasyonlar kabul edilmiştir.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} A_{11}(x_1) & A_{12}(x_1) & 2A_{16}(x_1) \\ A_{12}(x_1) & A_{22}(x_1) & 2A_{26}(x_1) \\ A_{16}(x_1) & A_{26}(x_1) & 2A_{66}(x_1) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Burada $A_{ij}(x_1)$ ' ler şerit malzemesinin mekanik özelliklerini belirten normalize edilmiş fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların ifadesi Bölüm 3' de verilmiştir.

Şekil değiştirme ve yerdeğiştirme bağıntıları

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right) \quad i, j, \alpha = 1, 2 \quad (2.5)$$

olarak ifade edilir. (2.3) bağıntısını (2.4) ve (2.5) ifadelerini göz önüne alarak aşağıdaki gibi yazalım;

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22} + 2A_{16}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{22} &= A_{12}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22} + 2A_{26}\varepsilon_{12} \\ \sigma_{12} &= A_{16}\varepsilon_{11} + A_{26}\varepsilon_{22} + 2A_{66}\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (2.6)$$

(2.6) denkleminde σ_{ij} ' ler gerilme tansörü bileşenleri, ε_{ij} ' ler şekil değiştirme tansörü bileşenleri ve u_i ' ler ise yerdeğiştirme vektörü bileşenlerini ifade etmektedir. (2.5)' deki ε_{ij} denklemini daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \quad (2.7)$$

Tez kapsamında (2.2) - (2.5) denklemler sisteminin incelenmesi aşağıdaki sınır koşulları çerçevesinde yapılmaktadır.

Sınır Koşulları :

$$u_1|_{x_1=0} = u_2|_{x_1=0} = 0$$

$$\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad \sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_1=\ell} = 0$$

$$\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0,h} = 0, \quad \sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} = 0$$

$$\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=h} = -q \quad (2.8)$$

Bu sınır koşulları dörtgen şeridin $x_2 = 0, h$ tarafları üzerinde Ox_1 eksenini yönünde etki gösteren kuvvetlerin sıfır olduğunu, $x_2 = 0$ ' da Ox_2 eksenini yönünde etki gösteren kuvvetin sıfır olduğunu, $x_2 = h$ tarafı üzerinde Ox_2 eksenini yönünde etki gösteren kuvvetin $-q$ ye eşit olduğunu, $x_1 = \ell$ ' de Ox_1 ve Ox_2 yönünde etki gösteren kuvvetlerin sıfır olduğunu ve $x_1 = 0$ ' da Ox_1 ve Ox_2 yönündeki yerdeğiştirmelerin sıfır olduğunu göstermektedir.

Böylelikle ele alınan (2.2) - (2.5) , (2.8) sınır değer problemi, uzunluğu ℓ ve yüksekliği h olan ve $x_1 = 0$ ' da ankastre mesnetli, $x_1 = \ell$ ' de serbest olan eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden yapılmış bir şeridin $x_2 = h$ ' da üniform (düzgün) basınç altında eğilmesine ait bir problemi ifade etmektedir.

(2.7)' de verilen ε_{ij} Şekil değiştirme bağıntıları non-lineer olduğundan sürekli ortamlar mekaniğinde ele aldığımız non-lineer problem geometrik non-lineer problem olarak adlandırılmaktadır.

2.2 Varyasyon Formülasyonu

Bir önceki bölümde matematiksel ifadesi verilen non-lineer denklemler sisteminin varyasyon ifadesini bulalım. Bu ifadeyi bulmak için, bakılan cisimdeki potansiyel enerjiyi ifade eden

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{S_q} q_i u_i dS \quad i,j=1,2 \quad (2.9)$$

fonksiyoneliinden yararlanalım. Virtüel iş prensibine göre, yerdeğıştirmeler cinsinden verilen sınır koşulları virtüel yerdeğıştirmeler için de sağlanırsa, (2.9) fonksiyonelinin yerdeğıştirmelere göre 1. mertebeden varyasyonunun sıfıra eşitliğinden, (2.2) denklemleri ve gerilmelere göre verilen sınır koşulları elde edilir.

(2.9) fonksiyoneliinde q_i sınırdaki etki gösteren dış kuvvetleri, S_q ise Ω bölgesini sınırlayan yüzeyde kuvvetin etki ettiği kısmı belirtmektedir.

Şimdi virtüel iş prensibini kullanarak (2.2) - (2.5) denklemlerinin ve gerilmelere göre verilen sınır koşullarının elde edildiğini gösterelim. Fonksiyonelin yerdeğıştirmelere göre 1. mertebeden varyasyonunu sıfıra eşitleyelim.

$$\delta\Pi = \iint_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{S_q} q_i \delta u_i dS = 0 \quad (2.10)$$

(2.10) ifadesinde

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_\alpha}{\partial x_j} \right) \quad i,j,\alpha = 1,2 \quad (2.11)$$

eşitlikleri yazılıp yerine konulursa

$$\delta\Pi = \iint_{\Omega} (\sigma_{11} \delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12} \delta\varepsilon_{12}) d\Omega - \int_{S_q} (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2) dS = 0 \quad (2.12)$$

$$\delta\Pi = \iint_{\Omega} \left\{ \sigma_{11} \left(\delta_1^k + \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(\delta_2^k + \frac{\partial u_k}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_2} + \right. \\ \left. \sigma_{12} \left(\left(\delta_1^k + \frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_2} + \left(\delta_2^k + \frac{\partial u_k}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_1} \right) \right\} d\Omega - \int_{S_q} (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2) dS = 0$$

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = & \iint_{\Omega} \left\{ \left(\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + \sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} \right) + \left(\sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} \right) \right. \\
& + \left. \left(\sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} + \sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} \right) \right\} d\Omega \\
& - \int_{S_q} (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2) dS = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.13) denkleminde

$$\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \right) = (\delta u_i)_{,j} \tag{2.14}$$

notasyonu kullanılarak denkleminde gerekli gruplandırmalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = & \iint_{\Omega} \left\{ \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] (\delta u_1)_{,1} + \left[\sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] (\delta u_2)_{,2} + \right. \\
& \left. \left[\sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \right] (\delta u_1)_{,2} + \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] (\delta u_2)_{,1} \right\} d\Omega \\
& - \int_{S_q} (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2) dS = 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

elde edilir. (2.15) varyasyon ifadesindeki integraller

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} (\cdot) d\Omega &= \int_0^{\ell} \left(\int_0^h (\cdot) dx_2 \right) dx_1 \\
\int_{S_q} (\cdot) dS &= \int_0^h (\cdot) \Big|_{x_1=0} dx_2 + \int_0^h (\cdot) \Big|_{x_1=\ell} dx_2 + \int_0^{\ell} (\cdot) \Big|_{x_2=0} dx_1 + \int_0^{\ell} (\cdot) \Big|_{x_2=h} dx_1
\end{aligned} \tag{2.16}$$

şeklinde olduğundan (2.15) ifadesi

$$\delta\Pi = \delta\Pi_{11} + \delta\Pi_{22} + \delta\Pi_{12} + \delta\Pi_{21} - \delta I_{02} - \delta I_{12} - \delta I_{01} - \delta I_{11} = 0 \tag{2.17}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{11} &= \int_0^h \int_0^\ell \left[\left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2 \\
\delta\Pi_{22} &= \int_0^\ell \int_0^h \left[\left[\sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} \right] dx_2 dx_1 \\
\delta\Pi_{12} &= \int_0^\ell \int_0^h \left[\left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} \right] dx_2 dx_1 \\
\delta\Pi_{21} &= \int_0^\ell \int_0^h \left[\left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
\delta I_{02} &= \int_0^h (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2) \Big|_{x_1=0} dx_2 \\
\delta I_{12} &= \int_0^h (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2) \Big|_{x_1=\ell} dx_2 \\
\delta I_{01} &= \int_0^\ell (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2) \Big|_{x_2=0} dx_1 \\
\delta I_{11} &= \int_0^\ell (q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2) \Big|_{x_2=h} dx_1
\end{aligned} \tag{2.19}$$

dır. (2.18) ifadelerinde $\delta\Pi_{11}$ ve $\delta\Pi_{21}$ ' de x_1 ' e; $\delta\Pi_{22}$ ve $\delta\Pi_{12}$ ' de x_2 ' ye göre kısmi integrasyon uygulanırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{11} &= \int_0^h \left[\left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \delta u_1 \right] \Big|_{x_1=\ell} dx_2 - \int_0^h \left[\left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \delta u_1 \right] \Big|_{x_1=0} dx_2 - \\
&\quad - \int_0^\ell \int_0^h \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \right) \delta u_1 dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{21} &= \int_0^h \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell} dx_2 - \int_0^h \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta u_2 \Big|_{x_1=0} dx_2 - \\
&\quad - \int_0^h \int_0^\ell \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right) \delta u_2 dx_1 dx_2 \\
\delta \Pi_{12} &= \int_0^\ell \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \delta u_1 \Big|_{x_2=h} dx_1 - \int_0^\ell \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \delta u_1 \Big|_{x_2=0} dx_1 - \\
&\quad - \int_0^\ell \int_0^h \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \right) \delta u_1 dx_2 dx_1 \\
\delta \Pi_{22} &= \int_0^\ell \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta u_2 \Big|_{x_2=h} dx_1 - \int_0^\ell \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \delta u_2 \Big|_{x_2=0} dx_1 - \\
&\quad - \int_0^\ell \int_0^h \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right) \delta u_2 dx_2 dx_1 \tag{2.20}
\end{aligned}$$

(2.19) ve (2.20) ifadelerini (2.17)' de yerine yazıp daha sonra δu_1 ve δu_2 ' lere göre gruplandırdığımızda

$$\delta \Pi = T_{11} + T_{22} + T_{12} + T_{21} + R = 0 \tag{2.21}$$

denklemini elde ederiz. (2.21) denkleminde

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \int_0^h \left(\left\{ \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] - q_1 \right\} \delta u_1 \Big|_{x_1=\ell} - \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] - q_1 \right\} \delta u_1 \Big|_{x_1=0} \right) dx_2
\end{aligned}$$

$$T_{12} = \int_0^h \left(\left\{ \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] - q_2 \right\} \delta u_2 \Big|_{x_1=\ell} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] - q_2 \right\} \delta u_2 \Big|_{x_1=0} \Big) dx_2 \\
T_{21} = & \int_0^\ell \left(\left\{ \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] - q_1 \right\} \delta u_1 \Big|_{x_2=h} - \right. \\
& \left. - \left\{ \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] - q_1 \right\} \delta u_1 \Big|_{x_2=0} \right) dx_1 \\
T_{22} = & \int_0^\ell \left(\left\{ \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] - q_2 \right\} \delta u_2 \Big|_{x_2=h} - \right. \\
& \left. - \left\{ \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] - q_2 \right\} \delta u_2 \Big|_{x_2=0} \right) dx_1 \\
R = & - \int_0^h \int_0^\ell \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \right\} \delta u_1 + \right. \\
& \left. + \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right\} \delta u_2 \right) dx_1 dx_2 \quad (2.22)
\end{aligned}$$

dir. (2.8)' de u_i ' lere göre verilen sınır koşullarını δu_i ' ler de sağladığından,

$$\delta u_1 \Big|_{x_1=0} = \delta u_2 \Big|_{x_1=0} = 0 \quad (2.23)$$

olur ve bunun sonucunda δu_i ' lerin bu değerlerini içeren ifadeler 0 olur. Ayrıca $\delta u_1 \Big|_{x_1=\ell}$, $\delta u_1 \Big|_{x_2=0,h}$, $\delta u_2 \Big|_{x_1=\ell}$, $\delta u_2 \Big|_{x_2=0,h}$ ifadeleri de keyfi olduklarından katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek ve

$$q_{x_2=0,h} = q_2 \Big|_{x_2=0} = 0, \quad q_2 \Big|_{x_2=h} = -q, \quad q_1 \Big|_{x_1=\ell} = q_2 \Big|_{x_1=\ell} = 0 \quad (2.24)$$

olduğu göz önüne alınarak (2.2) denklemleri ve (2.8)' deki

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{x_1=\ell} &= 0 \\
\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=h} &= -q \\
\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} &= 0 \\
\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_1=f} &= 0 \\
\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0,h} &= 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

sınır koşulları elde edilir. (2.21) eşitliğinde kalanları yazarsak ele alınan problemin varyasyon formülasyonunun açık ifadesinin

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = - \int_0^\ell \int_0^h & \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \right\} \delta u_1 + \\
& \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sigma_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sigma_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right] \right\} \delta u_2 \Big|_{x_1, x_2} +
\end{aligned}$$

$$\int_0^\ell q \delta u_2 \Big|_{x_2=h} dx_1 = 0 \tag{2.26}$$

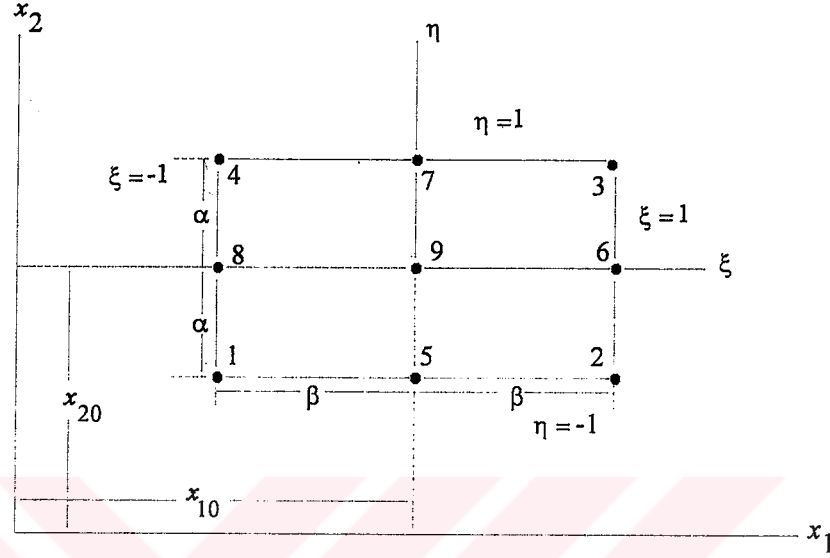
olduğu görülür.

2.3 Sonlu Eleman Modellemesi

(2.2) - (2.5) denklem sisteminin sağlandığı $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell ; 0 \leq x_2 \leq h\}$ bölgesini M adet sonlu elemana bölelim ;

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^M \Omega_i \tag{2.27}$$

Bilindiği gibi FEM uygulamasında Ω , elemanları çeşitli şekillerde seçilebilir. Eleman formunun belirlenmesi ele alınan bölgenin şekliyle ilgilidir. Bölge dörtgen olduğundan araştırmalar için dörtgen eleman şekli seçilmiştir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Seçilen sonlu eleman formu ve düğüm noktaları

Her bir sonlu elemanda 9 düğüm noktası alınmıştır ve 2. mertebeden Lagrange şekil fonksiyonları kullanılmıştır. Bu şekil fonksiyonları (Zienkiewicz, Taylor, 1989)' da verilen tekniğe uygun olarak her bir sonlu eleman için normalize edilmiş

$$\xi = \frac{x_1 - x_{10}}{\beta}, \quad \eta = \frac{x_2 - x_{20}}{\alpha}$$

koordinatları ile aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$N_1 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta); \quad N_4 = \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta); \quad N_7 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 + \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta); \quad N_5 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 - \eta); \quad N_8 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - 1)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta); \quad N_6 = -\frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - 1); \quad N_9 = (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) \quad (2.28)$$

Her bir Ω_t sonlu elemanında aranan yerdeğiştirmeleri

$$\mathbf{u}^t = \mathbf{N}^t \mathbf{a}^t \quad (2.29)$$

şeklinde ifade edelim. Burada

$$(\mathbf{u}^t)^T = (u_1^t(x_1, x_2) \ u_2^t(x_1, x_2))$$

$$(\mathbf{a}^t)^T = (u_{11}^t \ u_{21}^t \ \dots \ u_{19}^t \ u_{29}^t)$$

$$\mathbf{N}^t = \begin{pmatrix} N_1^t & 0 & N_2^t & 0 & N_3^t & 0 & N_4^t & 0 & N_5^t & 0 & N_6^t & 0 & N_7^t & 0 & N_8^t & 0 & N_9^t & 0 \\ 0 & N_1^t & 0 & N_2^t & 0 & N_3^t & 0 & N_4^t & 0 & N_5^t & 0 & N_6^t & 0 & N_7^t & 0 & N_8^t & 0 & N_9^t \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

dır. Burada t indisleri uygun büyüklüklerin hangi Ω_t sonlu elemanına ait olduğunu göstermektedir. \mathbf{a}^t vektörünün bileşenleri ise Ω_t sonlu elemanın nodlarındaki yerdeğiştirmeleridir. Bu bileşenlerin birinci alt indisleri yerdeğiştirmelerin yönünü, ikinci alt indisleri ise nodun lokal numarasını göstermektedir.

(2.9) ifadesinde

$$\iint_{\Omega} (\cdot) d\Omega = \sum_{t=1}^M \iint_{\Omega_t} (\cdot) d\Omega$$

$$\int_{S_t} (\cdot) dS = \sum_{t=1}^{M_1} \int_{S_t'} (\cdot) dS \quad (2.31)$$

ayrıklaştırmasını yapıp ve (2.9) ifadesinin 1. mertebeden varyasyonunu sıfıra eşitleyerek yani

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \delta \mathbf{a} = 0 \quad (2.32)$$

işlemine yaparak \mathbf{a} bilinmeyen vektörü için

$$\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{r} \quad (2.33)$$

non-lineer denklemler sistemi elde edilir.

(2.31)' deki M_1 , Ox_1 eksenini boyunca $x_2 = h$ sınırına bitişik olan elemanların sayısıdır.

(2.33)' deki \mathbf{r} vektörünün bileşenleri nodlardaki kuvvetleri göstermektedir ve bileşenleri

(2.26) ifadesindeki son teriminden yani

$$\sum_{t=1}^{M_1} q \int_{\ell_{t-1}}^{\ell_t} u_2|_{x_2=h} dx_1 \quad (2.34)$$

ifadesinden hesaplanmaktadır. Burada $\ell_0 = 0$, $\ell_{M_1} = \ell$ dir ve $\ell_t - \ell_{t-1} = \Delta\ell_t$ ler, Ω_t 'nin $x_2 = h$ sınırına bitişik olan sonlu elemanların Ox_1 eksenini boyunca olan uzunluğudur.

$\Psi(\mathbf{a})$ 'nin Hesabı

(2.15) ifadesinde

$$\frac{\partial u_s}{\partial x_m} = \frac{\partial N_i}{\partial x_m} u_{si}$$

$$(\delta u_s)_{,m} = \frac{\partial N_i}{\partial x_m} \delta u_{si} ; \quad s, m = 1, 2 ; i = 1, 2, \dots, 9 \quad (2.35)$$

ifadeleri yazılıp δu_{1i} ve δu_{2i} 'lere göre gruplandırma yapıldığında

$$\Psi(\mathbf{a}) = \sum_{t=1}^M \Psi^t(\mathbf{a}^t)$$

$$(\Psi^t(\mathbf{a}^t))^T = (\Psi_1^{1t}(\mathbf{a}^t), \Psi_2^{1t}(\mathbf{a}^t), \dots, \Psi_1^{2t}(\mathbf{a}^t), \Psi_2^{2t}(\mathbf{a}^t)) \quad (2.36)$$

olur. Burada

$$\Psi_1^{1t}(\mathbf{a}^t) = \iint_{\Omega_t} \left(\Psi_{11}^{1t}(\mathbf{a}^t) \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \Psi_{12}^{1t}(\mathbf{a}^t) \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \right) d\Omega_t$$

$$\Psi_2^{1t}(\mathbf{a}^t) = \iint_{\Omega_t} \left(\Psi_{21}^{1t}(\mathbf{a}^t) \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \Psi_{22}^{1t}(\mathbf{a}^t) \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \right) d\Omega_t \quad (2.37)$$

dır.

$$\Psi_{11} = \sigma_{11} \left(1 + \frac{\partial N_i}{\partial x_1} u_{1i} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} u_{2i}$$

$$\Psi_{12} = \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial N_i}{\partial x_1} u_{1i} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} u_{1i}$$

$$\Psi_{21} = \sigma_{11} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} u_{2i} + \sigma_{12} \left(1 + \frac{\partial N_i}{\partial x_2} u_{2i} \right)$$

$$\Psi_{22} = \sigma_{12} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} u_{2i} + \sigma_{22} \left(1 + \frac{\partial N_i}{\partial x_2} u_{2i}\right)$$

şeklinde olup, $\Psi'_{11}(\mathbf{a}')$, $\Psi'_{12}(\mathbf{a}')$, $\Psi'_{21}(\mathbf{a}')$, $\Psi'_{22}(\mathbf{a}')$ 'nin açık ifadeleri aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} \Psi'_{11}(\mathbf{a}') = & \left\{ A_{11}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \right)^2 \right) \right] + \right. \\ & + A_{12}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \\ & + A_{16}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right] \left\{ 1 + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u'_{1n} \right\} \right. \\ & + \left. \left\{ A_{16}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + A_{26}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + A_{66}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right] \right\} \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u'_{1n} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi'_{12}(\mathbf{a}') = & \left\{ A_{16}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \right. \\ & \left. + A_{26}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{66}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right] \left(1 + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u'_{1n} \right) \\
& + \left\{ A_{12}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + A_{22}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + A_{26}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right] \right\} \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u'_{1n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi'_{21}(\mathbf{a}') & = \left\{ A_{11}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + A_{12}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + A_{16}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right] \right\} \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u'_{2n} \\
& + \left\{ A_{16}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{26}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \\
& + A_{66}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right] \left(1 + \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u'_{2n} \right) \\
\Psi'_{22}(\mathbf{a}') = & \left\{ A_{16}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \right. \\
& + A_{26}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \\
& + A_{66}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right] \left. \right\} \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u'_{2n} \\
& + \left\{ A_{12}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \right. \\
& + A_{22}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right)^2 \right) \right] + \\
& + A_{26}(x_1) \left[\frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{1m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{1m} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m} \right] \left. \right\} \left(1 + \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u'_{2n} \right)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Böylece sonlu elemanlar modellemesi sonucunda değişken katsayılı kısmi türevli non-lineer diferansiyel denklemler sistemi, non-lineer denklemler sistemine indirgenmiş olur. (2.33) non-lineer denklem sisteminde non-lineer terimler ihmal edilirse (Yahnioğlu, 1996)' da verilen

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (2.39)$$

lineer denklemler sistemi elde edilir. Burada \mathbf{K}' ya *rijitlik* ya da *stifness matrisi* adı verilir.

Şimdi (2.33) non-lineer denklemler sisteminin çözüm işlemlerini açıklayalım.

2.4 Newton-Raphson Yöntemi

Önce

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$$

olduğunu varsayalım. Çalışmamızda \mathbf{a}_0 vektörü, (2.33) non-lineer denklemlerine karşı gelen (2.39) lineer denklem sisteminin çözümü olarak alınmıştır. \mathbf{a}_0 , (2.33)' de verilen non-lineer denklem sisteminin çözümü olmadığından $\mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_0)$ farkları hesaplanır. Yani

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_0) \quad (2.40)$$

ifadesi hesaplanır. Daha sonra \mathbf{a}_0 'a $\delta \mathbf{a}_1$ artımı verilir ve \mathbf{a} vektörü olarak

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1 \quad (2.41)$$

vektörü seçilir. (2.33)' de yerine yazılırsa,

$$\Psi(\mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1) = \mathbf{r} \quad (2.42)$$

olur. Burada

$$\Psi(\mathbf{a}_0 + \delta \mathbf{a}_1) \approx \Psi(\mathbf{a}_0) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{a}_1 \quad (2.43)$$

alınıp (2.42)' de yerine yazılırsa

$$\Psi(\mathbf{a}_0) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{r} \Rightarrow \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_0) = \mathbf{r}_1 \quad (2.44)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_0) \delta \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1 ; \quad \left(\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_0) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \right) \quad (2.45)$$

$\delta \mathbf{a}_1$ bilinmeyenleri için lineer denklemler sistemi elde edilir. Burada $\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_0)$ matrisine birinci iterasyona karşı gelen *teğet rijitlik (stiffness) matrisi* denir. (2.45) denklemler sisteminden $\delta \mathbf{a}_1$ bilinmeyenleri hesaplandıktan sonra \mathbf{a}_1 vektörü (2.41)'den hesaplanır. Aynı işlemler \mathbf{a}_1 vektörü için tekrarlanır.

Genel olarak n . iterasyon için bu işlemler aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{n-1} + \delta \mathbf{a}_n \quad (2.46)$$

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_{n-1}) \quad (2.47)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_{n-1}) \delta \mathbf{a}_n = \mathbf{r}_n \quad (2.48)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_{n-1}) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_{n-1}} \quad (2.49)$$

(2.46) - (2.49) işlemleri \mathbf{a}_{n-1} ve \mathbf{a}_n çözümlerinin belli bir kriter çerçevesinde yakın oldukları duruma kadar devam ettirilir. Böylece (2.33) non-lineer denklemler sisteminin istenilen hassasiyetle yaklaşık çözümleri elde edilir. Yukarıda açıklanan yöntem Newton-Raphson yöntemi olarak adlandırılır. Bu yöntemin uygulanabilmesi imkanları, yukarıda açıklanan iterasyonlar sonucunda elde edilen sayısal sonuçların yakınsaklığı ile belirlenir. Tezin giriş kısmında özetlenen araştırmalardan anlaşıldığı gibi ele alınan keyfi bir non-lineer problemi belirleyen parametrelerin belli değişme aralığında Newton-Raphson yöntemi yakınsak sayısal sonuçlar verebilmektedir. Non-lineer problem parametrelerinin söylenen değişme aralığı dışında Newton-Raphson yöntemi yakınsak sonuçlar verememektedir. Dolayısıyla problem parametrelerinin alabileceği değerler içerisinde bir üst sınır vardır ki parametrelerin değeri bu sınırı aştığında Newton-Raphson yöntemi yakınsak sayısal sonuçlar verememektedir.

2.5 Teğet Stiffness Matrisinin Oluşturulması

\mathbf{K}_T teğet rijitlik matrisi

$$\mathbf{K}_T = \sum_{t=1}^M \mathbf{K}_T^t \quad (2.50)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada \mathbf{K}_T^t ' nin bileşenleri olan K_{Tij}^t ' ler

$$K_{Tij}^t = \iint_{\Omega_k} \mathbf{G}_{ij}^t d\Omega_t \quad ; \quad i,j=1,\dots,9 \quad (2.51)$$

den bulunmaktadır ve \mathbf{G}_{ij}^t matrisinin elemanları ise

$$\mathbf{G}_{ij}^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1^t}{\partial u_{1j}^t} & \frac{\partial \Psi_1^t}{\partial u_{2j}^t} \\ \frac{\partial \Psi_2^t}{\partial u_{1j}^t} & \frac{\partial \Psi_2^t}{\partial u_{2j}^t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_{11}^t}{\partial u_{1j}^t} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_{12}^t}{\partial u_{1j}^t} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_{11}^t}{\partial u_{2j}^t} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_{12}^t}{\partial u_{2j}^t} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Psi_{21}^t}{\partial u_{1j}^t} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_{22}^t}{\partial u_{1j}^t} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_{21}^t}{\partial u_{2j}^t} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} + \frac{\partial \Psi_{22}^t}{\partial u_{2j}^t} \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

şeklindedir. Burada

$$\frac{\partial \Psi_{11}^t}{\partial u_{1j}^t} = \frac{\partial \sigma_{11}^t}{\partial u_{1j}^t} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^t\right) + \sigma_{11}^t \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^t}{\partial u_{1j}^t} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^t + \sigma_{12}^t \frac{\partial N_j}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial \Psi_{11}^t}{\partial u_{2j}^t} = \frac{\partial \sigma_{11}^t}{\partial u_{2j}^t} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^t\right) + \frac{\partial \sigma_{12}^t}{\partial u_{2j}^t} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^t$$

$$\frac{\partial \Psi_{12}^t}{\partial u_{1j}^t} = \frac{\partial \sigma_{12}^t}{\partial u_{1j}^t} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^t\right) + \sigma_{12}^t \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^t}{\partial u_{1j}^t} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^t + \sigma_{22}^t \frac{\partial N_j}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial \Psi_{12}^t}{\partial u_{2j}^t} = \frac{\partial \sigma_{12}^t}{\partial u_{2j}^t} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{1m}^t\right) + \frac{\partial \sigma_{22}^t}{\partial u_{2j}^t} \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{1m}^t$$

$$\frac{\partial \Psi_{21}^t}{\partial u_{1j}^t} = \frac{\partial \sigma_{11}^t}{\partial u_{1j}^t} \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^t + \frac{\partial \sigma_{12}^t}{\partial u_{1j}^t} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^t\right)$$

$$\frac{\partial \Psi_{21}^t}{\partial u_{2j}^t} = \frac{\partial \sigma_{11}^t}{\partial u_{2j}^t} \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u_{2m}^t + \sigma_{11}^t \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^t}{\partial u_{2j}^t} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u_{2m}^t\right) + \sigma_{12}^t \frac{\partial N_j}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial \Psi'_{22}}{\partial u'_{1j}} = \frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial u'_{1j}} \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} + \frac{\partial \sigma'_{22}}{\partial u'_{1j}} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m}\right)$$

$$\frac{\partial \Psi'_{22}}{\partial u'_{2j}} = \frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial u'_{2j}} \frac{\partial N_m}{\partial x_1} u'_{2m} + \sigma'_{12} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma'_{22}}{\partial u'_{2j}} \left(1 + \frac{\partial N_m}{\partial x_2} u'_{2m}\right) + \sigma'_{22} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \quad (2.53)$$

dir. Burada $\frac{\partial \sigma'_{11}}{\partial u'_{1j}}, \frac{\partial \sigma'_{11}}{\partial u'_{2j}}, \frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial u'_{1j}}, \frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial u'_{2j}}, \frac{\partial \sigma'_{22}}{\partial u'_{1j}}, \frac{\partial \sigma'_{22}}{\partial u'_{2j}}$ türevleri ise

$$\frac{\partial \sigma'_{11}}{\partial u'_{1j}} = A_{11}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{11}}{\partial u'_{1j}} + A_{12}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{22}}{\partial u'_{1j}} + 2A_{16}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{12}}{\partial u'_{1j}}$$

$$\frac{\partial \sigma'_{11}}{\partial u'_{2j}} = A_{11}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{11}}{\partial u'_{2j}} + A_{12}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{22}}{\partial u'_{2j}} + 2A_{16}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{12}}{\partial u'_{2j}}$$

$$\frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial u'_{1j}} = A_{16}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{11}}{\partial u'_{1j}} + A_{26}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{22}}{\partial u'_{1j}} + 2A_{66}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{12}}{\partial u'_{1j}}$$

$$\frac{\partial \sigma'_{12}}{\partial u'_{2j}} = A_{16}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{11}}{\partial u'_{2j}} + A_{26}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{22}}{\partial u'_{2j}} + 2A_{66}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{12}}{\partial u'_{2j}}$$

$$\frac{\partial \sigma'_{22}}{\partial u'_{1j}} = A_{12}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{11}}{\partial u'_{1j}} + A_{22}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{22}}{\partial u'_{1j}} + 2A_{26}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{12}}{\partial u'_{1j}}$$

$$\frac{\partial \sigma'_{22}}{\partial u'_{2j}} = A_{12}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{11}}{\partial u'_{2j}} + A_{22}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{22}}{\partial u'_{2j}} + 2A_{26}(x_1) \frac{\partial \varepsilon'_{12}}{\partial u'_{2j}} \quad (2.54)$$

şeklinde olup

$$\frac{\partial \varepsilon'_{11}}{\partial u'_{1j}} = \frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u'_{1n} \frac{\partial N_j}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \varepsilon'_{11}}{\partial u'_{2j}} = \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u'_{2n} \frac{\partial N_j}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \varepsilon'_{22}}{\partial u'_{1j}} = \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u'_{1n} \frac{\partial N_j}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial \varepsilon'_{22}}{\partial u'_{2j}} = \frac{\partial N_j}{\partial x_2} + \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u'_{2n} \frac{\partial N_j}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial \varepsilon'_{12}}{\partial u'_{1j}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x_2} + \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u'_{1n} + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u'_{1n} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial \varepsilon'_{12}}{\partial u'_{2j}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x_1} + \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \frac{\partial N_n}{\partial x_2} u'_{2n} + \frac{\partial N_n}{\partial x_1} u'_{2n} \frac{\partial N_j}{\partial x_2} \right) \quad (2.55)$$

\mathbf{K}_T ve \mathbf{K} matrislerinin bileşenleri hesaplanırken $A_{ij}(x_1)$ ' lerin her bir Ω_i elemanı çerçevesinde fonksiyonlar olarak göz önüne alınması gerektiğinden, ele alınan problemin sonlu elemanlara ait bilinen paket programlarla incelenmesi mümkün olmamaktadır. Bu nedenle sayısal sonuçları elde edebilmek için gerekli olan programlar tarafımızdan hazırlanmıştır. İntegraller 10 Gauss noktası kullanılarak Gauss İntegrasyon yöntemi ile hesaplanmıştır. Yukarıda bahsedilen programlar FORTRAN programlama dili kullanılarak hazırlanmıştır. Problemin algoritması Ek1'de verilmiştir.

Yukarıdaki işlemlerde görüldüğü gibi ele alınan problemde yerdeğiştirme esaslı FEM kullanılmıştır. Yani ele alınan alanı ayrıklaştıran eleman nodlarında bilinmeyenler olarak ancak yerdeğiştirmeler alınmıştır. Geriye kalan büyüklükler, yani σ_{ij} ' ler (gerilmeler), ε_{ij} ' ler (şekil değiştirmeler), (2.6) ve (2.7) formüllerinin ayrıklaştırmış formlarında bulunan yerdeğiştirmeler kullanılarak elde edilir. Görüldüğü gibi bu çalışmada yerdeğiştirmeler, ele alınan Ω alanında x_1 ve x_2 koordinatlarının C^0 sürekliliğine sahip fonksiyonlardır ve bundan dolayı (2.6) ve (2.7) formülleri yardımıyla elde edilen σ_{ij} ve ε_{ij} ' ler elemanlar arası sınırlarda genellikle sıçramalar yaparak süreksiz fonksiyonlar olurlar. Böyle bir durum gerçek dağılıma uygun gelmediğinden, bu durumun ortadan kaldırılması için araştırılan problemin sonlu elemanlar ile modellenmesinin izleyen şekilde geliştirilmesi yapılabilir:

Bu geliştirmede; süreksiz gerilme dağılımlarının, belli esaslandırılmış kurallar ile süreklileştirilmesi yoluna gidilir ve bu süreklileştirme işlemlerine varyasyonel iyileştirme adı verilir. Bu geliştirmede iki aşama söz konusudur. Birinci aşamada, yukarıda söylenen yerdeğiştirmeler bulunur. İkinci aşamada ise gerilmeler (σ_{ij} ' ler), onların nodlardaki değeri belirli kurallarla seçilmiş şekil fonksiyonları yardımıyla (2.29)' un benzeri olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_\sigma \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.56)$$

Burada

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}; \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_M);$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11i} \\ \bar{\sigma}_{22i} \\ \bar{\sigma}_{12i} \end{pmatrix} \quad (i=1,2, \dots, M) \quad (2.57)$$

şeklindedir. Burada \mathbf{N}_σ şekil fonksiyonları matrisini, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i$ vektörünün bileşenleri ise nodlardaki gerilmeleri göstermektedir. Çoğu zaman \mathbf{N}_σ şekil fonksiyonları (2.28)'deki şekil fonksiyonlarının aynısı alınır. Ele alınan sonlu elemanlar için \mathbf{N}_σ matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{N}_\sigma = (\mathbf{N}^1, \mathbf{N}^2, \dots, \mathbf{N}^M) \quad (2.58)$$

Burada \mathbf{N}^i ($i=1,2,\dots,M$)'ler (2.30)'da gösterildiği gibidir.

Yukarıdaki $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i$ vektörün bileşenlerinin bulunması *En Küçük Kareler Yöntemi* kullanılarak elde edilir. Bu durumda,

$$Q = \iint_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 d\Omega \quad (2.59)$$

fonksiyoneline bakılır ve bu fonksiyonelin varyasyonu sıfıra eşitlenerek $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i$ vektörünün bileşenleri için

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ijk}} = 0, \quad i,j=1,2; \quad k=1,2, \dots, M \quad (2.60)$$

denklemler sistemi elde edilir. (2.60)'daki $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ vektörünün bileşenleri olan $\hat{\sigma}_{ij}$ 'ler (2.6) ve (2.7) formülleri yardımı ile elde edilen gerilmelerdir.

Bu çalışmada yerdeğiştirme esaslı FEM kullanıldığından ele alınan problemdeki gerilmelerin sürekleştirilmesi için (2.56) - (2.60) yaklaşımı kullanılmıştır.

3. SAYISAL SONUÇLAR

3.1 Problem Parametreleri ve Değerleri

Şerit malzemesinin birbirini tekrarlayan iki tür homojen izotrop malzemeden oluşan çok katlı bir ortam olduğunu varsayarak, (Christensen,1979; Akbarov ve Guz, 2000)' e göre A_{ij}^0 sabitleri aşağıdaki formüller yardımıyla belirlenir.

$$A_{23}^0 = A_{12}^0 = \lambda^{(1)}\eta^{(1)} + \lambda^{(2)}\eta^{(2)} - \eta^{(1)}\eta^{(2)}(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}) \frac{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}) - (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(2)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(1)}}$$

$$\frac{1}{2}(A_{11}^0 + A_{12}^0) = (\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(1)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(2)} - \frac{(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2}{(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)})\eta^{(2)} + (\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})\eta^{(1)}}$$

$$\frac{1}{2}(A_{11}^0 - A_{13}^0) = \eta^{(1)}\mu^{(1)} + \eta^{(2)}\mu^{(2)},$$

$$A_{66}^0 = A_{44}^0 = \frac{\mu^{(1)}\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}\eta^{(2)} + \mu^{(2)}\eta^{(1)}}, \quad A_{55}^0 = \eta^{(1)}\mu^{(1)} + \eta^{(2)}\mu^{(2)} \quad (3.1)$$

dır. Burada $\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$ ($k=1,2$) yukarıda adı geçen izotrop malzemelerin mekaniksel sabitleridir, $\eta^{(k)}$ ise bu malzemelerin oluşturdukları ortamdaki yoğunluğunu gösterir. $\lambda^{(k)}$ ve $\mu^{(k)}$ sabitlerinin $E^{(k)}$ (elastisite modülü) ve $\nu^{(k)}$ (Poisson oranı) sabitleri ile olan

$$\lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)}E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})}; \quad \mu^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})} \quad (3.2)$$

ifadelerinden kullanılmıştır.

(2.4)'de verilen **D** matrisinin elemanları (Akbarov ve Guz 1991,2000) teorisine göre $A_{ij}(x_1)$ fonksiyonları A_{ij}^0 sabitleri ve malzeme yapısındaki eğriliği gösteren $F(x_1) = \varepsilon f(x_1)$ fonksiyonunun yardımı ile aşağıda verilen formüllerle hesaplanmıştır:

$$A_{11}(x_1) = A_{11}^0\Phi_1^4(x_1) + 2A_{12}^0\Phi_1^2(x_1)\Phi_2^2(x_1) + A_{22}^0\Phi_2^4(x_1) + 4A_{66}^0\Phi_1^2(x_1)\Phi_2^2(x_1)$$

$$A_{12}(x_1) = (A_{11}^0 + A_{22}^0 - 4A_{66}^0)\Phi_1^2(x_1)\Phi_2^2(x_1) + A_{12}^0(\Phi_1^4(x_1) + \Phi_2^4(x_1))$$

$$\begin{aligned}
A_{16}(x_1) &= (A_{12}^0 - A_{11}^0 + 2A_{66}^0)\Phi_1^3(x_1)\Phi_2(x_1) + (A_{22}^0 - A_{12}^0 - 2A_{66}^0)\Phi_1(x_1)\Phi_2^3(x_1) \\
A_{22}(x_1) &= A_{11}^0\Phi_2^4(x_1) + 2A_{12}^0\Phi_1^2(x_1)\Phi_2^2(x_1) + A_{22}^0\Phi_1^4(x_1) + 4A_{66}^0\Phi_1^2(x_1)\Phi_2^2(x_1) \\
A_{26}(x_1) &= (A_{12}^0 - A_{11}^0 + 2A_{66}^0)\Phi_1(x_1)\Phi_2^3(x_1) + (A_{22}^0 - A_{12}^0 - 2A_{66}^0)\Phi_1^3(x_1)\Phi_2(x_1) \\
A_{66}(x_1) &= (A_{11}^0 - 2A_{12}^0 + A_{22}^0)\Phi_1^2(x_1)\Phi_2^2(x_1) + A_{66}^0(\Phi_1^4(x_1) + \Phi_2^4(x_1) - 2\Phi_1^2(x_1)\Phi_2^2(x_1)) \quad (3.3)
\end{aligned}$$

$$\Phi_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2}}, \quad \Phi_2(x_1) = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_1} \Phi_1(x_1) \quad (3.4)$$

Çalışmada şerit malzeme yapısındaki eğriliğin periyodik olduğu varsayılmış ve $F(x_1) = \varepsilon f(x_1)$ fonksiyonu

$$F(x_1) = \varepsilon f(x_1) = A \sin\left(\frac{\pi x_1}{\Lambda} + \delta\right) = \frac{A}{\Lambda} \Lambda \sin\left(\frac{\pi x_1}{\Lambda} + \delta\right) \quad (3.5)$$

şeklinde alınmıştır. $A < \Lambda$ kabul edilerek yukarıdaki ε parametresini $\varepsilon = \frac{A}{\Lambda}$ olarak alalım.

Ele alınan probleminin matematiksel formülasyonundan görüldüğü gibi bu problemi belirleyen parametreler aşağıdaki büyüklüklerdir:

$$E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, \eta_1, \eta_2, h, \ell, q, \Lambda, \delta, A \quad (3.6)$$

Çalışmada parametrelerin değerleri aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$E_2/E_1 = 5, 10, 20; \quad h/\ell = 0.1; \quad \varepsilon = 0.0, 0.05, 0.1; \quad \ell/\Lambda = 8$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.3; \quad \eta_1 = \eta_2 = 0.5; \quad \delta = \pi/2.$$

Çalışmada P/E_1 değerlerinin değişiminin sayısal sonuçların yakınsaklığına etkisi incelenir.

P/E_1 geometrik non-lineeritenin derecesini gösteren parametredir. Bu incelemeler sonucunda öyle P^*/E_1 değeri belirlenir ki $P/E_1 \leq P^*/E_1$ durumunda elde edilen sayısal değerler yakınsak, $P/E_1 > P^*/E_1$ durumunda ise ıraksak olur. P^*/E_1 'e yakınsaklık sınırı denir ve bu sınır Newton-Raphson yöntemi kullanılarak belirlenir.

Yakınsaklık kriteri

$$|\sigma_{22}^{(n)} - \sigma_{22}^{(n-1)}| \leq \alpha \approx O(10^{-3}) \quad (3.7)$$

kabul edilir. Burada n , iterasyon sayısını göstermektedir.

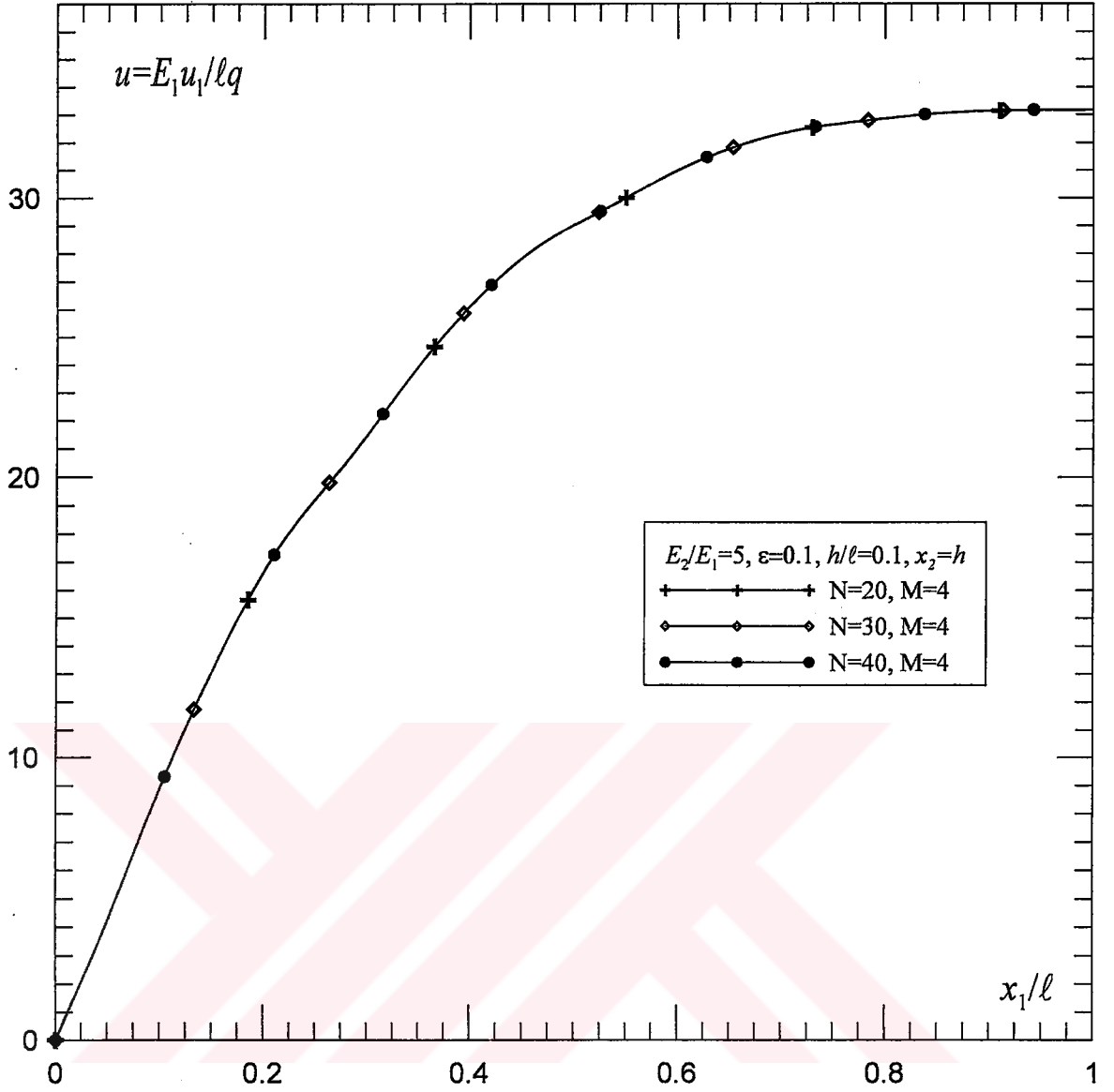
Şekil 3.1' de $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$, $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda Ox_1 eksenini yönündeki çeşitli sonlu elemanlar için u_1 yerdeğiştirmesinin x_1/ℓ ' ye göre yayılımı verilmiştir. Bu grafik bölgenin $x_2 = h$ kesitinde çizilmiştir. M , Ox_2 eksenini yönündeki sonlu eleman sayısını; N , Ox_1 eksenini yönündeki sonlu eleman sayısını göstermektedir. Bu grafikten görüldüğü gibi sonlu eleman sayısının $N = 20$, $M = 4$ değerlerinin belirlendiği sayıdan daha fazla artırılması sonuçlar üzerinde dikkate değer derecede etkili olmamakta ve elde edilen sayısal sonuçlar hemen hemen çakışmaktadır. Bu nedenle bilgisayar programlarının çalıştırılmasında zaman ve hafızanın ekonomik kullanımı açısından sayısal incelemelerde Ω bölgesinde Ox_1 eksenini yönünde 20, Ox_2 eksenini yönünde 4 sonlu eleman kullanılmıştır.

3.2 Uygun Lineer Problemin Gerilme Yayılımları

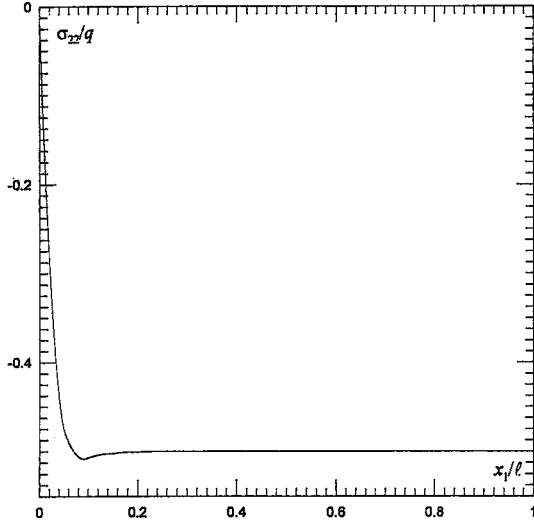
Aşağıda vereceğimiz şekillerde σ_{22}/q ve σ_{12}/q gerilmeleri bölgenin $x_2 = h/2$ kesitinde, σ_{11}/q gerilmesi ise $x_2 = h$ kesitinde çizilmiştir.

$E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0$, $h/\ell = 0.1$, $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda σ_{22}/q , σ_{11}/q , σ_{12}/q gerilmelerinin x_1/ℓ ' ye göre yayılımları sırasıyla Şekil 3.2, Şekil 3.3, Şekil 3.4' de verilmiştir.

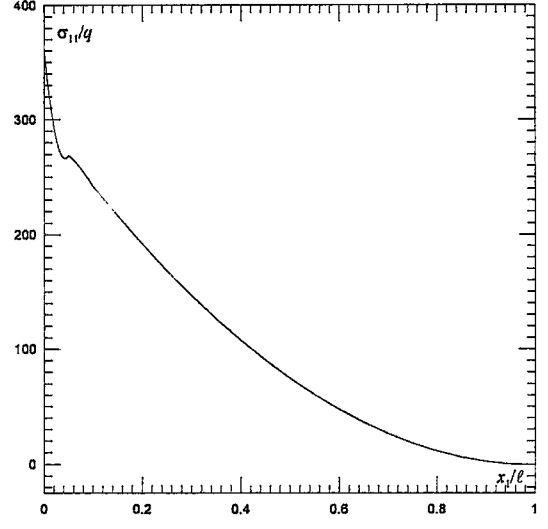
$E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$, $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda σ_{22}/q , σ_{11}/q , σ_{12}/q gerilmelerinin x_1/ℓ ' ye göre yayılımları sırasıyla Şekil 3.5, Şekil 3.6, Şekil 3.7' de verilmiştir.



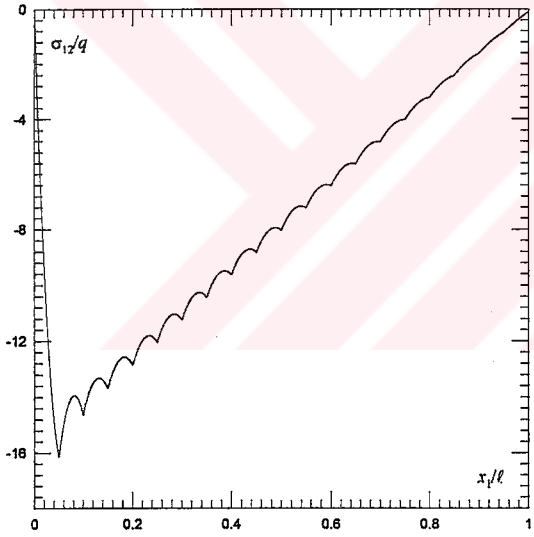
Şekil 3.1. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/l = 0.1$, $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda Ox_1 eksenini yönündeki çeşitli sonlu elemanlar sayısı için elde edilen sayısal sonuçlarının yakınsaklığı ($x_2 = h$ kesitinde)



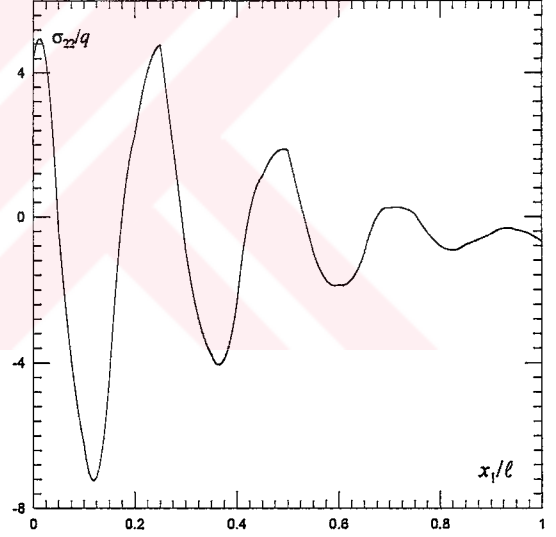
Şekil 3.2. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0$, $h/l = 0.1$,
 $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda
 σ_{22}/q gerilmesinin x_1/l 'ye göre yayılımı



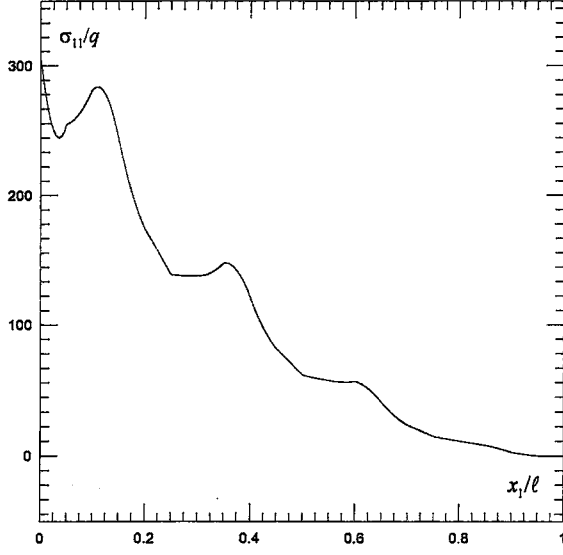
Şekil 3.3. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0$, $h/l = 0.1$,
 $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda
 σ_{11}/q gerilmesinin x_1/l 'ye göre yayılımı



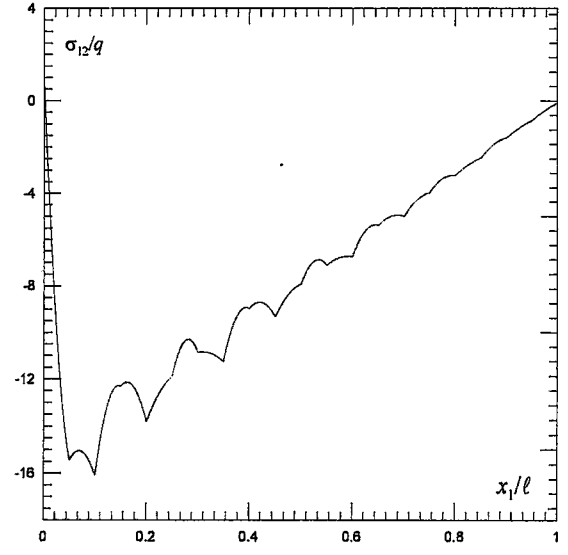
Şekil 3.4. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0$, $h/l = 0.1$,
 $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda
 σ_{12}/q gerilmesinin x_1/l 'ye göre yayılımı



Şekil 3.5. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/l = 0.1$,
 $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda
 σ_{22}/q gerilmesinin x_1/l 'ye göre yayılımı



Şekil 3.6. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$,
 $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda
 σ_{11}/q gerilmesinin x_1/ℓ 'ye göre yayılımı



Şekil 3.7. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$,
 $P/E_1 = 0$ (lineer durumu) durumunda
 σ_{12}/q gerilmesinin x_1/ℓ 'ye göre yayılımı

3.3 Yakınsaklık Sınırlarının Belirlenmesi

Yakınsaklık sınırı σ_{22} ' ler için belirlenmiştir. σ_{22} için belirlenen yakınsaklık sınırı problemin tümünün yakınsaklık sınırı gibi kabul edilebilmektedir. Yapılan araştırmalar ve elde edilen sayısal sonuçlar incelenen durumlarda σ_{22} ' nin $x_2 = h/2$ kesitinde mutlak değerce maksimal olduğunu göstermektedir. Bu nedenden dolayı σ_{22}/q ' nin değerleri $x_2 = h/2$ ' de hesap edilmiştir.

$E_2/E_1 = 5, 10, 20$ değerlerinde $\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda bulduğumuz P^*/E_1 yakınsaklık sınırları Çizelge 3.1' de verilmektedir.

Çizelge 3.1. $h/\ell = 0.1$, $E_2/E_1 = 5, 10, 20$ değerlerinde $\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda P^*/E_1 yakınsaklık sınırları

	$\varepsilon = 0.0$			$\varepsilon = 0.1$		
	E_2/E_1			E_2/E_1		
	5	10	20	5	10	20
P^*/E_1	0.0062	0.0066	0.007	0.0051	0.0046	0.004
İterasyon Sayısı	11	7	22	10	8	5

$E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$ durumunda Newton-Raphson yöntemi ile $P/E_1 = 0.0051, 0.0052, 0.0053$ değerlerinde bulunan sayısal sonuçlar sırası ile Çizelge 3.2 , Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4' de verilmektedir. Bu çizelgelerde verilen çok sayıda iterasyonlarda bulunan sayısal sonuçlar karşılaştırıldığında (3.7) kriteri çerçevesinde yakınsaklık sınırının $P^*/E_1 = 0.0051$ olduğu görülmektedir.

Çizelge 3.2. $P/E_1 = 0.0051$ (yakınsaklık sınırı), $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$ durumunda σ_{22}/q ' ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar

İterasyon No	x_1/ℓ							
	0.250	0.365	0.490	0.600	0.700	0.830	0.935	0.100
1.	460.764	804.538	1121.651	1331.869	1478.208	1540.279	1564.125	1499.630
2.	145.914	290.442	428.582	519.207	581.871	609.388	619.461	593.862
3.	27.990	78.119	133.070	169.604	194.647	206.336	210.259	201.458
4.	1.076	9.063	24.648	35.628	43.559	47.557	48.747	46.458
5.	-0.594	-1.478	1.289	2.245	3.566	4.123	4.266	3.502
6.	-1.180	-2.147	0.401	0.356	1.187	1.163	1.181	0.235
7.	-1.253	-2.231	0.505	0.413	1.793	2.305	2.954	1.777
8.	-1.357	-2.494	0.055	-0.585	0.287	0.045	0.341	-0.840
9.	-1.404	-2.576	0.049	-0.631	0.327	0.111	0.544	-0.748
10.	-1.417	-2.607	-0.008	-0.752	0.127	-0.218	0.143	-1.155
11.	-1.418	-2.609	-0.009	-0.755	0.125	-0.223	0.139	-1.161
12.	-1.418	-2.609	-0.009	-0.755	0.125	-0.223	0.139	-1.151
13.	-1.418	-2.609	-0.009	-0.755	0.125	-0.223	0.139	-1.151
14.	-1.418	-2.609	-0.009	-0.755	0.125	-0.223	0.139	-1.151
15.	-1.418	-2.609	-0.009	-0.755	0.125	-0.223	0.139	-1.151
16.	-1.418	-2.609	-0.009	-0.755	0.125	-0.223	0.139	-1.151

Çizelge 3.3. $P/E_1 = 0.0052$, $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$ durumunda σ_{22}/q ' ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar

İterasyon No	x_1/ℓ							
	0.250	0.365	0.490	0.600	0.700	0.830	0.935	0.100
1.	472.176	823.043	1147.442	1360.880	1510.159	1573.458	1597.786	1531.907
2.	151.429	299.470	440.564	533.154	597.183	625.262	635.558	609.299
3.	30.039	82.188	138.718	176.270	201.994	213.968	218.002	208.887
4.	1.346	10.196	26.618	38.184	46.477	50.648	51.894	49.485
5.	-0.507	-1.374	1.507	2.643	4.073	4.701	4.862	4.091
6.	-1.169	-2.099	0.341	0.259	1.007	0.952	0.943	0.019
7.	-1.242	-2.154	0.664	0.667	2.198	2.908	3.677	2.472
8.	-1.359	-2.457	0.037	-0.600	0.239	-0.016	0.264	-0.913
9.	-1.414	-2.543	0.045	-0.615	0.338	0.139	0.580	-0.713
10.	-1.396	-2.547	-0.000	-0.734	0.128	-0.211	0.145	-1.150
11.	-1.414	-2.563	-0.011	-0.740	0.124	-0.217	0.141	-1.157
12.	-1.433	-2.580	-0.012	-0.743	0.125	-0.218	0.141	-1.157
13.	-1.423	-2.571	-0.012	-0.742	0.124	-0.218	0.141	-1.157
14.	-1.405	-2.556	-0.010	-0.738	0.125	-0.217	0.142	-1.156
15.	-1.419	-2.567	-0.011	-0.741	0.124	-0.217	0.141	-1.157
16.	-1.270	-2.462	0.013	-0.713	0.135	-0.204	0.153	-1.146
17.	-1.363	-2.535	0.002	0.730	0.132	-0.211	0.148	-1.151
18.	-1.423	-2.570	-0.011	-0.742	0.124	-0.218	0.141	-1.157
19.	-1.397	-2.550	-0.009	-0.737	0.125	-0.216	0.142	-1.156
20.	-1.414	-2.563	-0.011	-0.740	0.125	-0.217	0.148	-1.157
21.	-1.433	-2.580	-0.012	-0.743	0.125	-0.218	0.141	-1.157
22.	-1.423	-2.571	-0.012	-0.742	0.124	-0.218	0.141	-1.157
23.	-1.407	-2.557	-0.010	-0.739	0.125	-0.217	0.141	-1.156
24.	-1.420	-2.568	-0.011	-0.741	0.124	-0.217	0.141	-1.157
25.	-1.370	-2.530	-0.000	-0.732	0.127	-0.214	0.143	-1.154

Çizelge 3.4. $P/E_1 = 0.0053$, $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$ durumunda σ_{22}/q ' ler için farklı iterasyonlarda elde edilen sayısal sonuçlar

İterasyon No	x_1/ℓ							
	0.250	0.365	0.490	0.600	0.700	0.830	0.935	0.100
1.	483.564	841.512	1172.194	1389.849	1542.065	1606.591	1631.401	1564.141
2.	156.945	308.475	452.511	547.060	612.450	641.088	651.609	624.692
3.	32.131	86.281	144.372	182.933	209.332	221.589	225.733	216.304
4.	1.642	11.376	28.642	40.788	49.441	53.785	55.086	52.556
5.	-0.463	-1.257	1.750	3.078	4.622	5.324	5.550	4.723
6.	-1.152	-2.053	0.289	0.182	0.860	0.787	0.759	-0.143
7.	-1.240	-2.087	0.778	0.922	2.610	3.522	4.413	3.180
8.	-1.404	-2.472	0.010	-0.629	0.200	-0.060	0.220	-0.960
9.	-1.398	-2.488	0.062	-0.586	0.355	0.159	0.597	-0.697
10.	-1.407	-2.516	-0.011	-0.723	0.126	-0.208	0.145	-1.149
11.	-1.353	-2.475	-0.000	-0.715	0.128	-0.206	0.147	-1.148
12.	-1.391	-2.505	-0.010	-0.722	0.125	-0.210	0.144	-1.151
13.	-1.127	-2.536	-0.012	-0.729	0.125	-0.212	0.144	-1.152
14.	-1.413	-2.522	-0.013	-0.726	0.124	-0.212	0.143	-1.153
15.	-1.390	-2.503	-0.011	-0.722	0.125	-0.210	0.144	-1.152
16.	-1.417	-2.527	-0.012	-0.727	0.125	-0.211	0.144	-1.152
17.	-1.401	-2.512	-0.012	-0.724	0.125	-0.211	0.144	-1.152
18.	-1.342	-2.543	0.037	-0.711	0.159	-0.189	0.172	-1.129
19.	-1.419	-2.552	-0.000	-0.728	0.132	-0.208	0.149	-1.148
20.	-1.452	-2.557	-0.015	-0.733	0.125	-0.213	0.143	-1.153
21.	-1.431	-2.538	-0.014	-0.730	0.124	-0.212	0.143	-1.153
22.	-1.414	-2.523	-0.013	-0.727	0.124	-0.212	0.143	-1.153
23.	-1.390	-2.503	-0.011	-0.722	0.125	-0.210	0.144	-1.152
24.	-1.416	-2.525	-0.012	-0.727	0.125	-0.211	0.144	-1.152
25.	-1.399	-2.510	-0.012	-0.724	0.125	-0.211	0.144	-1.152

3.4 Sayısal Sonuçların Yorumlanması

Çizelge 3.5, Çizelge 3.6, Çizelge 3.7' de $P/E_1 = 0.004$, $h/\ell = 0.1$, $\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda E_2/E_1 ' in çeşitli değerleri için sırasıyla σ_{22}/q , σ_{11}/q , σ_{12}/q gerilmelerinin sayısal sonuçları verilmektedir. Bu çizelgelerde sayısal sonuçlar $\frac{\text{lineer}}{\text{non-linear}}$ şeklinde verilmiştir. Bu çizelgelerden görüldüğü gibi E_2/E_1 değeri arttıkça lineer problemin çözümünden elde edilen sonuçlar mutlak değerce artmaktadır. Fakat non-lineerliğin bu sonuçlara etkisi E_2/E_1 ' in büyümesiyle azalmaktadır.

Çizelge 3.5. $P/E_1 = 0.004$, $h/\ell = 0.1$, $\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda E_2/E_1 değişiminin σ_{22}/q gerilmesinin x_1/ℓ ' ye göre yayılımına etkisi

x_1/ℓ	$\varepsilon = 0.0$				$\varepsilon = 0.1$			
	E_2/E_1				E_2/E_1			
	5	10	20	50	5	10	20	50
0.250	$\frac{-0,500}{-4,304}$	$\frac{-0,500}{-5,234}$	$\frac{-0,500}{-4,407}$	$\frac{-0,500}{-2,224}$	$\frac{4,785}{-1,640}$	$\frac{9,567}{2,197}$	$\frac{14,997}{9,638}$	$\frac{21,987}{20,630}$
	$\frac{-0,500}{-2,033}$	$\frac{-0,500}{-2,699}$	$\frac{-0,500}{-2,416}$	$\frac{-0,500}{-1,310}$	$\frac{-4,058}{-3,405}$	$\frac{-7,379}{-6,768}$	$\frac{-11,171}{-11,330}$	$\frac{-15,839}{-16,458}$
0.365	$\frac{-0,500}{-0,850}$	$\frac{-0,500}{-1,246}$	$\frac{-0,500}{-1,217}$	$\frac{-0,500}{-0,771}$	$\frac{1,879}{-0,009}$	$\frac{4,211}{1,593}$	$\frac{6,978}{4,776}$	$\frac{10,605}{9,857}$
	$\frac{-0,500}{-0,375}$	$\frac{-0,500}{-0,626}$	$\frac{-0,500}{-0,695}$	$\frac{-0,500}{-0,550}$	$\frac{-1,866}{-0,996}$	$\frac{-3,305}{-2,349}$	$\frac{-5,021}{-4,488}$	$\frac{-7,091}{-6,656}$
0.490	$\frac{-0,500}{-0,175}$	$\frac{-0,500}{-0,370}$	$\frac{-0,500}{-0,482}$	$\frac{-0,500}{-0,471}$	$\frac{0,241}{0,128}$	$\frac{0,971}{0,644}$	$\frac{1,721}{1,460}$	$\frac{2,438}{2,867}$
	$\frac{-0,500}{-0,049}$	$\frac{-0,500}{-0,243}$	$\frac{-0,500}{-0,392}$	$\frac{-0,500}{-0,452}$	$\frac{-0,912}{-0,314}$	$\frac{-1,315}{-0,731}$	$\frac{-1,767}{-1,447}$	$\frac{-2,354}{-1,680}$
0.600	$\frac{-0,500}{-0,012}$	$\frac{-0,500}{-0,214}$	$\frac{-0,500}{-0,399}$	$\frac{-0,500}{0,463}$	$\frac{-0,313}{0,106}$	$\frac{-0,175}{0,153}$	$\frac{-0,004}{0,192}$	$\frac{0,120}{0,847}$
	$\frac{-0,500}{-0,931}$	$\frac{-0,500}{-1,010}$	$\frac{-0,500}{-0,929}$	$\frac{-0,500}{-0,686}$	$\frac{-0,684}{-1,220}$	$\frac{-0,794}{-1,323}$	$\frac{-0,866}{-1,449}$	$\frac{-0,949}{-0,996}$
İterasyon No	9	7	5	4	9	6	5	3

Çizelge 3.6. $P/E_1 = 0.004$, $h/\ell = 0.1$, $\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda E_2/E_1 değişiminin σ_{11}/q gerilmesinin x_1/ℓ 'ye göre yayılımına etkisi

x_1/ℓ	$\varepsilon = 0.0$				$\varepsilon = 0.1$			
	E_2/E_1				E_2/E_1			
	5	10	20	50	5	10	20	50
0.250	$\frac{168,200}{90,433}$	$\frac{167,842}{71,674}$	$\frac{167,156}{157,082}$	$\frac{165,557}{164,683}$	$\frac{138,553}{71,846}$	$\frac{107,809}{77,093}$	$\frac{69,467}{60,915}$	$\frac{17,990}{15,126}$
0.365	$\frac{120,548}{60,204}$	$\frac{120,200}{68,328}$	$\frac{119,495}{112,070}$	$\frac{117,464}{116,801}$	$\frac{145,835}{68,634}$	$\frac{173,953}{116,121}$	$\frac{211,145}{180,681}$	$\frac{265,171}{262,363}$
0.490	$\frac{77,579}{38,520}$	$\frac{77,230}{31,602}$	$\frac{76,521}{73,367}$	$\frac{74,404}{74,455}$	$\frac{65,262}{31,882}$	$\frac{52,329}{36,588}$	$\frac{36,128}{32,683}$	$\frac{14,107}{15,814}$
0.600	$\frac{47,451}{25,091}$	$\frac{47,094}{28,244}$	$\frac{46,379}{46,474}$	$\frac{44,248}{44,876}$	$\frac{56,398}{28,685}$	$\frac{64,458}{44,614}$	$\frac{72,607}{64,452}$	$\frac{79,615}{81,817}$
0.700	$\frac{26,451}{15,956}$	$\frac{26,094}{14,465}$	$\frac{25,380}{27,359}$	$\frac{23,262}{24,210}$	$\frac{23,229}{14,839}$	$\frac{19,372}{16,171}$	$\frac{14,093}{15,130}$	$\frac{6,091}{9,759}$
0.830	$\frac{8,268}{7,326}$	$\frac{7,924}{8,220}$	$\frac{7,232}{9,889}$	$\frac{5,250}{6,243}$	$\frac{9,356}{8,551}$	$\frac{9,508}{9,620}$	$\frac{8,653}{10,654}$	$\frac{5,498}{10,220}$
0.935	$\frac{0,860}{2,531}$	$\frac{0,560}{2,437}$	$\frac{-0,020}{1,864}$	$\frac{-1,304}{-0,536}$	$\frac{0,655}{2,544}$	$\frac{0,257}{1,995}$	$\frac{-0,267}{1,300}$	$\frac{-1,137}{2,593}$
0.100	$\frac{-0,208}{0,542}$	$\frac{-0,231}{0,490}$	$\frac{-0,245}{-0,144}$	$\frac{-0,234}{0,047}$	$\frac{-0,200}{0,463}$	$\frac{-0,218}{0,488}$	$\frac{-0,220}{0,366}$	$\frac{-0,144}{3,772}$
İterasyon No	9	7	5	4	9	6	5	3

Çizelge 3.7. $P/E_1 = 0.004$, $h/\ell = 0.1$, $\varepsilon = 0.0$ ve $\varepsilon = 0.1$ durumunda E_2/E_1 değişiminin σ_{12}/q gerilmesinin x_1/ℓ' ye göre yayılımına etkisi

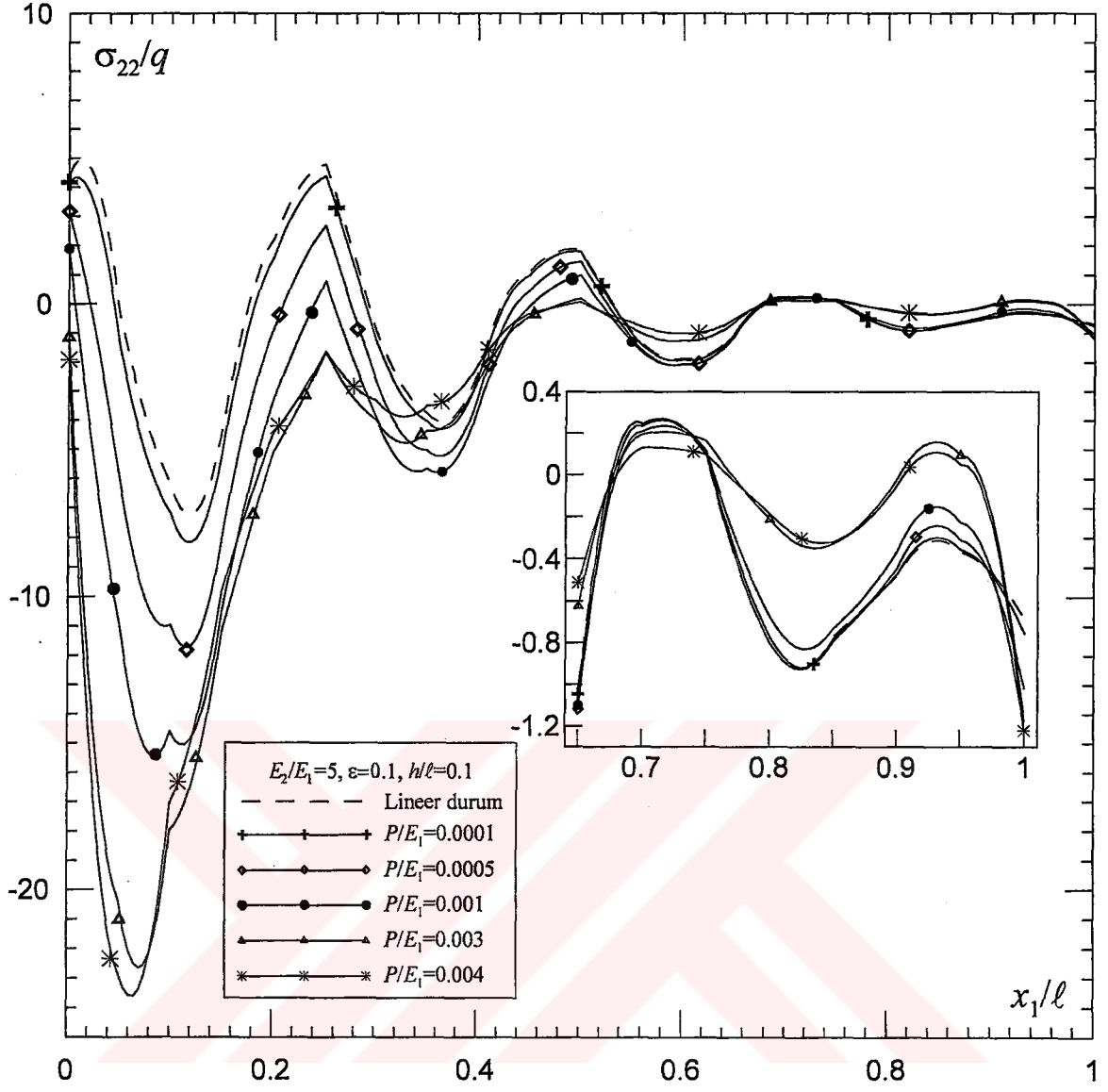
x_1/ℓ	$\varepsilon = 0.0$				$\varepsilon = 0.1$			
	E_2/E_1				E_2/E_1			
	5	10	20	50	5	10	20	50
0.250	$\frac{-12,056}{-8,056}$	$\frac{-11,917}{-10,062}$	$\frac{-11,812}{-11,310}$	$\frac{-11,624}{-11,621}$	$\frac{-11,887}{-7,363}$	$\frac{-11,626}{-8,755}$	$\frac{-11,464}{-9,596}$	$\frac{-10,932}{-9,697}$
	$\frac{-9,812}{-4,953}$	$\frac{-9,856}{-7,170}$	$\frac{-9,885}{-8,889}$	$\frac{-9,882}{-9,528}$	$\frac{-9,930}{-4,669}$	$\frac{-10,368}{-7,044}$	$\frac{-11,073}{-9,541}$	$\frac{-11,993}{-11,832}$
0.365	$\frac{-7,945}{-3,102}$	$\frac{-7,954}{-5,106}$	$\frac{-7,961}{-6,822}$	$\frac{-7,962}{-7,692}$	$\frac{-8,039}{-2,803}$	$\frac{-8,357}{-4,721}$	$\frac{-8,890}{-6,741}$	$\frac{-9,627}{-8,840}$
	$\frac{-6,430}{-2,131}$	$\frac{-6,356}{-3,803}$	$\frac{-6,307}{-5,282}$	$\frac{-6,274}{-5,995}$	$\frac{-6,742}{-1,994}$	$\frac{-7,073}{-3,756}$	$\frac{-7,465}{-5,640}$	$\frac{-7,538}{-6,537}$
0.600	$\frac{-4,822}{-1,446}$	$\frac{-4,767}{-2,765}$	$\frac{-4,731}{-3,943}$	$\frac{-4,710}{-4,465}$	$\frac{-5,007}{-1,335}$	$\frac{-5,142}{-2,597}$	$\frac{-5,260}{-3,911}$	$\frac{-5,262}{-5,484}$
	$\frac{-2,606}{-0,739}$	$\frac{-2,627}{-1,548}$	$\frac{-2,645}{-2,258}$	$\frac{-2,684}{-2,517}$	$\frac{-2,686}{-0,736}$	$\frac{-2,842}{-1,401}$	$\frac{-3,079}{-2,292}$	$\frac{-3,636}{-2,601}$
0.830	$\frac{-1,009}{-0,352}$	$\frac{-1,034}{-0,726}$	$\frac{-1,075}{-1,026}$	$\frac{-1,172}{-1,076}$	$\frac{-1,028}{-0,455}$	$\frac{-1,072}{-0,637}$	$\frac{-1,154}{-0,969}$	$\frac{-1,442}{-2,142}$
	$\frac{-0,095}{-0,084}$	$\frac{-0,115}{-0,175}$	$\frac{-0,149}{-0,225}$	$\frac{-0,223}{-0,158}$	$\frac{-0,091}{-0,213}$	$\frac{-0,111}{-0,124}$	$\frac{-0,156}{-0,201}$	$\frac{-2,327}{-0,214}$
0.100								
İterasyon No	9	7	5	4	9	6	5	3

Çizelge 3.8. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/\ell = 0.1$ durumunda P/E_1 değişiminin σ_{22}/q gerilmesinin x_1/ℓ ' ye göre yayılımına etkisi

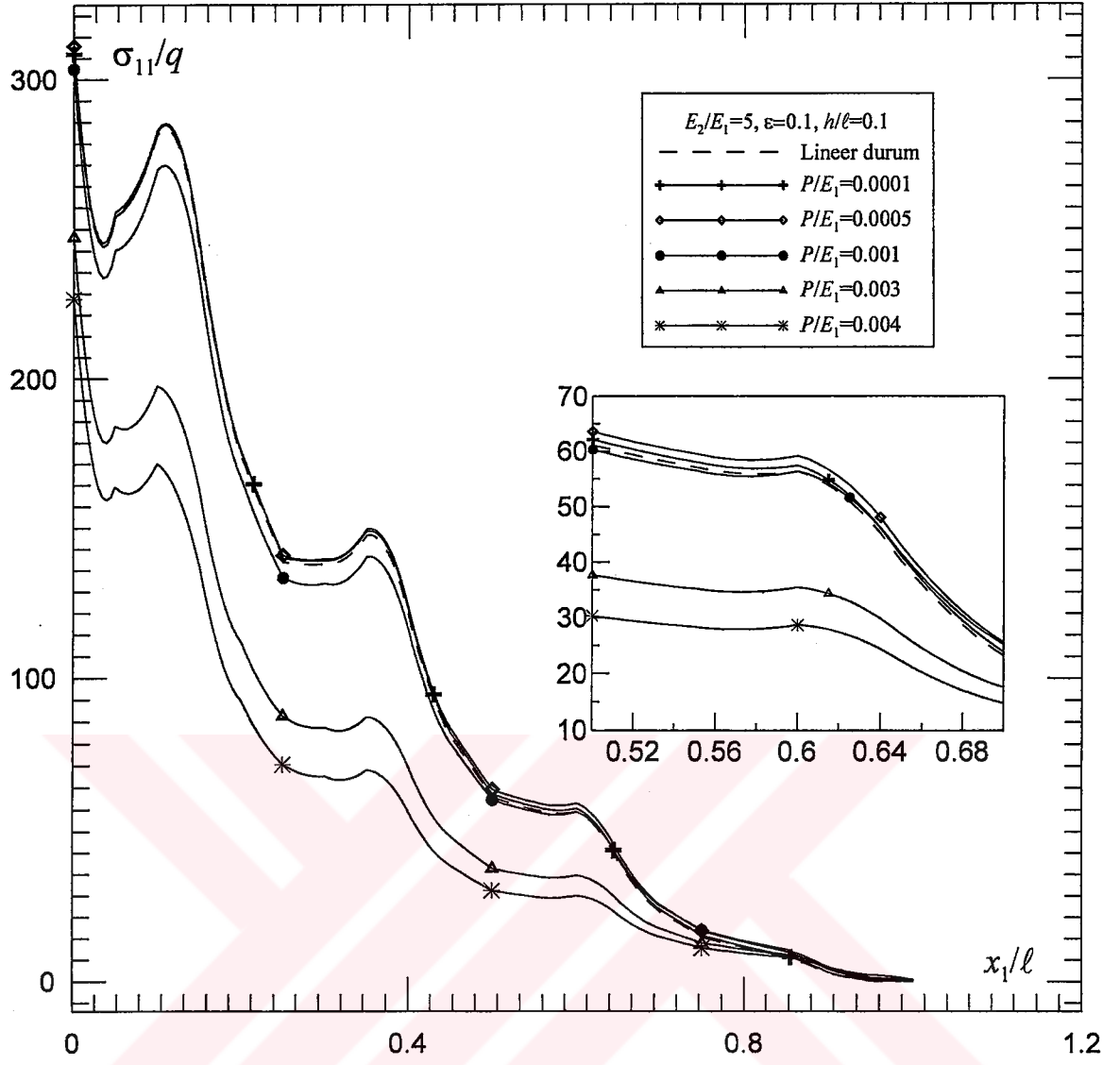
İterasyon No	x_1/ℓ							
	0.250	0.365	0.490	0.600	0.700	0.830	0.935	0.100
Lineer Durum	4.785	-4.058	1.879	-1.866	0.241	-0.912	-0.313	-0.684
$p/E_1 = 0.0001$	4.397	-4.325	1.800	-1.919	0.245	-0.918	-0.299	-0.755
$p/E_1 = 0.0005$	2.685	-5.241	1.394	-2.068	0.233	-0.915	-0.243	-1.017
$p/E_1 = 0.001$	0.789	-5.779	0.879	-2.052	0.206	-0.828	-0.154	-1.212
$p/E_1 = 0.003$	-1.646	-4.286	0.100	-1.250	0.195	-0.345	0.156	-1.176
$p/E_1 = 0.004$	-1.640	-3.405	0.000	-0.996	0.128	-0.314	0.106	-1.220

$E_2/E_1 = 5$, $h/\ell = 0.1$ olmak üzere; $\varepsilon = 0.1$ durumunda Çizelge 3.8 ve Şekil 3.8' de σ_{22}/q , Şekil 3.9' da σ_{11}/q , $\varepsilon = 0.0$ durumunda ise Şekil 3.10 ve Şekil 3.11' de sırasıyla σ_{22}/q ve σ_{11}/q gerilmelerinin x_1/ℓ ' ye göre yayılımları verilmektedir. Burada P/E_1 ' in bu gerilmelerin değerlerine ve yayılımına etkisi gösterilmektedir. Bu çizelge ve şekillerden P/E_1 arttıkça bu gerilme değerlerine geometrik non-lineeritenin etkisinin büyüdüğü görülmektedir.

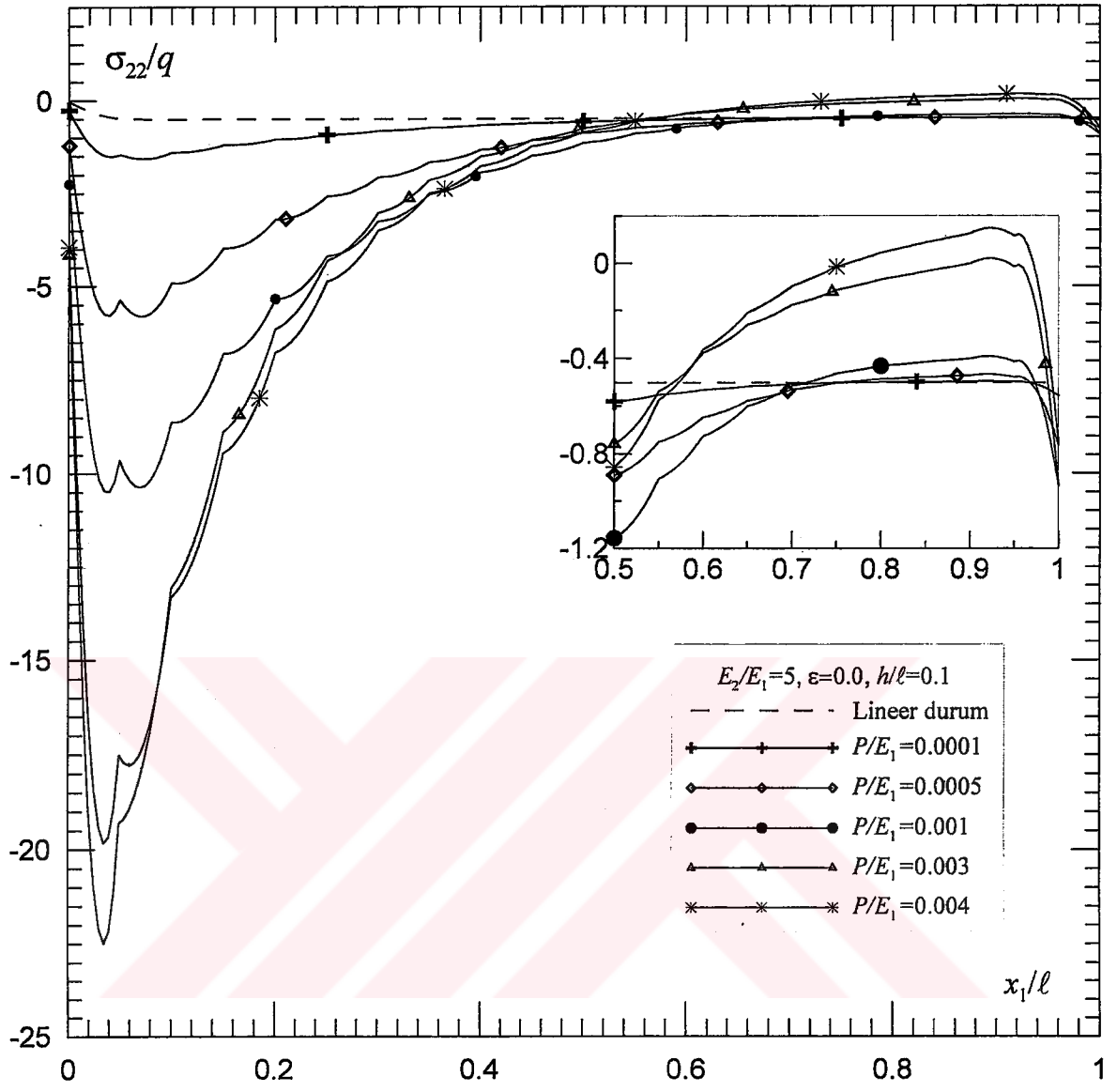
Bu ve bundan sonraki şekillerde kesikli çizgiler uygun lineer problemlerden elde edilen sayısal sonuçları göstermektedir.



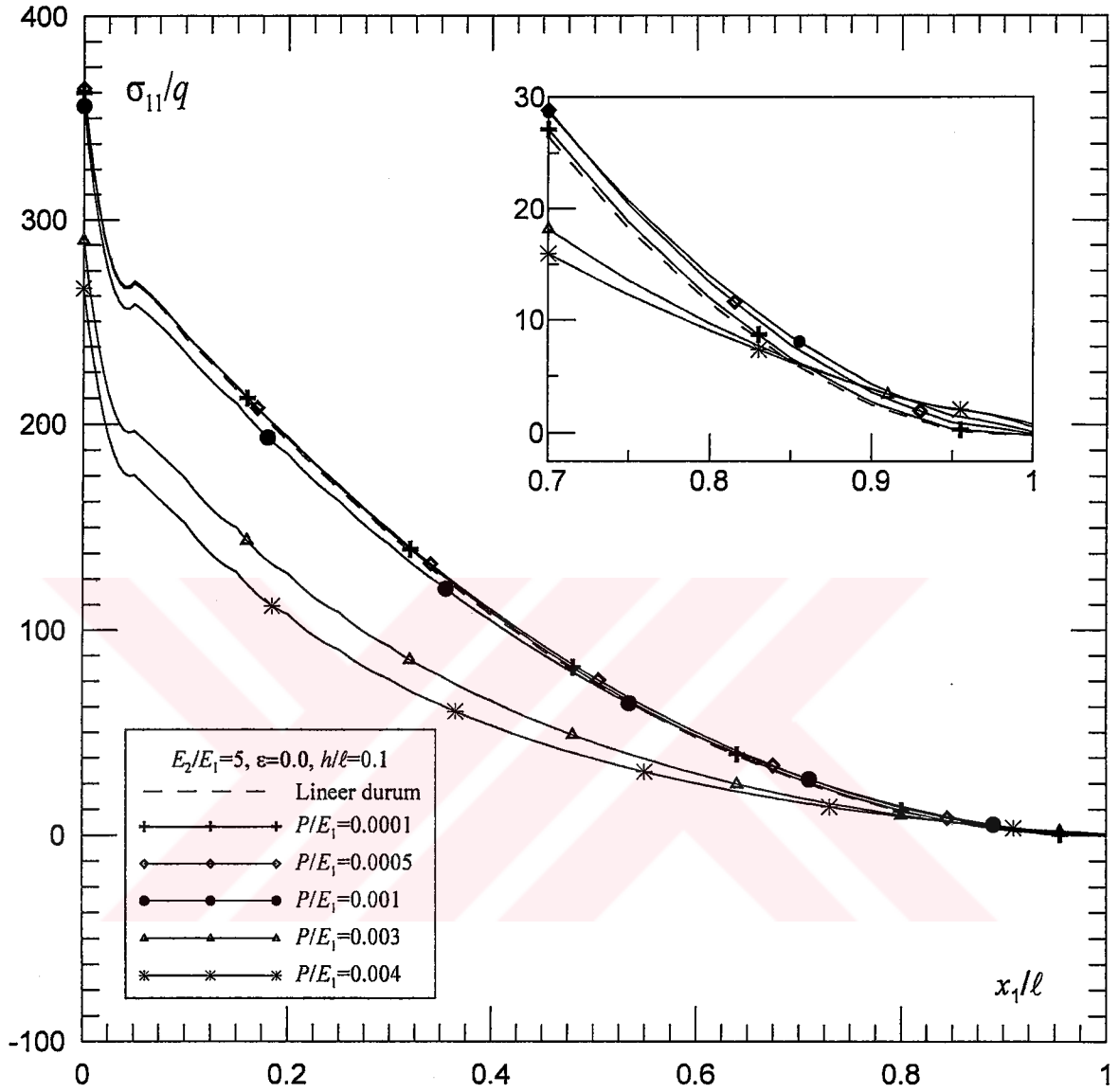
Şekil 3.8. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/l = 0.1$ durumunda P/E_1 değişiminin σ_{22}/q gerilmesinin x_1/l 'ye göre yayılımına etkisi



Şekil 3.9. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $h/l = 0.1$ durumunda P/E_1 değişiminin σ_{11}/q gerilmesinin x_1/l 'ye göre yayılımına etkisi

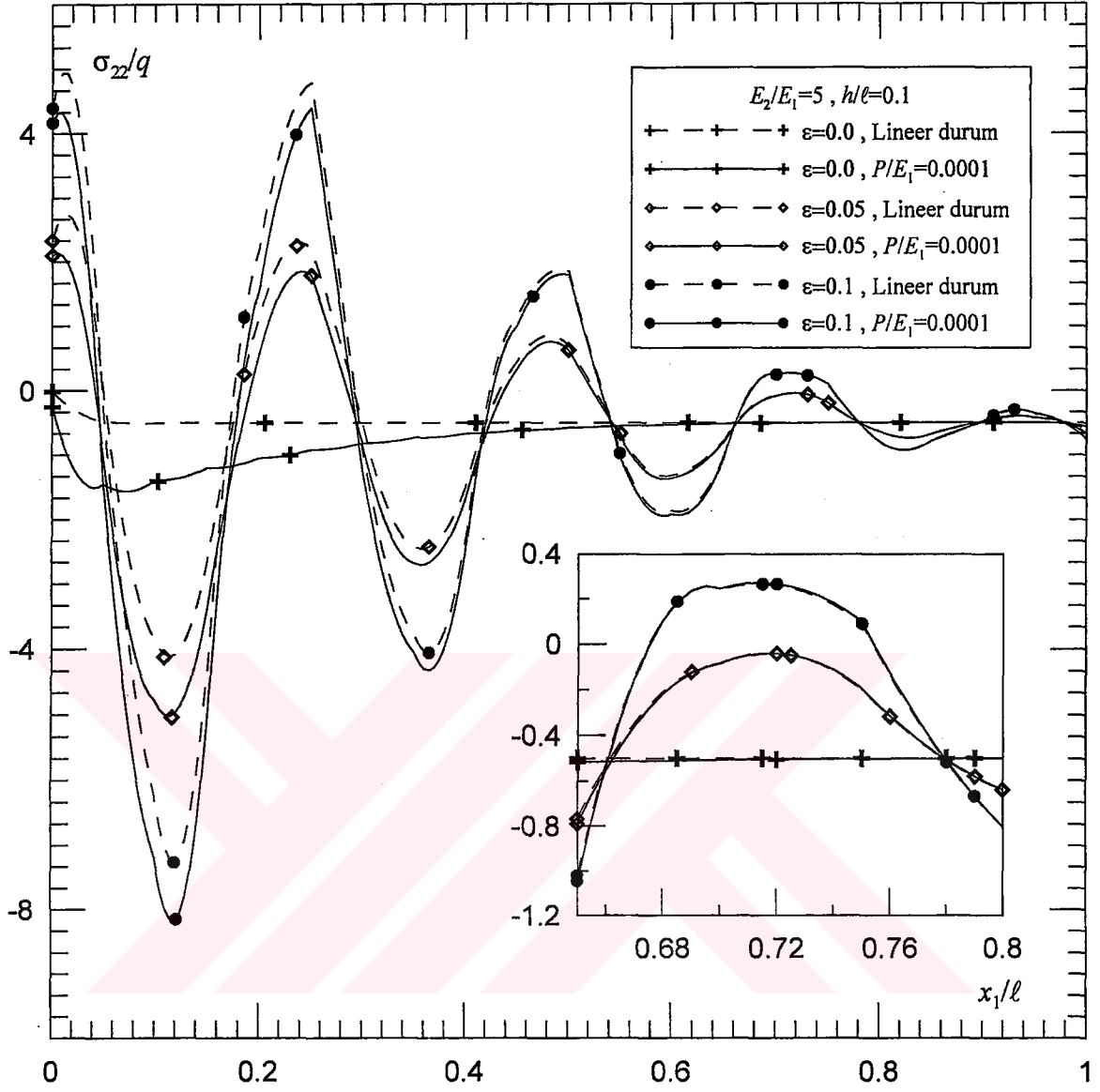


Şekil 3.10. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.0$, $h/\ell = 0.1$ durumunda P/E_1 değişiminin σ_{22}/q gerilmesinin x_1/ℓ 'ye göre yayılımına etkisi

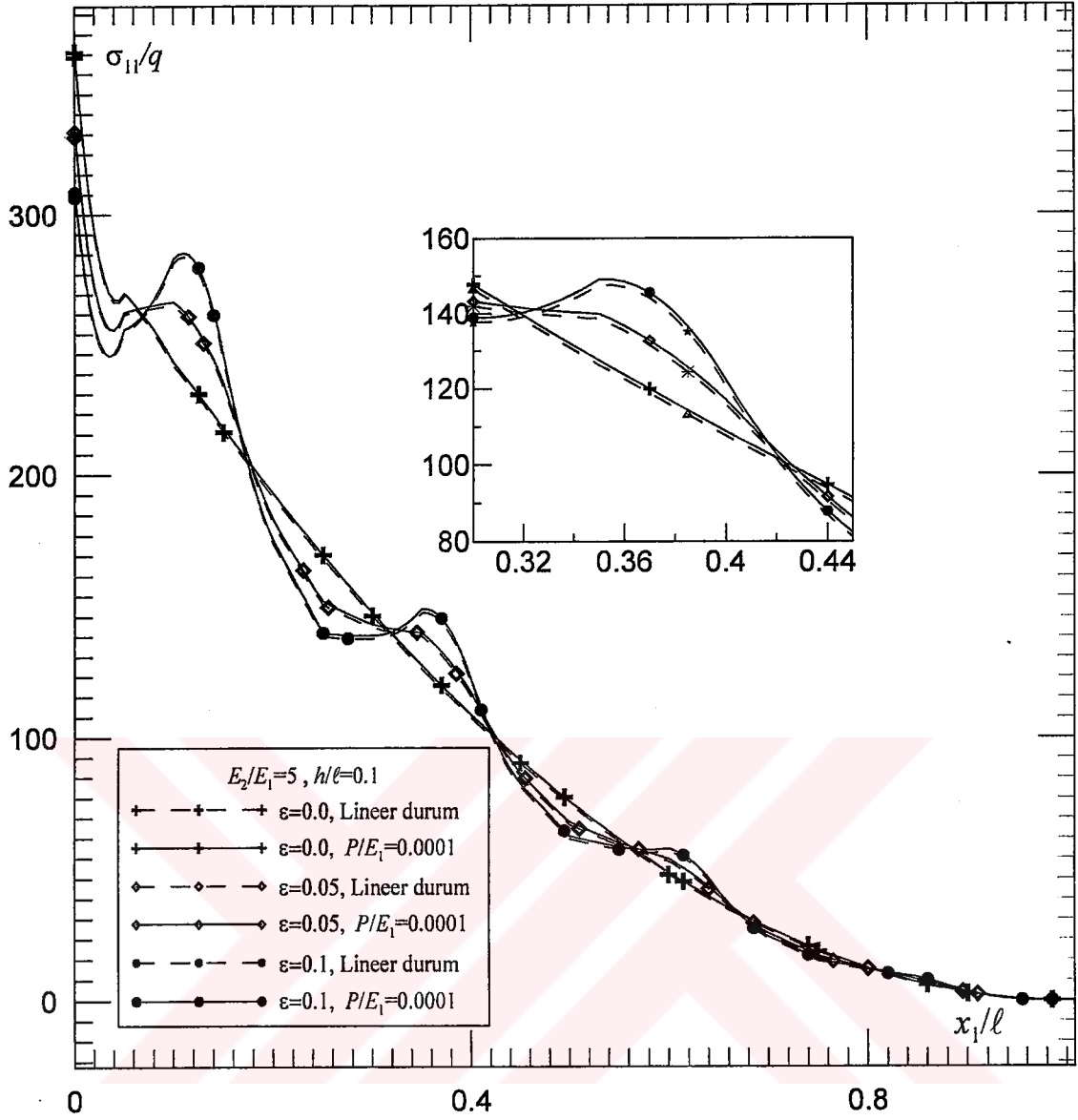


Şekil 3.11. $E_2/E_1 = 5$, $\varepsilon = 0.0$, $h/l = 0.1$ durumunda P/E_1 değişiminin σ_{11}/q gerilmesinin x_1/l 'ye göre yayılımına etkisi

Şekil 3.12 ve Şekil 3.13' de sırasıyla σ_{22}/q ve σ_{11}/q gerilmelerinin x_1/l 'ye göre yayılımları çeşitli ε değerleri için $P/E_1 = 0.0001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/l = 0.1$ durumunda verilmektedir. Bu şekillerden uygun linear problemden elde edilen gerilme değerlerine non-lineeritenin etkisinin serbest uçtan rijit tutturulmuş uca doğru giderek büyüdüğü görülmektedir.



Şekil 3.12. $P/E_1 = 0.0001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/l = 0.1$ durumunda ϵ değişiminin σ_{22}/q gerilmesinin x_1/l 'ye göre yayılımına etkisi



Şekil 3.13. $P/E_1 = 0.0001$, $E_2/E_1 = 5$, $h/l = 0.1$ durumunda ϵ değişiminin σ_{11}/q gerilmesinin x_1/l ' ye göre yayılımına etkisi

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Tez kapsamında yapılan araştırmalarda elde edilen sonuçlar kısaca özetlenirse aşağıdakiler söylenebilir.

1. Akbarov ve Guz'un süreklilik teorisi çerçevesinde elastisite teorisinin düzlem şekil değiştirme durumundaki iki boyutlu geometrik non-lineer problemlerine karşı gelen sınır değer probleminin matematiksel formülasyonu verilmiştir.
2. Bu problemin mekaniksel açıklaması verilmiştir. Formülasyonu yapılmış problemin kısmi türevli değişken katsayılı non-lineer diferansiyel denklemlerin bazı sınır değer problemine karşı geldiği gösterilmiştir.
3. Ele alınan probleme karşı gelen kısmi türevli non-lineer denklem sistemi analitik çözümlü imkansız olduğundan sayısal çözümlü araştırılmış ve bunun için Sonlu Elemanlar yöntemi kullanılmıştır.
4. Formülasyonu yapılmış olan non-lineer sınır değer probleminin sonlu elemanlar ile modellenmesi yapılmıştır. Elde edilen non-lineer denklem sisteminin sayısal çözümlü için Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır.
5. Sayısal sonuçların elde edilmesi için gerekli algoritmalar geliştirilmiş ve FORTRAN program dilinde bu algoritmalar programlaştırılmıştır.
6. Newton-Raphson yöntemi ile farklı iterasyonlardan elde edilen sayısal sonuçların yakınsaklık sınırlarının problem parametrelerinden bağımlılığı araştırılmıştır.
7. Geometrik non -lineeritenin ele alınan alanda gerilme yayılımına etkisini gösteren sonuçlar tablolar ve grafikler şeklinde verilmiştir.

Tez çerçevesinde elde edilen sonuçların değerlendirilmesi sonucunda ise aşağıdakileri söyleyebiliriz:

1. Eğriyel yapıya sahip kompozit malzemeler mekaniğinin statiğine uygun gelen, değişken katsayılı, kısmi türevli non-lineer diferansiyel denklem sisteminin bazı sınır koşulları çerçevesinde verilen problem ilk kez sayısal olarak çözülmüştür.
2. Bu araştırmada Sonlu Elemanlar yöntemi kullanılmıştır.
3. Açıkça anlaşılan ve grafikler şeklinde sayısal sonuçlar verilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar mühendislik bakımından da yorumlanmıştır.

KAYNAKLAR

- Akbarov S.D. ve Guz A.N., (1991), "Continuum Theory in the Mechanics of Composite Materials with Smallscale Structural Distortion", Soviet Appl. Mech., Ağustos, s:107-117
- Akbarov S.D. ve Guz A.N., (2000), Mechanics of Curved Composites, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, Boston, London, 464s.
- Barkanov,E., (2001), Introduction To The Finite Element Method, Riga.
- Bathe Klaus-Jürgen, (1996), Finite Element Procedures, Prentice Hall International Editions, New Jersey.
- Bergan, P. G., Horrigmoe, G. ve Soreide, T. H., (1978), "Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems", Int. J. Numer. Methods Eng., 12:1677-1696.
- Clarke, M. J. ve Hancock, G. J., (1990), "A Study of Incremental-Iterative Strategies for Non-Linear Analyses", Int. J. Numer. Methods Eng., 29:1365-1391.
- Crisfield, M. A., (1991), Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol.1 Essentials, John Wiley & Sons, New York
- Crisfield, M. A., (1997), Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 2: Advanced Topics, John Wiley & Sons, New York
- Eason, E. D. ve Mote, C. D., (1977), "Solution of Non-Linear Boundary Value Problems by Discrete Least Squares", Int. J. Numer. Methods Eng., 11:641-652.
- Flaherthy J.E. , (2000), CSCI Math 6860 Finite Element Analysis Lecture Notes, New York.
- Gadala, M. S., Dokainish, M. A. ve Oravas, G. AE., (1984), "Formulation Methods of Geometric and Material Nonlinearity Problems", Int. J. Numer. Methods Eng., 20:887-914.
- Hasanoğlu A., H., (2001), Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi, Literatür Yayınları, İstanbul.
- Malkus, D. S., (1980), "Finite Elements with Penalties in Nonlinear Elasticity", Int. J. Numer. Methods Eng., 16:121-136.
- Matthies, H. ve Strang, G., (1979), "The Solution of Nonlinear Finite Element Equations", Int. J. Numer. Methods Eng., 14:1613-1626.

Petrangeli, M. ve Ciampi, V., (1997), "Equilibrium Based Iterative Solutions for the Non-Linear Beam Problem", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 40:423-437.

Reddy, J. N. (1985), *An Introduction to The Finite Element Method*, McGraw-Hill

Sarma, B. S. ve Varadan, T. K., (1984), "Ritz Finite Element Approach to Nonlinear Vibrations of Beams", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 20:353-367.

Selim, S., (1999), "On the Convergence of Newton-Raphson Method Under FEM Analyses of Some Non-Linear Problems of Theory of Elasticity", *Journal of Yildiz Technical University*, 4: 41-50.

Selim, S., (1999), *Bazı Non-Lineer Sınır Değer Problemlerinin FEM İle İncelenmesi*, Doktora Tezi, YTÜ.

Yahnioglu N., (1996), *Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemeden Hazırlanmış Yapı Elemanlarının Statiğine Uygun Sınır Değer Problemlerinin FEM ile İncelenmesi*, Doktora Tezi, YTÜ.

Yahnioglu, N. and Selim, S., (2000), "Bending of a Composite Material Strip With Curved Structure in The Geometrically Nonlinear Statement", *Mech. Comp. Mater.*, 6(36): 767-774.

Zeid, I., (1985), "Fixed-Point Iteration to Nonlinear Finite element Analysis. Part I: Mathematical Theory and Background", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 21:2027-2048.

Zienkiewicz O.C. ve Taylor R.L., (1989), *The Finite Element Method 4th Ed., Vol.1, Basic Formulation and Linear Problems*, Mc-Graw Hill Book Comp.

Zienkiewicz O.C. ve Taylor R.L.,(1991) *The Finite Element Method 4th Ed., Vol.2, Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity*, Mc-Graw Hill Book Comp.

İNTERNET KAYNAKLARI

[1] <http://femmuhendislik.8m.com/analiz/fem/seynedir.htm>

EKLER**Ek1 Problemin Algoritması**

- 1. Adım:** Non-linear sınır değer problemin sonlu eleman modellemesi yapılır. Böylece problemin çözümlü $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{r}$ non-linear denklem sisteminin çözümlüne indirgenmiş olur.
- 2. Adım:** Problem parametreleri girilir.
- 3. Adım:** Non-linear denklem sisteminde non-linear terimler kaldırılırsa $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r}$ şeklinde lineer denklem sistemi elde edilir. Bu lineer denklem sistemi çözümlür. Çözümlü \mathbf{a}_0 olsun.
- 4. Adım:** $\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{r}$ non-linear denklem sistemi başlangıç çözümlü \mathbf{a}_0 alınarak Newton-Raphson yöntemi ile istenilen yakınsaklıkta sayısal çözümlü elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 10.06.1979

Doğum yeri İstanbul

Lise 1993-1997 Çemberlitaş Kız Lisesi

Lisans 1997-2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2001-2004 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı

Çalıştığı kurum

2001-Devam ediyor YTÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Araştırma Görevlisi

